УДК 534.111

Б.І. СОКІЛ, М.В. БОЖЕНКО, Х.І. ЛІЩИНСЬКА*

Національний університет “Львівська політехніка”

Ateb-ФУНКЦІЇ У ДОСЛІДЖЕННІ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ СИЛЬНО НЕЛІНІЙНИХ СЕРЕДОВИЩ, ЯКІ ХАРАКТЕРИЗУЮТЬСЯ ПОЗДОВЖНІМ (ОБЕРТАЛЬНИМ) РУХОМ

Розроблено методику дослідження коливань одновимірних однорідних нелінійно пружних середовищ, які характеризуються поздовжнім (обертальним) рухом і піддаються дії зовнішнього періодичного збурення. В основу досліджень покладено принцип одночастотності коливань у нелінійних системах із багатьма ступенями вільності та розподіленими параметрами, узагальнення (на основі застосування Ateb-функції) методу Ван-дер-Поля на деякі класи диференціальних рівнянь з частинними похідними.

It is developed method of research of oscillations of the onedimensional homogeneous nonlinearly elastic mediums which are characterized by longitudinal (rotational) motion and give in to act of exterior periodic perturbation. In a basis of researches it is necessary a principle of one-rate of oscillations in nonlinear systems with a lump of degree of freedom and the distributed parameters; generalization (on the basis of application of Ateb-functions) a method Van-der-Pole on some class-rooms of the differential equations with partial derivatives.

Актуальність тематичних досліджень. Динамічні процеси, які відбуваються в одновимірних системах, що характеризуються поздовжнім (обертальним) рухом, досліджували у випадку квазілінійних їх моделей [1–3]. Сильно нелінійні моделі вказаних динамічних систем за малих швидкостей їх руху розглядались у [4, 5]. Проте такі важливі з практичного боку питання, як вплив різного виду періодичних сил (збурень) на динаміку процесу, в останніх роботах не розглядались. Розв’язання деяких найпростіших задач цієї складної проблеми є предметом досліджень цієї роботи.

Постановка задачі і методика розв’язування. Відомо, що математичною моделлю динамічних процесів, які зустрічаються у сильно нелінійних системах, які характеризуються поздовжнім (обертальним) рухом, є диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2V\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varepsilon f_1\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\mu t\right), \qquad (1)$$

де $u(x,t)$ – переміщення (лінійне чи кутове) перерізу середовища з координатою x в довільний момент часу t; α, μ, ε, V, ν – сталі (μ – частота зовнішнього періодичного збурення, яке діє на середовище, V – швидкість його руху, $\nu+1=\frac{2m+1}{2n+1}$, $m,n=0,1,2,\ldots$); $f_1\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\mu t\right)$ – відома аналітична 2π-періодична по μt функція. Вона враховує дію на середовище періодичного збурення, відхилення пружних властивостей середовища від степеневого закону, а також сили опору, дисипативні сили тощо. Зауважимо, що диференціальне рівняння (1) також з достатнім ступенем точності відображає динамічні процеси рухомого середовища, матеріал якого задовольняє квазілінійному закону пружності ($\nu=0$) у разі немалих його коливань.

Для диференціального рівняння (1) розглядатимемо найпростіший вигляд крайової умови

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=l} = 0; \tag{2}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u_x(x,t)\big|_{x=l} = 0 \tag{3}$$

або

$$u_x(x,t)\big|_{x=0} = u_x(x,t)\big|_{x=l} = 0. \tag{4}$$

Легко переконатись, що навіть для побудови розв'язків крайових задач для незбуреного ($\varepsilon = 0$) рівняння (1), не можна застосувати такі класичні методи, як методи Фур'є чи Д'Аламбера [6]. Тому дещо обмежимо клас прикладних задач, для яких будуть отримані основні результати, а саме: швидкість руху середовища є невеликою. Останнє дає змогу для побудови розв'язків однорідних крайових задач для рівняння (1) використати загальну ідею методів збурень [7], зокрема узагальнити для збурених крайових задач метод Ван-дер-Поля. Відповідно до цього, необхідно побудувати розв'язки незбуреної крайової задачі, тобто розв'язки рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{5}$$

за крайових умов (2), (3) чи (4).

У [8] показано, що одночастоні розв'язки нелінійного диференціального рівняння, які задовольняють крайові умови (2), (3) чи (4), виражаються [9, 10] через спеціальні періодичні Ateb-функції у вигляді

$$u(x,t) = aca\left(\nu+1, 1, \omega(a)t + \theta\right) \begin{cases} sa\left(1, \dfrac{1}{\nu+1}, \dfrac{k\Pi_x}{l}x\right) \\ sa\left(1, \dfrac{1}{\nu+1}, \dfrac{(2k+1)\Pi_x}{2l}x\right), \\ ca\left(1, \dfrac{1}{\nu+1}, \dfrac{k\Pi_x}{l}x\right), \end{cases} \tag{6}$$

де a, θ – сталі (амплітуда та початкова фаза одночастотного процесу), а функція $\omega(a)$ набере вигляду

$$\omega(a) = \alpha \left(\frac{s\Pi_x}{l}\right)^{1-\frac{\nu}{2}} a^{\frac{\nu}{2}} . \tag{7}$$

Зазначимо, що s у залежності (7) набуває значення k для крайових умов (2) і (4), та $\frac{2k+1}{2}$ – для крайових умов (3); $\Pi_x = \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu+1}{\nu+2}\right)$ – півперіод використаних періодичних Ateb-функцій, які описують форму коливань; $\Gamma(\ldots)$ – гамма-функція відповідного аргументу.

Маючи множину одночастотних розв'язків крайових задач для незбуреного рівняння, перейдемо до розгляду збурених їх аналогів. Відомо, що наявність нелінійних сил у системі приводить до зміни в часі амплітуди і частоти коливань. Тому, відповідно до методу Ван-дер-Поля [11], трактуючи співвідношення (6) як розв'язок збурених крайових задач, необхідно вже у них вважати, що $a = a(t)$ і $\theta = \theta(t)$.

Примітка. Наведене вище справедливо для так званих „коротких" одновимірних систем, в протилежному випадку амплітуда і фаза коливань є функціями обидвох незалежних змінних. Цей, складніший із математичного погляду випадок, може бути предметом окремих досліджень.

Отже, приймаючи за розв'язок збурених крайових задач співвідношення

$$u(x,t) = a(t)X(x)ca\big(\nu+1,1,\omega(a(t))t+\theta(t)\big), \tag{8}$$

в якому $X(x)$ – відомі функції, що виражають форму коливань середовища і виражаються відповідно до правих частин залежностей (6).

Для знаходження закону зміни в часі параметрів a і θ отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\dot{a} = \frac{sa(1,\nu+1,\psi)X(x)f_1^{**}(a,\psi,x,\mu t)}{\omega P},\\ \dot{\theta} = \varepsilon\frac{(\nu+2)ca(\nu+1,1,\psi)X_k(x)f_1^{**}(a,\psi,x,\mu t)}{2a\omega \mathrm{P}},\end{gathered} \tag{9}$$

де

$$f_1^{**}(a,\psi,x,\varphi) = \left\langle -\varepsilon f_1(u_x,u_t,u_{xt},u_{xx},\varphi) + 2Vu_{xt} + V^2u_{xx}\right\rangle\Bigg|_{\substack{u=aX(x)ca(\nu+1,1,\psi),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ u_{xx}=aX''(x)ca(\nu+1,1,\psi)}},\ \psi = \omega(a)t+\theta,\ \varphi = \mu t,$$

$$P = \int_0^l X^2(x)dx .$$

З врахуванням того, що середовище піддається дії зовнішнього періодичного збурення, а головні одночастотні коливання незбуреного середовища $2\Pi_T = \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)$ – періодичні по ψ, для системи диференціальних рівнянь (9) розглядатимемо два випадки: нерезонансний ($n\omega(a) \neq m\frac{\Pi_T}{\mu}\mu,\quad n,m = 1,21,3,...$) і резонансний ($n\omega(a) \approx m\frac{\Pi_T}{\mu}\mu$). Нижче зупинимось тільки на випадку головного резонансу, тобто на випадку $\omega(a) \approx \frac{\Pi_T}{\mu}\mu$. Уводячи у систему диференціальних рівнянь (9) „різницю фаз" власних і вимушених коливань $\gamma = \psi - \frac{\Pi_T}{\pi}\theta$, її після усереднення за повільно змінними аргументами замінюємо простішою:

$$\begin{gathered}\dot{a} = \varepsilon A(a,\gamma),\\ \dot{\gamma} = \omega(a) - \frac{\Pi_T}{\pi}\mu + \varepsilon B(a,\gamma) - \frac{b}{\omega(a)}V^2,\end{gathered} \tag{10}$$

де

$$A(a,\gamma) = \frac{-1}{2\Pi_T P\omega}\int_0^{2\Pi_t}\int_0^l X(x)f_1\left(aXca\left(\nu+1,1,\gamma+\frac{\Pi_T}{\pi}\theta\right),...,aX''ca\left(\nu+1,1,\gamma+\frac{\Pi_T}{\pi}\theta\right),\theta\right)sa\left(1,\nu+1,\gamma+\frac{\Pi_T}{\pi}\theta\right)dxd\theta;$$

$$B(a,\gamma) = -\frac{\nu+2}{4\Pi_T Pa\omega}\int_0^{2\Pi_t}\int_0^l X(x)f_1\left(aXca\left(\nu+1,1,\gamma+\frac{\Pi_T}{\pi}\theta\right),...,aX''ca\left(\nu+1,1,\gamma+\frac{\Pi_T}{\pi}\theta\right),\theta\right)ca\left(\nu+1,1,\gamma+\frac{\Pi_T}{\pi}\theta\right)dxd\theta,$$

$$b = \frac{s\pi}{2l}\frac{\nu+4}{\nu+2}\Gamma^2\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2}+\frac{\nu+1}{\nu+2}\right).$$

Що стосується нерезонансного випадку, для якого амплітуда коливань не залежить значно від "різниці фаз" власних і вимушених коливань, вихідну систему диференціальних рівнянь з достатньою для практичних цілей точністю можна замінити:

$$\dot{a} = \frac{-\varepsilon}{4\pi\Pi_T P\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\Pi_t} \int_0^{l} X(x) f_1\big(aXca(\nu+1,1,\psi),...,aX''ca(\nu+1,1,\psi),\theta\big) sa(1,\nu+1,\psi)\, dx d\psi d\theta; \tag{11}$$

$$\dot{\psi} = \omega(a) - -\frac{b}{\omega(a)} V^2 - \varepsilon \frac{\nu+2}{8\pi\Pi_T Pa\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\Pi_t} \int_0^{l} X(x) f_1\big(aXca(\nu+1,1,\psi),...,aX''ca(\nu+1,1,\psi),\theta\big) ca(\nu+1,1,\psi)\, dx d\psi d\theta .$$

Як приклад розглянемо коливання рухомого нелінійно пружного середовища під дією гармонічного збурення, тобто, коли

$$\varepsilon f_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \mu t\right) = \varepsilon f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \varepsilon E \sin \mu t ,$$

де $f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ – відомий поліном; E – стала.

Відповідно до залежностей (10), співвідношення, які визначають закони зміни амплітуди і “різниці фаз” коливань у вказаному випадку наберуть вигляду

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{-\varepsilon}{2\Pi_T P\omega} \int_0^{2\Pi_t} \int_0^{l} X(x) f\big(aXca(\nu+1,1,\psi),...,aX''ca(\nu+1,1,\psi)\big) sa(1,\nu+1,\psi)\, dx d\psi + \frac{\varepsilon E'}{\omega(a)} \cos\theta; \\ \dot{\gamma} &= \omega(a) - \frac{\Pi_T}{\pi}\mu + -\frac{b}{\omega(a)} V^2 - \\ &- \frac{\nu+2}{4\Pi_T Pa\omega} \int_0^{2\Pi_t} \int_0^{l} X(x)\big(aXca(\nu+1,1,\psi),...,aX''ca(\nu+1,1,\psi)\big) ca(\nu+1,1,\psi)\, dx d\psi + \frac{\varepsilon E^*}{a\omega(a)} \sin\theta, \end{aligned} \tag{12}$$

де E', E^* – сталі.

Отримані залежності дають змогу знайти стаціонарні значення амплітуди і “різниці фаз” коливань середовища. Для цього потрібно прирівняти до нуля праві частини диференціальних рівнянь (12).

Необхідно відзначити, як окремі випадки при $\nu = 0$ отримують результати, які стосуються коливань квазілінійного рухомого середовища, а при $\nu = 0$ і $V = 0$ – вони збігаються, наприклад, із результатами, отриманими в [12].

1. Мартинців М.П., Сокіл Б.І., Сокіл М.Б. Хвильові процеси в однорідних нелінійно-пружних одновимірних системах і методи їх дослідження // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – Львів: УкрДЛТУ, 2003. – Вип. 28. – С.81–89. 2. Боженко М.В., Сліпчук А.М. Вплив поздовжнього руху на нелінійні коливанння пружних одновимірних систем // Вісник НУ “Львівська політехніка” “Динаміка, міцність та проектування машин і приладів”. – 2004. – № 509. – С.25–28. 3. Харченко Є.В., Сокіл М.Б. Коливання рухомих нелінійно-пружних середовищ і асимптотичний метод в їх дослідженні // Зб. наук.-техн. праць. – Львів: НЛТУУ. – 2006. – Вип. 16.1. – С.134–138. 4. Сокіл Б.І., Ліщинська Х.І. Періодичні Ateb-функції у дослідженні коливань нелінійно рухомих середовищ // Зб. наук.-техн. праць. – Львів: НЛТУУ. – 2005. – Вип. 15.4. – С.96–101. 5. Ліщинська Х.І. Застосування Ateb-функцій для дослідження нелінійних коливань одновимірних систем // Вісник Хмельницького нац. ун-ту. – 2006. – № 4. 6. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с. 7. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с. 8. Сокіл Б.І. Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ // Доп. НАН України. – 1997. – №1. – С. 55–58. 9. Сеник П.М. Про Ateb-функції // Доп. АН УРСР. – 1968. – №1. – С. 23–26. 10. Сеник П. М. Обернення неповної Beta-функції // Укр. мат. журн. – 1969. – 21, №3. – С. 325–333. 11. Wan der Pol. A Teory of the Amplutude of Free and Forced Triode Vibrations // Radio Review. – 1920. – № 1. 12. Митропольский Ю.А, Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища шк., 1976. – 592 с.