УДК 621.9.048.6

З.А. СТОЦЬКО, Б.І. СОКІЛ, В.Г. ТОПІЛЬНИЦЬКИЙ, Я.М. КУСИЙ, А.Р. ЗАВЕРБНИЙ

Національний університет “Львівська політехніка”

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ СИПКОГО СЕРЕДОВИЩА ВІБРОАКТИВНИХ МАШИН, ПРИСТРОЇВ ТА МЕХАНІЗМІВ

Побудовано нелінійну математичну модель механічної системи „віброактивна машина – сипке середовище”, яка дає змогу дослідити динаміку системи з метою визначення впливу її параметрів на ефективність технологічних процесів об’ємного вібраційного оброблення, вібротранспортування, сепарації, помолу, ущільнення сипких матеріалів.

The nonlinear mathematical model of the mechanical system is built „віброактивна a machine is a friable environment”, which enables to explore the dynamics of the system with the purpose of determination of influencing of its parameters on efficiency of technological processes of by volume vibration treatment, transporting, separatsiї, compression of friable materials.

Актуальність тематики досліджень. Опис (вивчення) руху сипкого середовища контейнера віброактивної машини, пристрою чи механізму за об’ємного віброоброблення, вібротранспортування сипких матеріалів, вібросепарації, помолу, їх ущільнення є доволі складною задачею динаміки, яка до цього часу повністю не розв’язана. Проте, враховуючи широке розповсюдження вібраційних технологій, розв’язання цих задач побудовою моделей руху середовища з максимальним наближенням їх до відображення реальних вібраційних процесів є актуальною під час розробки і впровадження нових технологій обробки виробів та конструкцій вібромашин.

Відсутність адекватних моделей з відповідним математичним апаратом опису для сипкого середовища створює великі труднощі під час теоретичного дослідження об’ємного віброоброблення і таких технологічних процесів, як вібротранспортування сипких матеріалів, вібросепарація, помол, ущільнення тощо. Сьогодні розроблено багато моделей сипкого середовища для розв’язання різноманітних задач, які певною мірою відображають фізику процесу цих технологій. Кожна з моделей має певні недоліки та обмеження використання, що підтверджує необхідність подальшої роботи у цьому напрямку. Побудова та дослідження моделей руху сипкого середовища для об’ємного оброблення виробів, вібротранспортування сипких матеріалів, вібросепарації, помолу, ущільнення тощо, адекватних фізиці процесу, дасть можливість з’ясувати вплив параметрів (за різних їх комбінацій) віброактивних машин пристроїв і механізмів та середовища на характер їх руху, на інтенсивність цих технологічних процесів, що уможливить скорочення матеріало-, енерго- і часових затрат на стадії проектування машин загалом, під час розробки технологічних процесів, їх оптимізації та автоматизації шляхом залучення комп’ютерної техніки, написання відповідного програмного забезпечення (систем типу САПР) на основі цих моделей або їх обробки за допомогою вже наявних, загальновідомих у САПР, математичних розрахунків.

Побудова математичної моделі руху сипкого середовища. Якщо припустити, що матеріал сипкого середовища задовольняє нелінійному закону Фогта, а також позначити $u = u(\xi, t)$ – переміщення вздовж осі руху ξ довільного поперечного перерізу шару середовища за деякий момент часу t, то рівняння його руху матиме вигляд

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{\xi\xi} = \varepsilon F(u, u_\xi, u_t, u_{\xi\xi}, u_{\xi\xi t}, \mu t), \qquad (1)$$

де α, $F(u,u_{\xi},u_t,u_{\xi\xi},u_{\xi\xi t},\mu t)=\left[\left(u_{\xi\xi t}\right)^{\nu+1}+\left(\vartheta_1+\delta_1 u^2\right)u_t+b_1\sin\mu t\right]$ – функції, що враховують геометричні, технологічні та динамічні показники нелінійної механічної системи „віброактивна машина–сипке середовище”; ε – малий параметр.

Розглянемо контакт середовища з контейнером віброактивної машини у вигляді шарнірно закріплених балок. Для крайових умов контакту середовища з контейнером як шарнірно закріпленої балки матимемо

$$u(0,t)=u(l,t)=0\,, \tag{2}$$

де l – довжина моделі середовища або довжина контейнера віброактивної машини. Використовуючи асимптотичні методи нелінійної механіки, розглянемо незбурене рівняння, яке відповідає (1), тобто рівняння

$$u_{tt}-\alpha^2 u_{\xi\xi}=0\,. \tag{3}$$

Відокремлюючи в (3) змінні згідно з $u(\xi,t)=\Xi(\xi)\cdot T(t)$, для знаходження $\Xi(\xi)$ і T(t) матимемо звичайні лінійні диференціальні рівняння

$$\Xi''(\xi)+\frac{1}{\alpha^2}\lambda\Xi(\xi)=0\,; \tag{4}$$

$$\ddot{T}(t)+\lambda T=0\,, \tag{5}$$

де λ – параметр, який буде визначено нижче, враховуючи крайові умови.

Функція $\Xi(\xi)$ в (4), як випливає з (2), повинна задовольняти крайові умови:

$$\Xi(\xi)\big|_{\xi=0}=\Xi(\xi)\big|_{\xi=l}=0\,. \tag{6}$$

З врахуванням останнього, параметр λ і розв’язки рівняння (4) запишуться у вигляді

$$\lambda=\frac{k\pi}{l}\,;\; u=\sum_k \Xi_k(\xi)\overline{T}_k\cos\omega_k t\,;\; \Xi_k=\overline{\Xi}_k\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,;\; \omega_k=\alpha\frac{k\pi}{l}\,,$$

де $\overline{\Xi}_k$ і $\overline{T}_k$ – сталі, $k=0,1,2,3...$.

Як відомо, в реальних механічних системах з багатьма ступенями вільності, а також у системах з розподіленими параметрами наявність сил тертя (як зовнішніх, так і внутрішніх) призводить до швидкого згасання високочастотних коливань і встановлення динамічного процесу з якоюсь однією частотою. У вказаних системах доцільно розглянути так звані одночастотні режими коливань з частотою, що дорівнює першій (головній) частоті. Це великою мірою полегшує методику дослідження збуреного рівняння (1). Тому приймемо за одночастотні розв’язки незбуреного рівняння співвідношення

$$u(\xi,t)=a\cdot\sin\left(\frac{\pi}{l}\xi\right)\cos(\omega^* t+\theta)\,;\; \tilde{\Xi}(\xi)=\sin\frac{\pi}{l}\xi\,, \tag{7}$$

де $\omega^*=\alpha\dfrac{\pi}{l}$; a і θ – сталі ($a=\overline{\Xi}\overline{T}$); вони відповідають так званій першій формі динамічної рівноваги середовища.

Співвідношення (7) також вважатимемо розв’язком збуреного рівняння (1), для якого a і θ будуть вже функціями часу t, тобто розв’язок збуреного рівняння (рівняння руху шару сипкого середовища) запишемо у вигляді

$$u(\xi,t)=a(t)\tilde{\Xi}(\xi)\cos(\omega^* t+\theta(t))\,, \tag{8}$$

де $a(t)$ і $\theta(t)$ визначаються із диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases}\dot{a}=\varepsilon\dfrac{\sin\psi}{\omega^* p}\displaystyle\int_0^l\left(\left(u_{\xi\xi t}\right)^{\nu+1}+\left(\vartheta_1+\delta_1 u^2\right)u_t+b_1\sin\gamma\right)\sin\frac{\pi\xi}{l}d\xi;\\[2ex] \dot{\theta}=\varepsilon\dfrac{\cos\psi}{\omega^* ap}\displaystyle\int_0^l\left(\left(u_{\xi\xi t}\right)^{\nu+1}+\left(\vartheta_1+\delta_1 u^2\right)u_t+b_1\sin\gamma\right)\sin\frac{\pi\xi}{l}d\xi,\end{cases} \tag{9}$$

де $p=\int\limits_0^l \tilde{\Xi}^2(\xi)d\xi=\int\limits_0^l \sin^2\frac{\pi}{l}\xi d\xi=\frac{l}{2}$; $\gamma=\mu t$; $\psi=\omega^* t+\theta$; $u=a\sin\frac{\pi}{l}\xi\cos\psi$; $u_t=-\omega^* a\sin\frac{\pi}{l}\xi\sin\psi$; $u_\xi=\frac{\pi}{l}a\cos\frac{\pi}{l}\xi\cos\psi$; μ – частота збурюючої сили.

Для системи диференціальних рівнянь (9) розглянемо два випадки: *нерезонансний рух сипкого середовища* $m\omega\neq\mu n$ і *резонансний* $m\omega\approx\mu n$.

Нерезонансний випадок. Вплив малого періодичного збурення на амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) нелінійних систем у нерезонансному випадку незначний. Тому для аналізу руху середовища використаємо так звані усереднені диференціальні рівняння, які відповідають (9), тобто

$$\begin{aligned}\dot a&=\frac{\varepsilon}{4\pi^2\omega^* p}\int\limits_0^l\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\left(u_{\xi\xi t}\right)^{\nu+1}+\left(\vartheta_1+\delta_1 u^2\right)u_t+b_1\sin\gamma\right)\sin\frac{\pi}{l}\xi\sin\psi d\xi d\psi d\gamma;\\ \dot\theta&=\frac{\varepsilon}{4\pi^2 a\omega^* p}\int\limits_0^l\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\left(u_{\xi\xi t}\right)^{\nu+1}+\left(\vartheta_1+\delta_1 u^2\right)u_t+b_1\sin\gamma\right)\sin\frac{\pi}{l}\xi\cos\psi d\xi d\psi d\gamma.\end{aligned}\qquad(10)$$

У (10) припускаємо, що амплітуда $a(t)$ і фаза $\theta(t)$ коливань сипкого середовища за період змінюються на незначну величину. Це дає змогу під час інтегрування останніх виразів вважати a і θ сталими.

Отже, одночастотні коливання середовища у нерезонансному випадку описуються залежністю (8), в якій $a(t)$ і $\theta(t)$ визначаються з диференціальних рівнянь (10):

$$\dot a=\frac{\varepsilon}{4\pi^2\omega^* p}\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\begin{array}{l}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\xi\right)a\omega^*\sin^2\psi+\vartheta a\omega^*\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\xi\right)\sin^2\psi+\\ +\delta a^3\omega^*\sin^4\left(\frac{\pi}{l}\xi\right)\sin^2\psi\cos^2\psi+b_1\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{l}\xi\right)\sin\psi\end{array}\right)d\xi d\psi d\gamma\right)=$$

$$=\frac{\varepsilon}{2\pi^2\omega^* l}\left(\frac{\pi^4}{l}a\omega^*-\vartheta a\omega^*\pi^2 l-\delta a^3\omega^*\frac{3l\pi^2}{16}\right)=\frac{\varepsilon\pi^2 a}{2l^2}-\frac{\vartheta_1 a}{2}-\frac{3a^3\delta_1}{32}=A(a)\,,\ \dot\theta=0\,.$$

Резонансний випадок. У резонансному випадку амплітудно-частотні характеристики нелінійних коливань системи істотно залежать від фази зовнішнього збурення. Тому введемо у (9) різницю фаз $\varphi=\psi-\gamma$, тоді для випадку головного резонансу $\omega\approx\mu$ $(m=n)$ отримаємо

$$\begin{aligned}\dot a&=\varepsilon\frac{\sin(\varphi+\gamma)}{\omega^* p}\int\limits_0^l\left(\left(u_{\xi\xi t}\right)^{\nu+1}+\left(\vartheta_1+\delta_1 u^2\right)u_t+b_1\sin\gamma\right)\sin\frac{\pi}{l}\xi d\xi,\\ \dot\varphi&=\omega^*-\mu+\varepsilon\frac{\cos(\varphi+\gamma)}{\omega^* ap}\int\limits_0^l\left(\left(u_{\xi\xi t}\right)^{\nu+1}+\left(\vartheta_1+\delta_1 u^2\right)u_t+b_1\sin\gamma\right)\sin\frac{\pi}{l}\xi d\xi.\end{aligned}\qquad(11)$$

Функція $u(\xi,t)$ і її похідні визначаються, як і у (9), тільки для розглядуваного випадку $\psi=\gamma+\varphi$. Усереднюючи диференціальні рівняння (11) лише за швидкозмінною фазою γ, знаходимо

$$\dot a=\varepsilon\frac{1}{2\pi\omega^* p}\int\limits_0^l\int\limits_0^{2\pi}\sin(\varphi+\gamma)\cdot\left(\left(u_{\xi\xi t}\right)^{\nu+1}+\left(\vartheta_1+\delta_1 u^2\right)u_t+b_1\sin\gamma\right)\sin\frac{\pi x}{l}d\xi d\gamma=$$

$$=\varepsilon\frac{1}{2\pi\omega^* p}\int\limits_0^l\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a\omega^*\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\xi\right)\sin^2(\varphi+\gamma)-\Bigg(\vartheta_1 a\omega^*\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\xi\right)\cdot\sin^2(\varphi+\gamma)+$$

$$+\delta_1 a^3 \omega^* \sin^4\left(\frac{\pi}{l}\xi\right)\sin^2(\varphi+\gamma)\cos^2(\varphi+\gamma)\Bigg)+b_1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{l}\xi\right)\cdot\sin\gamma\cdot\sin(\varphi+\gamma)\Bigg)d\xi d\gamma =$$

$$=\varepsilon\left[\frac{a}{2}\left(\frac{\pi^2}{l^2}-\vartheta_1-\frac{3a^2\delta_1}{16}\right)+\frac{2b_1\cos\varphi}{\pi\omega^*}\right]; \qquad (12)$$

$$\dot{\varphi}=\omega^*-\mu+\varepsilon\frac{1}{2\pi\omega^* ap}\int_0^l\int_0^{2\pi}\cos(\varphi+\gamma)\cdot\left(\left(u_{xxt}\right)^k+\left(\vartheta_1+\delta_1 u^2\right)u_t+b_1\sin\gamma\right)\sin\frac{\pi x}{l}dxd\gamma =$$

$$=\omega^*-\mu+\varepsilon\frac{1}{2\pi\omega^* ap}\int_0^l\int_0^{2\pi}\sin\gamma\cdot\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\cos(\varphi+\gamma)dxd\gamma=\omega^*-\mu-\frac{2\varepsilon b_1\sin\varphi}{\pi\omega^* a}.$$

Перше наближення асимптотичного розв’язку рівняння (1) у резонансному випадку описується залежністю

$$u(\xi,t)=a(t)\cdot\sin\frac{\pi\xi}{l}\cdot\cos(\varphi+\mu t), \qquad (13)$$

в якій $a(t)$ і $\varphi(t)$ визначаються з системи нелінійних диференціальних рівнянь (12).

Застосування розроблених математичних моделей руху сипкого середовища. Використовуючи отримані вище параметризовані співвідношення, можна дослідити вплив геометричних, технологічних та динамічних показників нелінійної механічної системи “віброактивна машина–сипке середовище” на характер її функціонування. Зокрема, можна визначити залежності амплітуди коливань сипкого середовища (як основного чинника механічного критерію ефективності вібраційних технологічних процесів об’ємного оброблення, сепарації, помолу, вібротранспортування, віброущільнення сипких сумішей) від параметрів вібраційної машини, пристрою, від фізико-механічних властивостей самого сипкого середовища. На рис. 1 зображено таку залежність від геометричних характеристик контейнера віброактивної машини (зокрема її довжини) та типу матеріалу сипкого середовища (його густини). Побудована математична модель використана для процесу вібраційного об’ємного оброблення виробів (наприклад, зміцнення) та вібраційного помолу сипких сумішей. Як зрозуміло з цього графіка, спектр видів сипких матеріалів може бути доволі широким.

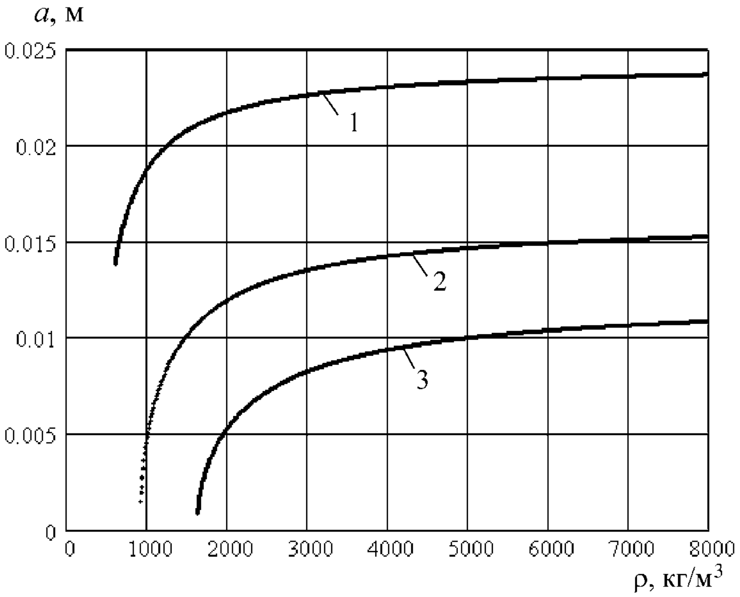

Рис. 1. Залежність амплітуди коливань сипкого середовища від довжини контейнера віброактивної машини та густини матеріалу середовища: 1 – довжина контейнера 0,8 м; 2 – 1,2 м; 3 – 1,6 м

На рис. 2 показано залежність амплітуди коливань середовища від його товщини та ширини шару. Побудована математична модель використана для технологічного процесу вібраційного ущільнення (досліджуваний матеріал – цементна суміш з $\rho = 1400 \ кг/м^3$, довжина шару – $l = 0.8 \ м$). Графічні залежності отримано за допомогою САПР математичних розрахунків MathCAD.

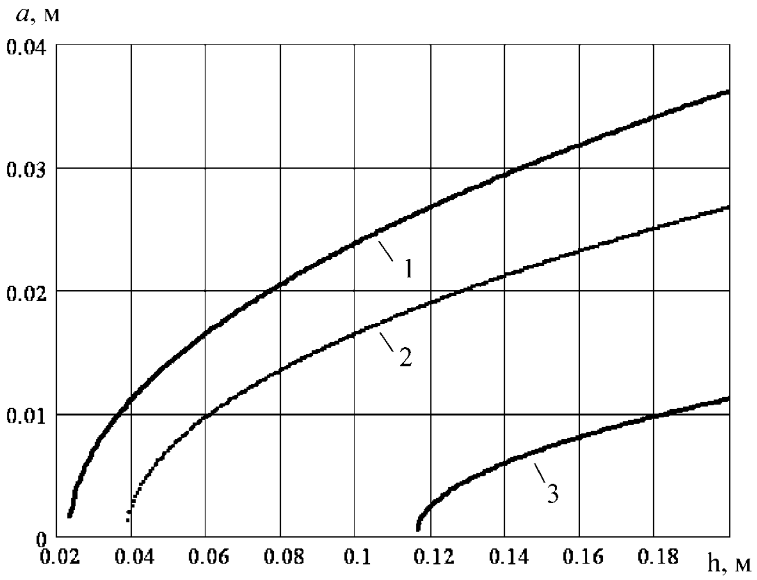

Рис. 2. Залежність амплітуди коливань середовища від висоти h та ширини шару b : 1 – ширина шару середовища 1 м; 2 – 0,6 м; 3 – 0,2 м

Висновки. Побудова нелінійних математичних моделей динаміки сипкого середовища віброактивних машин пристроїв та механізмів під час вібраційних технологій об'ємного оброблення виробів, помолу, ущільнення, вібротранспортування, сепарації в аспекті уніфікації дає можливість створити зручний теоретичний апарат, який, в поєднанні з відповідними системами автоматизованих розрахунків, дасть змогу визначити вплив параметрів нелінійної механічної системи "віброактивна машина – сипке середовище" на інтенсивність її роботи. Це уможливить оптимізувати досліджувані технологічні процеси і використати розроблений теоретичний апарат під час експлуатації віброактивних машин, пристроїв та механізмів, зокрема під час визначення режимів їх роботи.

1. Субач А.П. Динамика процессов и машин объемной обработки. – Рига: Зинатне, 1991. – 240 с. 2. Блехман И.И., Левенгарц В.Л. Динамическая модель процесса движения загрузки в рабочих камерах машин для виброабразивной обработки деталей // Вопр. динамики и прочности. – Рига: Зинатне. – 1980. – №36. – С. 83–93. 3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. – М.: Физматиз, 1974. – 501 с. 4. Stotsko Z.A., Sokil B.I., Topilnytskiy V.H. Intensification of processes of strengtening machine parts by volumetric vibration treatment, III International Conference Transport Systems Telematics TST'03, 13–15 November 2003, Katowice – Ustron, 2003. – S. 73, 493–504. 5. Стоцько З.А., Дівеєв Б.М., Сокіл Б.І., Топільницький В.Г. Математичні моделі керування віброактивністю технологічних машин. – М.: Машинознавство. – 2005.– №2. – С. 37–42.