

### Выводы

1. Получена АЧХ нормированного вида (7) в функции обобщенных параметров  $\gamma, K_o, \xi_d$ , характеризующих электрическую и механическую подсистемы ЭМС для анализа вынужденных колебаний в электроприводе вибровозбудителей.

2. В результате анализа нормированной АЧХ получены формулы (10), (11), (12) рационального и оптимального соотношения обобщенных параметров, обеспечивающих выбор параметров ЭМС с высоким демпфированием вынужденных колебаний и требуемым быстродействием.

3. Метод анализа параметров АЧХ электроприводов вибровозбудителей прост, доступен и рекомендуется для практического применения на этапах проектирования ЭМС, описываемых двухмассовой расчетной схемой.

1. Дрыга А.И. Оборудование для вибростабилизирующей обработки корпусных деталей // Энергомашиностроение. – 1987. – №7. – С.41–44. 2. Дрыга А.И. Виброкомплекс ВК\_86.НЗЛ для стабилизирующей обработки крупных сварных конструкций // Сварочное производство. – 1989. – №3. – С.28–30. 3. Марголин П.М. Вынужденные колебания в вентильных электроприводах с упругими механическими связями // Электротехника. – 1978. – №7. – С.11–14. 4. Земляков В.Д., Задорожний Н.А. О демпфировании электроприводом постоянного тока упругих электромеханических колебаний // Изв. вузов. Электротехника. – 1984. – №5. – С.92–98. 5. Бургин Б.Ш. Анализ амплитудной частотной характеристики электропривода с упругой связью при вариации параметров электромеханической системы // Электричество. – 1968. – №10. С.33–36. 6. Задорожний Н.А., Дрыга А.И., Беш А.Н., Задорожня И.Н. Электромеханические виброкомплексы с системами стабилизации режимов резонансности // Вестник Национальный технический университет «ХПИ», вып.:45, Харьков. – 2005. – С.321–323.

УДК 621.432.4

О.І. ЗАЙЦЕВ, В.М. ШАТОХІН\*, А.М. ЧЕРНОВ

Національний фармацевтичний університет, м. Харків,

\*Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”, м. Харків

## МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ВІБРАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ АПАРАТАХ З ІНЕРЦІЙНИМ САМОЦЕНТРУВАЛЬНИМ ВІБРАТОРОМ ТА АСИНХРОННИМ ЕЛЕКТРОДВИГУНОМ

© Зайцев О.І., Шатохін В.М., Чернов А.М., 2006

*Розроблено комплексну математичну модель одного класу вібраційних технологічних пристроїв з інерційним самоцентрувальним вібратором і асинхронним електродвигуном. Модель дає змогу вибирати електродвигун, визначати характер руху робочої камери, зусилля в підшипниках, тиск на підставу, вирішувати різні задачі синтезу. Подано результати досліджень для апарата конкретного типорозміру.*

*Complex mathematical model of one class of technological vibrating devices with inertial self-centering vibrator and anisochronous electric motor is developed. Model allows choosing an electric motor, defining effective box motions, energies in bearings, base pressure, solving synthesis problems. Effort results for concrete dimension-type device are introduced.*

**Вступ.** Перспективним напрямком інтенсифікації багатьох технологічних процесів у хімічній промисловості, фармацевтичному виробництві є використання низькочастотних вібрацій, реалізація

яких може бути здійснена у поліфункціональних і спеціалізованих вібраційних пристроях різного обсягу [1, 2]. Хоча конструкції зазначених механізмів нескладні, достовірне описання параметрів їхніх рухів становить певні труднощі. Через те, що станини пристроїв здійснюють коливальний рух, останні можуть бути визначені тільки за допомогою динамічного аналізу. У наш час математичні моделі вібраційних апаратів розроблені недостатньо. У роботі [3] отримані рівняння руху найпростішої моделі механізму на сталих режимах роботи й у припущенні, що робочий орган здійснює поступальний рух. Однак здебільшого умови поступального руху не виконуються і, крім того, характерними режимами роботи пристроїв є часті запуски і зупинки, що робить актуальними розрахунки перехідних процесів. Як приводний двигун використовується асинхронний електродвигун (АД) (найпростіший, дешевий і зручний в експлуатації), через це виникають додаткові труднощі, пов'язані з описанням його динамічної характеристики при перехідних режимах і навантаженні, що має коливальний характер. Використання лінеаризованих статичних характеристик [4] або лінеаризованих диференціальних рівнянь [5], що приблизно описують електромагнітні перехідні процеси в електродвигунах, призводить до істотного завищення розрахункового моменту в АД порівняно з експериментальним [6].

Відсутність достовірних математичних моделей ускладнює: вибір електродвигунів, що забезпечують запуск; визначення характеру коливань робочої камери, які істотно впливають на технологічний ефект; розв'язання різних задач синтезу; визначення оптимальних значень конструктивних параметрів, що зменшують передавання вібрацій на основу і забезпечують розвантаження підшипників; зниження матеріало- та енергоємності апаратів.

У статті отримана повна математична модель одного класу вібраційних апаратів з інерційним самоцентрувальним вібратором і асинхронним приводом, що дає змогу розв'язувати зазначені задачі. Сконструйовані за особистої участі авторів пристрої пройшли успішні випробування на базі фармацевтичної фірми "Здоров'я" (м. Харків).

**Кінетична енергія, узагальнені сили.** На рис. 1 показана схема апарата. Робоча камера пристрою (3) установлена на чотирьох вертикальних пружинах (6). У двох підшипниках, жорстко зв'язаних з камерою, розміщено коліно ексцентрикового ( $e$  – ексцентриситет) вала (ротора, 4), на якому укріплені дебаланси (5). Ротор зв'язаний гнучким валом (дюритом, 2) з валом електродвигуна (1).

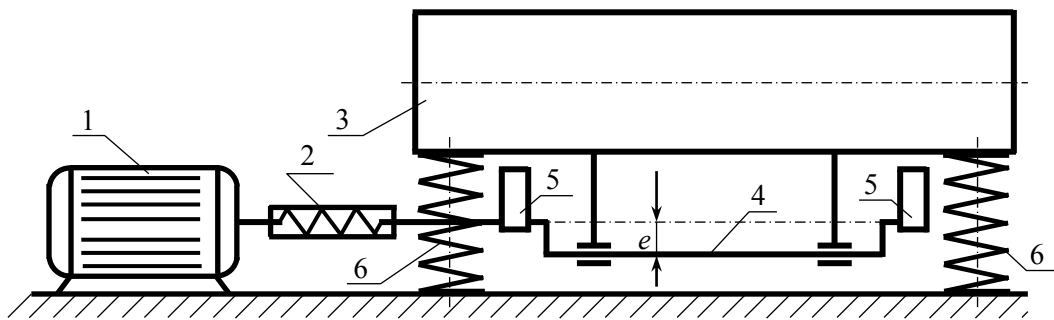


Рис. 1 Схема вібраційного пристрою

Рівняння руху запишемо, застосовуючи методику складання рівнянь Лагранжа другого роду. Скористаємося схемою механізму, зображеного на рис. 2 у поточному положенні. Показані:  $Ox$  – основна (нерухома) система координат, щодо якої робоча камера здійснює плоскопаралельний рух, причому її початок збігається з центром мас (точка  $C$ ) камери, коли остання перебуває в положенні статичної рівноваги (точки  $C$  і  $O$  збігаються);  $Sx''y''$  – рухома, що поступально переміщається, система координат;  $Sx'y'$  – рухома, жорстко зв'язана з тілом система координат;  $x, y$  – поточні значення координат центра мас робочої камери;  $\vartheta$  – кут повороту рухомої системи координат;

$x'_m, y'_m$  і  $x_m, y_m$  – координати центра мас (точка  $C_1$ ) ротора відповідно в рухомій і основній системах координат;  $\varphi$  – кут повороту ротора;  $r$  – відстань від осі ротора (точка  $O'_1$ ) до його центра мас;  $b$  – відстань від центра мас робочої камери до осі підшипників;  $a, b_1$  – параметри, що визначають положення точок кріплення верхніх кінців пружин; пружина  $O_1 O'_1$  моделює пружні властивості гнучкого вала (вісь електродвигуна проходить через точку  $O_1$ ; вісь ротора – через точку  $O'_1$ ). Крім того, надалі використані такі позначення:  $M$  – сумарна маса робочої камери й оброблюваного матеріалу;  $m$  – маса всіх обертових деталей ротора;  $J$  – момент інерції робочої камери щодо осі, яка проходить через центр мас  $C$ ;  $I$  – момент інерції ротора щодо осі, яка проходить через центр мас  $C_1$ ;  $J_e$  – момент інерції електродвигуна;  $H_0$  – довжина недеформованої пружини;  $k_x, k_y, k_\vartheta$  – жорсткості пружин відповідно на зсув, розтяг-стиск, поворот;  $\Delta_0 = (M + m)g / 4k_y$  – початкова деформація пружини;  $H = H_0 - \Delta_0$  – довжина статично деформованої пружини;  $k$  – жорсткість гнучкого вала на кручення;  $k_r$  – згинальна жорсткість гнучкого вала.

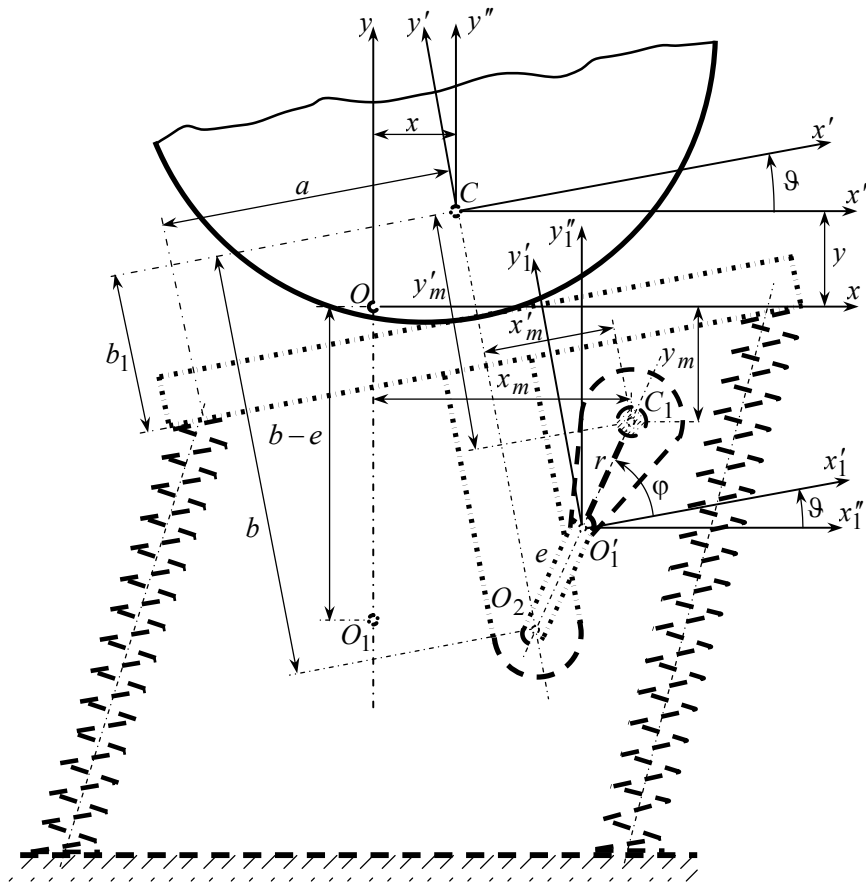


Рис. 2 Розрахункова схема вібраційного механізму

Узагальненими координатами розглянутої системи є: кути повороту ротора електродвигуна і ротора механізму – відповідно  $\psi$  і  $\varphi$ ; декартові координати  $x$  і  $y$ , що визначають положення центра мас робочої камери щодо нерухомої системи координат  $Oxy$ ; кут повороту камери  $\vartheta$ .

Запишемо вираз для кінетичної енергії тіл, що утворюють систему. Кінетична енергія робочої камери

$$T_1 = M \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + J \frac{\dot{\vartheta}^2}{2}. \quad (1)$$

Кінетична енергія ротора

$$T_2 = m \frac{v_m^2}{2} + I \frac{\omega_m^2}{2}, \quad (2)$$

де  $v_m$ ,  $\omega_m$  – абсолютні швидкість центра мас і кутова швидкість ротора, причому

$$\omega_m = \dot{\varphi} + \dot{\vartheta}. \quad (3)$$

Координати центра мас ротора впливають з формул перетворення координат при плоскопаралельному русі (див. рис. 2):

$$\left. \begin{aligned} x_m &= x_{C_1} = x + (e+r)\cos\varphi\cos\vartheta - (e+r)\sin\varphi\sin\vartheta + b\sin\vartheta, \\ y_m &= y_{C_1} = y + (e+r)\cos\varphi\sin\vartheta + (e+r)\sin\varphi\cos\vartheta - b\cos\vartheta. \end{aligned} \right\}$$

Звідси

$$\begin{aligned} v_m^2 &= \dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (e+r)^2 (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2 + b^2 \dot{\vartheta}^2 - \\ &- 2(e+r)(\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})[\dot{x}\sin(\varphi + \vartheta) - \dot{y}\cos(\varphi + \vartheta)] + 2b(\dot{x}\cos\vartheta + \dot{y}\sin\vartheta)\dot{\vartheta} - 2(e+r)b\sin\varphi(\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})\dot{\vartheta}, \end{aligned} \quad (4)$$

а формула (2) з урахуванням виражень (3) і (4) набуває вигляду

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}[m(e+r)^2 + I](\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2 + \frac{1}{2}mb^2\dot{\vartheta}^2 - \\ &- m(e+r)(\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})[\dot{x}\sin(\varphi + \vartheta) - \dot{y}\cos(\varphi + \vartheta)] + mb(\dot{x}\cos\vartheta + \dot{y}\sin\vartheta)\dot{\vartheta} - m(e+r)b\sin\varphi(\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})\dot{\vartheta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Кінетична енергія ротора електродвигуна

$$T_3 = J_e \frac{\dot{\psi}^2}{2}. \quad (6)$$

Приймаючи, що при русі системи зміни координат  $x, y, \vartheta$  поблизу положення стійкої рівноваги ( $x = y = \vartheta = 0$ ) малі, а, отже,  $\sin(\varphi + \vartheta) \approx \sin\varphi$ ,  $\cos(\varphi + \vartheta) \approx \cos\varphi$ , повну кінетичну енергію подамо приблизно з урахуванням (1), (5), (6) у вигляді

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\{J + m[(e+r)^2 + b^2 - 2(e+r)b\sin\varphi] + I\}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}[m(e+r)^2 + I]\dot{\varphi}^2 + \\ &+ \frac{1}{2}J_e\dot{\psi}^2 - m[(e+r)\sin\varphi - b]\dot{x}\dot{\vartheta} + m(e+r)\cos\varphi\dot{y}\dot{\vartheta} - m(e+r)\sin\varphi\dot{x}\dot{\varphi} + \\ &+ m(e+r)\cos\varphi\dot{y}\dot{\varphi} + \{I + m(e+r)[(e+r) - b\sin\varphi]\}\dot{\vartheta}\dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (7)$$

Потенційна енергія системи складається з енергії положення та енергії деформації пружних зв'язків.

Потенційна енергія сил ваги

$$\Pi_1 = (M+m)gy + mg[b(1 - \cos\vartheta) - (e+r)(1 - \sin(\varphi + \vartheta))]. \quad (8)$$

Потенційна енергія розтягу-стиску чотирьох пружин

$$\Pi_2 = 2\frac{k_y}{2}(\Delta_1^2 - \Delta_0^2) + 2\frac{k_y}{2}(\Delta_2^2 - \Delta_0^2), \quad (9)$$

де  $\Delta_1, \Delta_2$  – відповідно деформації лівої та правої пружин в поточному положенні.

Попередньо визначалися координати верхніх кінців пружин та їхня поточна довжина. З урахуванням параметрів, уведених вище, і позначень (рис. 2) формула (9) набуває вигляду

$$\Pi_2 = 2k_y \left\{ x^2 + (H+y)^2 + 2[a^2 + b_1^2 + b_1(H+y)](1 - \cos \vartheta) + 2xb_1 \sin \vartheta - \right. \\ \left. - [\sqrt{h_1(x,y,\vartheta)} + \sqrt{h_2(x,y,\vartheta)}]H_0 + H_0^2 - \Delta_0^2 \right\}, \quad (10)$$

де  $h_1(x,y,\vartheta) = x^2 + (H+y)^2 + 2[a^2 + b_1^2 + xa + b_1(H+y)](1 - \cos \vartheta) + 2[xb_1 - a(H+y)]\sin \vartheta$ ,

$$h_2(x,y,\vartheta) = x^2 + (H+y)^2 + 2[a^2 + b_1^2 - xa + b_1(H+y)](1 - \cos \vartheta) + 2[xb_1 + a(H+y)]\sin \vartheta.$$

Фактично  $h_1$  і  $h_2$  являють собою квадрати довжин лівої і правої пружин для поточного положення механізму (див. рис. 2), тому для їхніх деформацій будуть справедливі формули:

$$\Delta_1 = \sqrt{h_1(x,y,\vartheta)} - H_0, \quad \Delta_2 = \sqrt{h_2(x,y,\vartheta)} - H_0.$$

Потенційна енергія зсуву для чотирьох пружин

$$\Pi_3 = 2\frac{k_x}{2}\Delta_{1x}^2 + 2\frac{k_x}{2}\Delta_{2x}^2, \quad (11)$$

де  $\Delta_{1x}$ ,  $\Delta_{2x}$  – зсуви в горизонтальному напрямку верхніх кінців відповідно лівої і правої пружин.

Цю енергію, аналогічно до попереднього, можна виразити через параметри поточного положення механізму

$$\Pi_3 = 2k_x \left[ (x + b_1 \sin \vartheta)^2 + a^2 (1 - \cos \vartheta)^2 \right]. \quad (12)$$

Потенційна енергія повороту для чотирьох пружин

$$\Pi_4 = 4\frac{k_\vartheta}{2}\vartheta^2 = 2k_\vartheta \vartheta^2. \quad (13)$$

Хоча внесок потенційної енергії гнучкого пружного вала при вигині у сумарне значення потенційної енергії системи з конструктивних міркувань не повинний бути істотним, доцільно мати відповідний вираз, який дозволяє одержати кількісну оцінку цього внеску:

$$\Pi_5 = \frac{k_r \Delta_r^2}{2}, \quad (14)$$

де  $\Delta_r$  – зсув осей валів електродвигуна і ротора.

Через поточні значення узагальнених координат вираз (14) запишеться так

$$\Pi_5 = \frac{k_r}{2} \left\{ x^2 + y^2 + 2 \left[ xb \sin \vartheta + xe \cos(\varphi + \vartheta) - y(e - b) - yb \cos \vartheta + \right. \right. \\ \left. \left. + ye \sin(\varphi + \vartheta) + b(e - b) \cos \vartheta - e(e - b) \sin(\varphi + \vartheta) - eb \sin \varphi + e^2 + b^2 - eb \right] \right\}. \quad (15)$$

Потенційна енергія кручення гнучкого пружного вала

$$\Pi_6 = \frac{1}{2} k (\varphi - \psi)^2. \quad (16)$$

Розкладаючи сумарну потенційну енергію системи

$$\Pi = \sum_{k=1}^6 \Pi_k \quad (17)$$

у ряд Маклорена поблизу положення статичної рівноваги і, отримуючи доданки не вище від другого порядку малості відносно перемінних  $x, y, \vartheta$ , для узагальнених сил одержимо такі вирази:

$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\left[ 4\left(k_x - \frac{\Delta_0}{H}k_y\right) + k_r \right]x - \left[ 4b_1\left(k_x - \frac{\Delta_0}{H}k_y\right) + k_r(b - e \sin \varphi) \right]\vartheta - k_r e \cos \varphi, \quad (18)$$

$$Q_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -(4k_y + k_r)y - k_r e \cos \varphi \vartheta + k_r e(1 - \sin \varphi), \quad (19)$$

$$Q_\vartheta = -\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} = -\left[ 4b_1\left(k_x - \frac{\Delta_0}{H}k_y\right) + k_r(b - e \sin \varphi) \right]x - k_r e \cos \varphi y - \left\{ mgb + 4k_y \left[ a^2 - b_1(b_1 + H)\frac{\Delta_0}{H} \right] + 4k_\vartheta - k_r(e - b)b + 4k_x b_1^2 - [mg(e + r) - k_r(e - b)e] \sin \varphi \right\} \vartheta - [mg(e + r) - k_r e(e - b)] \cos \varphi, \quad (20)$$

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = k_r e \sin \varphi x - k_r e \cos \varphi y + [mg(e + r) - k_r e(e - b)] \sin \varphi \vartheta - [mg(e + r) - k_r e^2] \cos \varphi - k(\varphi - \psi), \quad (21)$$

$$Q_\psi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = k(\varphi - \psi). \quad (22)$$

Коректне математичне описання сил опору є складним завданням, однак при дослідженні перехідних режимів і розрахунку вимушених зарезонансних коливань, характерних для розглянутих пристроїв, спочатку впливом сил опору можна нехтувати. Під час уточнених розрахунків враховували таке. Тому що для зазначених режимів має значення інтегральний ефект дії сил опору, для простоти описання узагальнені сили опору приймалися пропорційними до відповідних узагальнених швидкостей  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\vartheta}$ , тобто у вигляді  $Q_x^* = -\beta_x \dot{x}$ ,  $Q_y^* = -\beta_y \dot{y}$ ,  $Q_\vartheta^* = -\beta_\vartheta \dot{\vartheta}$ , демпфування ж на ділянці гнучкого вала – пропорційним до різниці відповідних узагальнених швидкостей, тобто у вигляді  $\beta_\gamma (\dot{\varphi} - \dot{\psi})$ . Момент опору  $M_d$  на роторі вібраційного пристрою цілком виправдано прийняти сталим.

**Динамічна характеристика асинхронного електродвигуна.** До ротора електродвигуна прикладений обертовий момент  $M_D$ , зумовлений динамічною характеристикою АД. Описання останньої, як сказано вище, для розглянутих пристроїв і режимів роботи становить непросту задачу. Виконаний аналіз дав змогу віддати перевагу підходу, запропонованому в роботі [7]. При складанні відповідного диференціального рівняння використовувалося допущення, яке полягає в нехтуванні активним опором статора порівняно з активним опором ротора. Як показали дослідження, розбіжність розрахункових і експериментальних моментів у такому разі становить не більш ніж 10 %. Характеристика має такий вигляд

$$T_D^2 \xi \ddot{M}_D + T_D \xi \left( 2 - \frac{T_D}{s} \dot{s} \right) \dot{M}_D + \left( 1 - \frac{T_D \xi}{s} \dot{s} \right) M_D = 2 \xi M_k \beta, \quad (23)$$

де  $M_D$  – момент, що розвивається двигуном у перехідному процесі;  $M_k$  – критичний момент двигуна;  $\xi = \frac{1}{1+\beta^2}$ ;  $\beta = \frac{\omega_0 - \dot{\psi}}{\omega_0}$  – відносне ковзання;  $\omega_0$  – кутова швидкість ідеального ходу;  $\dot{\psi}$  –

кутова швидкість електродвигуна в перехідному процесі;  $s = \omega_0 - \dot{\psi}$  – поточне ковзання;  $T_D = \frac{1}{\omega_c s_k}$  – електромагнітна постійна часу;  $\omega_c = 50 \cdot 2\pi$  – кругова частота напруги мережі,

$$s_k = \frac{s_n + \sqrt{s_n \frac{\mu_m - 1}{\mu_i - 1}}}{1 + \sqrt{s_n \frac{\mu_m - 1}{\mu_i - 1}}} - \text{критичне ковзання [8]; } s_n = \frac{\omega_0 - \omega_n}{\omega_0} - \text{номінальне ковзання; } \omega_n -$$

номінальна кутова швидкість;  $\mu_m = \frac{M_k}{M_n}$ ;  $\mu_u = \frac{M_s}{M_n}$ ;  $\mu_i = \frac{\mu_m}{\mu_u}$ ;  $M_n$ ,  $M_s$  – відповідно номінальний, пусковий моменти двигуна.

**Диференціальні рівняння руху вібраційного пристрою.** Для компактного запису рівнянь руху введемо позначення:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= M + m, \quad \alpha_2 = m(e+r), \quad \alpha_3 = m(e+r)^2 + I, \quad \alpha_4 = g\alpha_2, \quad \alpha_5 = b\alpha_2, \quad \alpha_6 = mb, \quad \delta = \Delta_0 / H, \\ \alpha_7 &= 4(k_x - \delta k_y), \quad \alpha_8 = \alpha_7 b_1, \quad \alpha_9 = 4k_y, \quad \alpha_{10} = J + \alpha_3 + mb^2, \quad \alpha_{11} = 2\alpha_5, \\ \alpha_{12} &= mgb + 4k_y [a^2 - b_1(b_1 + H)\delta] + 4k_9 + 4k_x b_1^2, \quad \alpha_{13} = k_r e, \quad \alpha_{14} = \alpha_{13} e, \quad \alpha_{15} = \alpha_4 - \alpha_{14}, \\ \alpha_{16} &= \alpha_{13}(e-b), \quad \alpha_{17} = \alpha_4 - \alpha_{16}, \quad \alpha_{18} = \alpha_7 + k_r, \quad \alpha_{19} = k_r b, \quad \alpha_{20} = \alpha_8 + \alpha_{19}, \quad \alpha_{21} = \alpha_9 + k_r, \\ \alpha_{22} &= k_r(e-b)b, \quad \alpha_{23} = \alpha_{12} - \alpha_{22}. \end{aligned}$$

Після виконання стандартних операцій із складання рівнянь Лагранжа другого роду з урахуванням динамічної характеристики АД, отримана така система спільних диференціальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\psi} &= f_\psi, \\ \alpha_3 \ddot{\varphi} - \alpha_2 \sin \varphi \ddot{x} + \alpha_2 \cos \varphi \ddot{y} + (\alpha_3 - \alpha_5 \sin \varphi) \ddot{\vartheta} &= f_\varphi, \\ -\alpha_2 \sin \varphi \ddot{\varphi} + \alpha_1 \ddot{x} + (\alpha_6 - \alpha_2 \sin \varphi) \ddot{\vartheta} &= f_x, \\ \alpha_2 \cos \varphi \ddot{\varphi} + \alpha_1 \ddot{y} + \alpha_2 \cos \varphi \ddot{\vartheta} &= f_y, \\ (\alpha_3 - \alpha_5 \sin \varphi) \ddot{\varphi} + (\alpha_6 - \alpha_2 \sin \varphi) \ddot{x} + \alpha_2 \cos \varphi \ddot{y} + (\alpha_{10} - \alpha_{11} \sin \varphi) \ddot{\vartheta} &= f_9, \\ \ddot{M}_D &= f_{M_D}, \end{aligned} \right\} (24)$$

$$\text{де } f_\psi = \frac{k}{J_e}(\varphi - \psi) + \frac{\beta \gamma}{J_e}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) + \frac{M_D}{J_e};$$

$$f_\varphi = \alpha_{13} \sin \varphi x - \alpha_{13} \cos \varphi y - \alpha_2 \left[ (\dot{x} + b\dot{\vartheta}) \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi \right] \dot{\vartheta} - \alpha_{15} \cos \varphi + \alpha_{17} \sin \varphi \vartheta - k(\varphi - \psi) - \beta \gamma (\dot{\varphi} - \dot{\psi}) - M_d;$$

$$f_x = \alpha_2 \cos \varphi (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}) \dot{\varphi} - \alpha_{18} x - (\alpha_{20} - \alpha_{13} \sin \varphi) \vartheta - \alpha_{13} \cos \varphi - \beta_x \dot{x};$$

$$f_y = \alpha_2 \sin \varphi (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}) \dot{\varphi} - \alpha_{21} y - \alpha_{13} \cos \varphi \vartheta + \alpha_{13} (1 - \sin \varphi) - \beta_y \dot{y};$$

$$f_9 = \alpha_5 \cos \varphi (\dot{\varphi} + 2\dot{\vartheta}) \dot{\varphi} + \alpha_2 (\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi) \dot{\varphi} - (\alpha_{20} - \alpha_{13} \sin \varphi) x -$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_{13} \cos \varphi y - (\alpha_{23} - \alpha_{17} \sin \varphi) \vartheta - \alpha_{17} \cos \varphi - \beta_{\vartheta} \dot{\vartheta}, \\
f_{M_D} = & -\omega_c s_k \left\{ 2 + \frac{[k(\varphi - \psi) + \beta_{\gamma} (\dot{\varphi} - \dot{\psi}) + M_D]}{\omega_c s_k (\omega_0 - \dot{\psi}) J_e} \right\} \dot{M}_D - \\
& - \left\{ \omega_c^2 s_k^2 \left[ 1 + \frac{(\omega_0 - \dot{\psi})^2}{\omega_0^2} \right] + \omega_c s_k \frac{[k(\varphi - \psi) + \beta_{\gamma} (\dot{\varphi} - \dot{\psi}) + M_D]}{(\omega_0 - \dot{\psi}) J_e} \right\} M_D + 2M_k \omega_c^2 s_k^2 \frac{(\omega_0 - \dot{\psi})}{\omega_0}.
\end{aligned}$$

Останнє рівняння системи (24) являє собою розв'язаний відносно  $\ddot{M}_D$  вираз (23) з урахуванням наведених вище формул для параметрів, причому в похідній за часом від поточного ковзання  $\dot{s}$  друга похідна від кута повороту ротора електродвигуна  $\dot{\psi}$  замінена відповідним виразом з першого рівняння зазначеної системи. Отже, перше й останнє рівняння цієї системи розв'язані щодо другої похідної однієї з перемінних. Однак інтегрування системи рівнянь (24) безпосередньо з використанням поширених алгоритмів числового інтегрування неможливе, тому що рівняння (2) – (5) цієї системи не розв'язані щодо другої похідної для кожної з узагальнених координат  $\varphi, x, y, \vartheta$ . Якби матриця, утворена з коефіцієнтів при других похідних від зазначених координат у лівій частині цих рівнянь,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_3 & -\alpha_2 \sin \varphi & \alpha_2 \cos \varphi & \alpha_3 - \alpha_5 \sin \varphi \\ -\alpha_2 \sin \varphi & \alpha_1 & 0 & \alpha_6 - \alpha_2 \sin \varphi \\ \alpha_2 \cos \varphi & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \cos \varphi \\ \alpha_3 - \alpha_5 \sin \varphi & \alpha_6 - \alpha_2 \sin \varphi & \alpha_2 \cos \varphi & \alpha_{10} - \alpha_{11} \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (25)$$

мала постійні елементи, то знаходження оберненої матриці  $\mathbf{A}^{-1}$ , а, отже, і надання рівнянь у формі, зручній для числового інтегрування, було б тривіальною задачею. Але елементи матриці є змінними, тому знаходження оберненої до неї становить собою трудомістку операцію, хоча матриця і має розмірність  $4 \times 4$ . Нині труднощі, що виникають, вдалося істотно знизити, а надійність результатів підвищити, використовуючи математичні пакети, що містять символічну математику. У роботі для цієї мети використовувався пакет MathCAD [9]. Тепер зазначені чотири рівняння, розв'язані відносно других похідних, будуть мати вигляд

$$\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}, \quad (26)$$

де  $\mathbf{z} = [\varphi, x, y, \vartheta]^T$ ,  $\mathbf{f} = [f_{\varphi}, f_x, f_y, f_{\vartheta}]^T$ .

Матриця  $\mathbf{A}^{-1}$  через її громіздкість тут не наводиться.

**Дослідження параметрів руху вібраційного пристрою.** Розроблена математична модель використовувалася для дослідження динамічних процесів у вібраційному апараті обсягом 200 літрів з такими параметрами:  $M = 300$  кг,  $m = 36,09$  кг,  $e = 0,0025$  м,  $r = 0,03345$  м,  $I = 0,06539$  кгм<sup>2</sup>,  $J = 9,375$  кгм<sup>2</sup>,  $a = 0,25$  м,  $b = 0,28$  м,  $b_1 = 0,18$  м,  $H_0 = 0,225$  м,  $k_x = 5,957 \cdot 10^4$  Н/м,  $k_y = 2,383 \cdot 10^4$  Н/м,  $k_{\vartheta} = 41,443$  Нм,  $k = 24,038$  Нм. Зсувна, подовжня і поворотна жорсткості пружин підраховані за формулами [10] для пружини з діаметром прутка  $d = 0,011$  м, середнім діаметром витка  $D = 0,08$  м, кількістю робочих витків  $i = 12$  і зазначеною вище висотою пружини  $H_0$  ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа). Жорсткість на кручення гнучкого вала отримана для порожнистого вала з зовнішнім і внутрішнім діаметрами відповідно  $D_d = 0,06$  м,  $d_d = 0,048$  м і



довжиною  $l_d = 0,25$  м ( $G_d = 8$  МПа – модуль зсуву матеріалу дюриту) [10]. Жорсткість на вигин зазначеного вала прийняли такою, що дорівнює нулю ( $k_r = 0$ ). Значення коефіцієнтів демпфування визначали за власними частотами вільних коливань парціальних систем у припущенні, що безрозмірний коефіцієнт демпфування  $\eta = 0,2$ . Були отримані значення:  $\beta_x = 3,447 \cdot 10^3$  кг/с;  $\beta_y = 2,264 \cdot 10^3$  кг/с,  $\beta_z = 138,5$  кгм<sup>2</sup>/с,  $\beta_\gamma = 0,238$  кгм<sup>2</sup>/с. Постійний момент опору на роторі вібраційного пристрою приймали таким, що дорівнює 5 % від номінального моменту  $M_n$  АД. При використанні двигуна 4A100L6Y3  $M_d = 1,107$  Нм. Каталожні параметри зазначеного АД [11]:  $N_n = 2,2$  кВт;  $n_0 = 1000$  мин<sup>-1</sup> (синхронна частота обертання);  $s_n = 0,051$ ;  $\mu_m = 2,2$ ;  $\mu_u = 1,2$ . Момент інерції ротора двигуна [12]  $J_e = 0,015$  кгм<sup>2</sup>.

Використано такі початкові умови:  $\psi(0) = \varphi(0) = \pi/2$ ,  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ ,  $M_D(0) = M_s$ ,  $\dot{\psi}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = \dot{M}_D(0) = 0$  (див. рис. 1, 2).

На рис. 3 подано залежності кутової швидкості вала електродвигуна від часу при запуску установки. Для значень параметрів  $b = 0,35$  м,  $b_1 = 0,25$  м запуск зазначеним двигуном є неможливим – кутова швидкість вала (крива 1) становить менш ніж 50 % від номінальної (лінія 4). Обумовлено це тим, що власна частота крутильних коливань робочої камери виявляється у такому разі порівняно високою (32,79 рад/с). Тому потужність двигуна витрачається, як правило, не на розгін, а на підтримку інтенсивних вимушених коливань, що і веде до його “зависання” [13]. Запуск за зазначених параметрів установки є можливим (крива 3), якщо використовувати наступний за потужністю двигун розглянутої серії 4A112MA6Y3 ( $N_n = 3$  кВт). Це, однак, можна реалізувати і за допомогою першого з наведених двигунів (крива 2), якщо тільки зменшити параметр  $a$ , що характеризує відстань між пружинами. Зменшується власна частота крутильних коливань камери за рахунок зниження відповідної еквівалентної жорсткості. Максимальне значення зазначеного параметра, при якому ще реалізується запуск  $a = 0,245$  м.

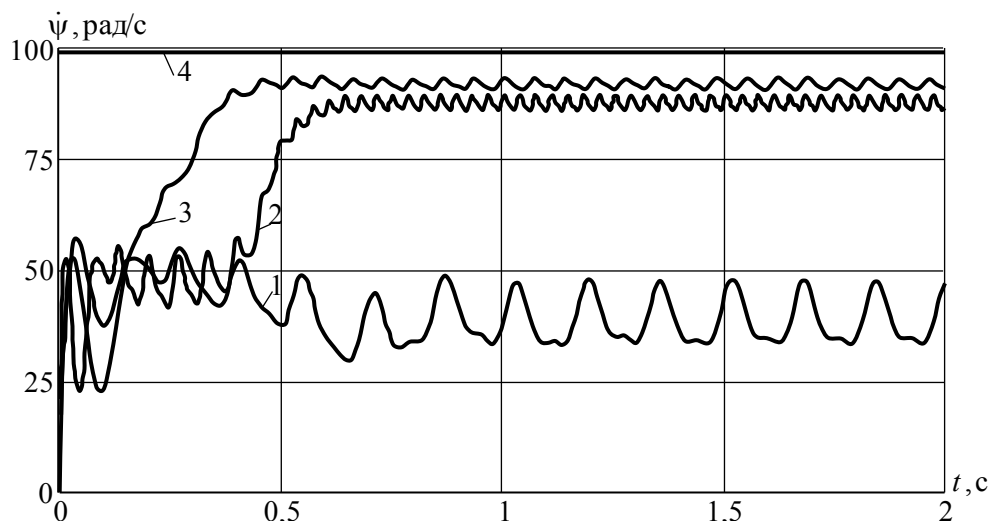


Рис. 3. Залежності кутової швидкості вала електродвигуна від часу при запуску

На рис. 4 показані закони руху характерних точок робочої камери на сталому режимі ( $b = 0,28$  м,  $b_1 = 0,18$  м). Прийнято таку нумерацію: 1 – центр мас; 2 – точка, що лежить на осі камери; 3 – щонайнижча точка вертикального діаметра; 4 і 5 – відповідно ліва і права точки

горизонтального діаметра (див. рис. 2). Рівняння кривих, після інтегрування диференціальних рівнянь, отримані з використанням формул перетворення координат

$$x_i = x + x'_i \cos \vartheta - y'_i \sin \vartheta,$$

$$y_i = y + x'_i \sin \vartheta + y'_i \cos \vartheta \quad (i = \overline{1,5}),$$

причому для зручності зіставлення графіки зображені без урахування зсуву. З рисунка видно, що поворотні коливання можуть істотно вплинути на характер руху точок робочої камери.

На рис. 5 у полярній системі координат відображений закон зміни сили тиску на підшипник (сталій режим роботи) залежно від кута повороту ротора  $\varphi$ . Відповідно до теореми про рух центра мас проекції зазначеної сили на координатні осі для одного підшипника мають вигляд

$$R_x = m\ddot{x}_m / 2, \quad R_y = (m\ddot{y}_m + mg) / 2,$$

а модуль

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

причому

$$\ddot{x}_m = \ddot{x} - (e+r) \left[ \cos(\varphi + \vartheta) (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2 + \sin(\varphi + \vartheta) (\ddot{\varphi} + \ddot{\vartheta}) \right] - b(\cos \vartheta \ddot{\vartheta} - \sin \vartheta \dot{\vartheta}^2),$$

$$\ddot{y}_m = \ddot{y} + (e+r) \left[ -\sin(\varphi + \vartheta) (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2 + \cos(\varphi + \vartheta) (\ddot{\varphi} + \ddot{\vartheta}) \right] + b(\cos \vartheta \dot{\vartheta}^2 + \sin \vartheta \ddot{\vartheta}).$$

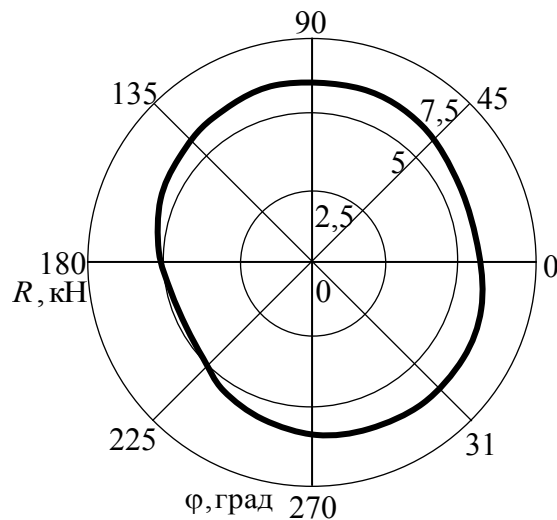


Рис. 5. Залежність тиску на підшипник від кута повороту ротора

Останні формули записані з урахуванням виразів для  $x_m$  і  $y_m$ , наведених вище. Максимальне зусилля для розглянутого варіанта конструкції досягає 6,081кН; статичне навантаження для порівняння становить лише 0,177кН.

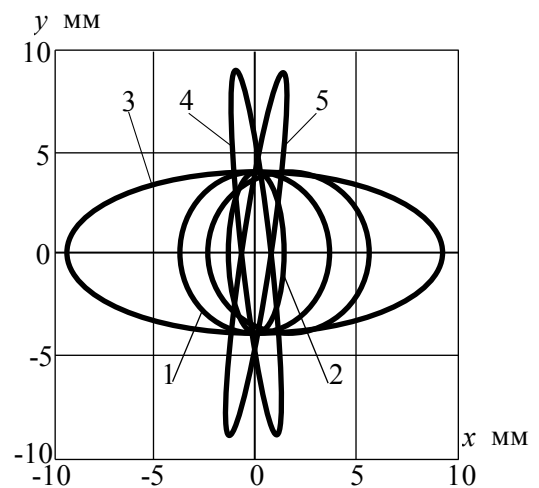


Рис. 4. Закони руху точок робочої камери

Сила тиску апарата на підставу (рис. 6) буде визначатися відповідно до формули

$$P = 2k_y (\Delta_1 + \Delta_2).$$

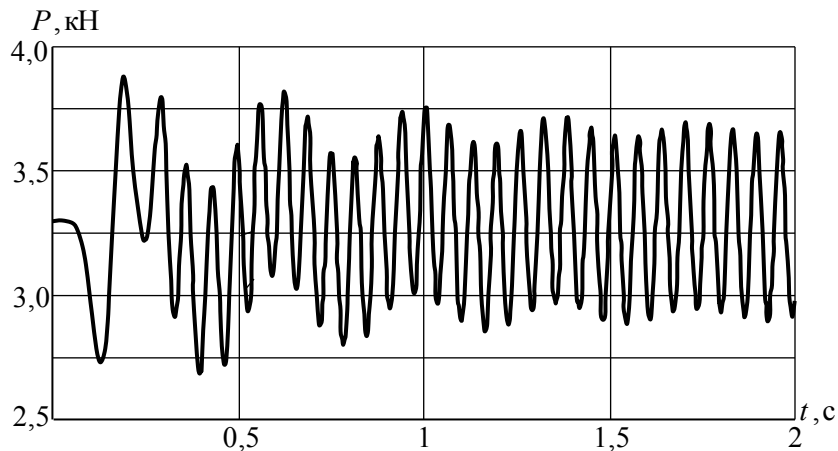


Рис. 6. Тиск на підставу при запуску апарата в залежності від часу

### Висновки

- 1) Розроблена комплексна математична модель вібраційних технологічних пристроїв з інерційним самоцентрувальним вібратором і асинхронним електродвигуном.
- 2) Рівняння руху робочого органа отримані без спрощувального припущення про поступальний його характер.
- 3) Вибрана динамічна характеристика асинхронного двигуна, що дає змогу адекватно описати запуск апарата за наявності навантаження коливального характеру.
- 4) Визначені параметри пристрою конкретного типорозміру, що забезпечують його запуск електродвигуном мінімальної потужності.
- 5) Установлена значна відмінність середньої кутової швидкості вала електродвигуна на сталих режимах від номінальної (до 12 %).
- 6) Досліджені рухи характерних точок робочої камери на сталому режимі.
- 7) Визначені навантаження, що діють на підшипники і підставку пристрою.
- 8) Розроблена модель має великі перспективи при розв'язанні різних задач синтезу й оптимізації механізмів розглянутого класу.

1. Чистовалов С.М., Мельников В.Д. Вибрационный комбинированный аппарат для малотоннажных производств химических реактивов и особо чистых веществ // *Химическая промышленность*. – 1990. – №6. – С. 357–358. 2. Чернов А.В., Чистовалов С.М. Застосування вібраційного впливу в апаратах хіміко-фармацевтичних виробництв // *Вісник фармації*. – Харків: НФаУ. – 1994. – №1-2. – С. 39-42. 3. Гончаревич И.Ф., Земсков В.Д., Корешков В.И. Вибрационные грохоты и конвейеры. – М., 1960. 4. Давыдов Б.Л., Скородумов Б.А. Статика и динамика машин. – М., 1967. 5. Вейц В.Л. Динамика машинных агрегатов. – Л., 1969. 6. Ривин Е.И. Динамика привода станков. – М., 1966. 7. Wenske W. Zur Ableitung der dynamischen Kennlinie des Asynchronmotors in Hinblick auf die Berechnung von Schwingungserscheinungen in Antriebsanlagen. // *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule O. Guericke. – Magdeburg.* – 1970. – jg.14. – Heft 5/6. – S. 517–523. 8. Карвовский Г.А., Огороков С.П. Справочник по асинхронным двигателям и пускорегулирующей аппаратуре. – М., 1969. 9. Херхагер М., Партоль Х. *Mathcad 2000: полное руководство*. – К., 2000. 10. *Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т.* – М. Т. 3. Колебание машин, конструкций и их элементов, 1980. 11. *Справочник по электрическим машинам: В 2 т.* – М. Т. 1, 1988. 12. Кокорев А.С. *Справочник молодого обмотчика электрических машин*. – М., 1985. 13. *Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т.* – М. Т. 4. Вибрационные процессы и машины, 1981.