

#### 4. Експериментальні результати

Для експериментів було використано тест Штейнберга з роботи [1]. Приклад залежності кількості перерізів графа на 34 вершини на п'ять частин від значення оптимізованої функції наведено на рис.8. Найкраще значення цільової функції сумарної довжини  $F = 10435$  отримано з допомогою макромодельовання та розміщення на коловій моделі однією спробою. Два інші результати фрагментації отримані різними алгоритмами розміщення ( $F = 12715$ ,  $F = 25258$ ). Відповідні значення сумарного перетину були наступними: 1140, 1554, 2097.

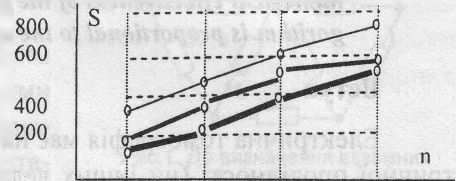


Рис.8. Складові перетину фрагментації графа на п'ять частин

#### Висновок

Реалізовані методи з використанням накладання макромоделей на колових моделях є корисними для розв'язування задач пакування та розміщення інтегральних схем. Отримані результати тестування вказують на можливість отримання компонент тим кращих розбиття та пакування, чим менше значення цільової функції задачі розміщення на колі.

1. Базилевич Р.П. Декомпозиционные и топологические методы автоматизированного конструирования электронных устройств. – Львів: Вища школа. – 1981. – 168 с.
2. Мельник Р.А. Алгоритмы иерархического моделирования пространственной та площинной топологии НВІС. – Львів: "Львівська політехніка", – 1999. – 180 с.
3. Мельник Р.А. Тривимірне пакування графів на основі накладання макромоделей// Відбір і обробка інформації. – 1998. – №12 (88). – С.124-129.
4. Мельник Р.А. Розбиття та пакування макромоделей на основі розміщення графів на лінійці // Теоретична електротехніка. – Львів, 2000. – № 55. – С.149-154

М. Дорожовець\*, А.Ковальчик\*\*, І.Петровська\*

\* Національний університет "Львівська політехніка",

\*\* Жешувська політехніка, Польща

УДК 621.317

## АЛГОРИТМ ШВИДКОГО РОЗРАХУНКУ ЯКОБІАНА ДЛЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ТОМОГРАФІЇ

© Дорожовець М., Ковальчик А., Петровська І., 2002

*Розроблено алгоритм безпосереднього розрахунку якобіана для оберненої задачі електричної томографії без методичних похибок за одне розв'язування прямої*

*задачі методом контурних струмів. Показано, що порівняно з традиційним, обчислювальна ефективність запропонованого алгоритму пропорційна до кількості елементів апроксимації.*

*Algorithm of the Jacobean matrix calculation for the electrical tomography inverse problem after single direct problem solution without methodical errors is proposed. The numerical effectiveness of the proposed algorithm comparatively with conventional algorithm is proportional to the approximating elements quantity.*

## Вступ

Електрична томографія має на меті знаходження просторового розподілу електричної провідності (чи інших величин) за результатами вимірювань електричних величин на поверхні об'єкта, які генеруються внаслідок електричного збудження об'єкта [1-3]. Внаслідок різного ступеня проникності струму збудження у внутрішні шари об'єкта однакові зміни провідності (опору) в різних просторових точках об'єкта спричиняють різні зміни вимірюваних величин на його поверхні. Тому залежності результатів вимірювань від значень провідності (опору) в різних просторових точках середовища є суттєво нелінійними і, як наслідок, обернена задача електричної томографії явно чи неявно описується системою нелінійних рівнянь [1-3]. Оскільки польову задачу електричної томографії зазвичай розв'язують на основі апроксимації методом скінченних елементів (МСЕ), то у такій системі кількість рівнянь дорівнює кількості незалежних результатів вимірювань  $n_m$ , причому в кожному рівнянні кількість невідомих дорівнює кількості апроксимаційних елементів  $n_e$ . Зауважимо, що задачу знаходження значень результатів вимірювань при відомому розподілі провідності (опору) об'єкта називають прямою задачею електричної томографії. Якщо ж задані результати вимірювань, то задача знаходження розподілу провідності (опору) називається оберненою задачею. В математичному плані, з урахуванням вище згаданої апроксимації, обернена задача електричної томографії зводиться до розв'язування системи нелінійних рівнянь. При цьому аналітичний опис цих рівнянь – залежностей результатів вимірювань від значень апроксимаційних елементів – переважно відсутній, але їх можна знайти числовим методом шляхом відповідного розв'язування прямої задачі. Тобто на практиці маємо справу з оберненою задачею, яка описується неявно заданою системою нелінійних рівнянь.

Для розв'язування таких систем використовуються ітераційні методи, які на кожній ітерації потребують обчислення матриць похідних, зокрема, Якобіана – у Ньютонівських методах, та градієнтів – в оптимізаційних методах [3,4]. Основною проблемою, яка стримує відтворення образів в реальному масштабі часу за допомогою простих комп'ютерних засобів, є значні обчислювальні затрати на знаходження Якобіана чи градієнта. Це пов'язано з тим, що в обох випадках розміри відповідних матриць, які дорівнюють добутку кількості рівнянь (кількість результатів вимірювань) на кількість апроксимаційних елементів, є дуже великими. Зокрема, вони можуть становити від десятків на десятки до тисяч на тисячі і більше. Оскільки кожен елемент вказаних матриць є похідною певного результату вимірювання за значенням відповідного апроксимаційного елемента, а аналітичні вирази рівнянь системи не задані, то для знаходження всіх членів матриці похідних пряму задачу електричної томографії необхідно

розв'язувати рівно стільки разів, скільки використано апроксимаційних елементів. Крім цього, обсяг прямої задачі також безпосередньо пов'язаний з кількістю апроксимаційних елементів.

## 2. Прямий спосіб обчислення Якобіана

У [5] показано, що типовим апроксимаційним схемам МСЕ (трикутними, прямокутними та іншими ділянками, з лінійною чи параболічною апроксимацією потенціалу) у відповідь завжди можна поставити аналогічну у всіх відношеннях заступну електричну схему з дискретних елементів (опорів чи провідників). На рис. 1 показаний фрагмент еквівалентної електричної схеми, яка відповідає апроксимації 8-ма трикутним скінченним елементам. Можна показати, що використовуючи до такої електричної схеми теорему варіацій [6],  $(ij)$ -й елемент матриці Якобі при зондуванні об'єкта в  $k$ -й позиції може бути обчисленим без методичної похибки апроксимації похідної за виразом

$$J_{ij(k)} = -I_0 g_{ij} g_{jk} R_i R_k. \quad (1)$$

де  $I_0$  - значення зондувального струму, що прикладений до зовнішньої вітки з номером  $k$ ;  $R_k, R_j, R_i$  - опори відповідних віток (перші два належать лише до зовнішніх віток);  $g_{ij} = I_i/E_j = I_j/E_i$ ;  $g_{jk} = I_j/E_k = I_k/E_j$ ;  $g_{ii} = I_i/E_i$ ;  $g_{kk} = I_k/E_k$  - взаємні та власні провідності відповідних віток [6] (тут  $I_{k(i,j)}$  - струми, та  $E_{k(i,j)}$  - е.р.с. відповідних віток (рис. 1).

Використовуючи наведені вище означення взаємних та власних провідностей віток, а також здійснюючи заміну джерела струму  $I_0$  на джерело е.р.с.  $E_k = I_0 R_k$  та  $E_i = I_0 R_i$  [6], отримаємо вираз для обчислення елемента матриці Якобі, що відповідає зміні опору  $j$ -го елемента при зондуванні об'єкта в  $k$ -й позиції та вимірюванні напруги у  $i$ -й позиції

$$J_{ij(k)} = -\frac{I_j(k)I_j(i)}{I_i(i)} = -\frac{I_j(k)I_j(i)}{I_0}, \quad (2)$$

## 3. Знаходження струмів у вітках

З аналізу (2) бачимо, що для знаходження повної матриці Якобі необхідно мати значення струмів  $I_j(k), I_j(i)$  всіх віток при зондуванні об'єкта з боку зовнішніх віток (з номерами  $i$  та  $k$ ), тому що лише зовнішня частина об'єкта є доступною для збудження та вимірювань. Хоча у (2) параметрами є струми у вітках, однак для їх знаходження доцільно скористатися методом вузлових потенціалів, оскільки кількість вузлів апроксимаційної схеми переважно є меншою за кількість елементів (контурів), що визначає обсяг обчислювальних затрат методу контурних струмів [6]. При цьому струми відповідних віток легко можна знайти, використовуючи провідності віток і знайшовши всі вузлові потенціали апроксимаційної схеми.

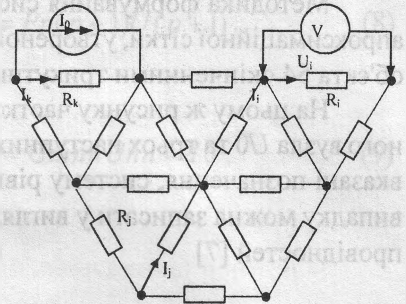


Рис. 1. До визначення взаємних провідностей між вітками дискретної схеми

Методика формування системи рівнянь методу вузлових потенціалів стосовно апроксимаційної сітки, утвореної з 90 резисторів, яка відповідає апроксимації круглого об'єкта 54 скінченними трикутними елементами, показано на рис.2.

На цьому ж рисунку частково показані відповідні вузлові потенціали центрального вузла  $U_0$  та трьох наступних контурів потенціалів  $U_1$ ,  $U_2$  та  $U_3$ . Використовуючи вказані позначення, систему рівнянь методу вузлових потенціалів [6,7] в загальному випадку можна записати у вигляді трьох діагональних симетричних блочних матриці провідностей [7]

$$\left. \begin{array}{ccccccc} U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U(n-1) & U_n & I \\ G_{00} & G_{10}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & = 0 \\ G_{10} & G_{11} & G_{21}^T & 0 & 0 & 0 & = 0 \\ 0 & G_{21} & G_{22} & G_{32}^T & \vdots & & = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & = 0 \\ 0 & 0 & & G(n-1)(n-2) & G(n-1)(n-1) & G_n(n-1)^T & = 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_n(n-1) & G_{nn} & = I_0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

Тут використані наступні позначення:  $G_{00}$ ,  $G_{11}$ ,  $G_{11}$ ,  $G_{21}$ ,  $G_{22}$ ,  $G_{32}$ , ...,  $G_n(n-1)$ ,  $G_{nn}$  - так звані блочні матриці провідностей, які сформовані відповідно до методу вузлових потенціалів і розміри яких відповідають кількості вузлів у контурі кожного апроксимаційного шару;  $I_0$  - матриця струмів збудження, що прикладаються до зовнішніх віток. На рис.2 використано всього 3 кругові шари апроксимаційних елементів, а загалом їх кількість становить  $n$ .

Розв'язки (вузлові потенціали) системи рівнянь (3) можна знайти методом послідовного виключення з наступною зворотною підстановкою. А саме, з першого рівняння знаходимо вектор потенціалів  $U_0$

$$U_0 = -G_{00}^{-1} G_{10}^T U_1 = P_{01} U_1, \quad \text{де } P_{01} = G_{00}^{-1} \cdot G_{10}^T, \quad (4)$$

і підставляємо його у наступне (друге) рівняння, після перегрупування якого отримуємо рівняння

$$(G_{11} - G_{10} P_{01}) U_1 + G_{21}^T U_2 = G_{m1} U_1 + G_{21}^T U_2 = 0, \quad (5)$$

де

$$G_{m1} = G_{11} - G_{10} \cdot P_{01}. \quad (6)$$

Аналогічно з (5) знаходимо перший вектор  $U_1$  вузлових потенціалів

$$U_1 = -G_{m1}^{-1} G_{21}^T U_2 = P_{12} U_2, \quad \text{де } P_{12} = G_{m1}^{-1} G_{21}^T. \quad (7)$$

Продовжуючи таку процедуру для поточного  $p$ -го вектора  $U_p$  вузлових потенціалів, отримаємо

$$U_p = -Gm p p^{-1} G(p+1) p^T U(p+1) = P p(p+1) U(p+1). \quad (8)$$

Нарешті для останнього рівняння маємо

$$(G_{nn} - G_n(n-1)P(n-1)n)U_{nn} = G_{mnn}U_{nn} = I_0, \quad (9)$$

де  $G_{mnn} = G_{nn} - G_n(n-1) \cdot P(n-1)n$ .

Звідси вектор зовнішнього контуру потенціалів

$$U_{nn} = G_{mnn}^{-1} I_0. \quad (10)$$

Решта векторів вузлових потенціалів знаходимо зворотною підстановкою, використовуючи вирази (4) - (9)

$$\begin{aligned} U(n-1) &= -P(n-1)n U_n; \dots; U(p-1) = -P(p-1)p U_p; \dots; \\ U_2 &= -P_2 U_3; \quad U_1 = -P_1 U_2; \quad U_0 = -P_0 U_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Використовуючи знайдені вектори (11), струми  $I_{j(k)}$  в кожній  $j$ -й вітці обчислимо як добуток різниці потенціалів  $U_{p_j(k)} - U_{q_j(k)}$  вузлів з номерами  $p$  та  $q$  (при збудженні об'єкта у  $k$ -й позиції) на провідність  $g_j$  цієї вітки, тобто

$$I_j(k) = [U_{p_j(k)} - U_{q_j(k)}] g_j. \quad (12)$$

Значення шуканих елементів матриці Якобі розраховуємо шляхом підстановки у (2) відповідних комбінацій вказаних струмів.

#### 4. Аналіз ефективності запропонованого алгоритму

Під ефективністю будемо розуміти відношення кількості операцій множення (ділення), які необхідно виконати для розрахунку Якобіана звичайним та запропонованим методами.

Позначимо кількість шарів регулярної апроксимації трикутними елементами круглого об'єкта як  $n$ . Тоді кількості вузлів ( $n_g$ ), віток (дискретних апроксимаційних елементів) ( $n_e$ ) та незалежних результатів вимірювань ( $n_m$ ) становлять відповідно

$$n_g = 3n(n+1) + 1; \quad n_e = 3n(3n+1); \quad n_m = 3n(6n-1). \quad (13)$$

На кожному кроці прямого ходу розв'язування матричної системи (3) (вирази (4)-(10)) для знаходження наступної модифікованої матриці необхідно виконувати однотипні операції:

- знаходження оберненої матриці

$$Gm p p^{-1}; \quad (14)$$

- обчислення матриці переходу

$$P p(p+1) = Gm p p^{-1} G(p+1) p^T; \quad (15)$$

- і добутку

$$Gm(p+1)(p+1) = G(p+1)(p+1) - G(p+1)pPp(p+1). \quad (16)$$

Кількості операцій виконання зазначених вище кроків для знаходження якобіана наведена у таблиці. При цьому враховано, що при регулярній апроксимації матричних блоки, які описують відповідні контури вузлових потенціалів, в напрямку від центра до поверхні мають наступні розміри:

- розміри центральних блоків ( $Gpp$ ), які розміщені вздовж головної діагоналі:  $1 \times 1$ ;  $6 \times 6$ ;  $12 \times 12$ ;  $18 \times 18 \dots 6(n-1) \times 6(n-1)$ ;  $(6n-1) \times (6n-1)$  є квадратними і симетричними (в останньому враховано, що один з вузлів зовнішнього контуру слід "заземлити", тобто надати йому нульовий потенціал);
- розміри бокових блоків ( $G(p+1)p$ ) -  $6 \times 1$ ;  $12 \times 6$ ;  $18 \times 12$ ; ...;  $(6n-1) \times 6(n-1)$  (перша цифра вказує на кількість рядків, а друга - на кількість стовпців) є прямокутними і містять у 6 рядках по 1 ненульовому елементу і  $6(p-1)$  рядках по 2 нульові елементи (де  $p$  - поточний номер контуру вузлів).

Необхідна кількість виконуваних операцій

Вид виконуваних дій	Кількість операцій
Обернені матриці (14)	$M_{об} = 36 \cdot (n+1)^2 n^2$
Матричні множення (17), (18)	$M_{mn} = 24n \cdot (n+1)^2$
Вузлові потенціали (11)	$M_{вн} = 6n^2(2n^2 - 1)$
Струми віток (12)	$M_l = 3n^2(3n+1)$
Коефіцієнти Якобіана (3)	$M_k = 9 \cdot n^2(6n-1)(3n+1)$
Сумарно запропонованим методом	$M_{\Sigma H} = M_{об} + M_{mn} + M_{вн} + M_k + M_l$ $M_{\Sigma H} \cong 216n^2 \cdot (n^2 + 0.6n + 0.3)$
Сумарно традиційним методом	$M_{\Sigma T} \cong 324n^4 \cdot (n^2 + 3n + 3)$

Завдяки симетрії діагональних матричних блоків для знаходження обернених модифікованих матриць (14) доцільно використати розклад Холезького, для якого кількість операцій становить  $M_{ci} = m^3/6$  (де  $m_i$  - розмір матриці) [4]. Нарешті, при виконанні множень (15), (16) врахована вищевказана

кількість ненульових елементів у відповідних рядках. Кількість операцій, необхідних для виконання окремих кроків алгоритму та розв'язування загалом, наведені у таблиці нижче.

При використанні традиційного методу знаходження Якобіана кількість розв'язувань прямої задачі (яка включає операції знаходження часткових обернених матриць  $M_{об}$  та множень  $M_{mn}$ ) дорівнює кількості апроксимаційних елементів  $n_e$ , тобто

$$M_{\Sigma T} = (M_{об} + M_{mn})n_e. \quad (17)$$

Аналізуючи наведені у таблиці значення, бачимо, що ефективність запропонованого алгоритму пропорційна до кількості апроксимаційних елементів

$$E = \frac{M_{\Sigma T}}{M_{\Sigma H}} \cong cn^2 \cong Cn_e, \quad (18)$$

(де  $s$  та  $C$  - є константами), оскільки кількість апроксимаційних елементів є пропорційною до квадрату кількості шарів ( $n^2$ ). Тобто ефективність алгоритму є високою.

Залежність ефективності від кількості елементів наведена на рис. 3.

Отже, запропонований алгоритм забезпечує розрахунок матриці Якобі задачі електричної томографії в процесі разового розв'язування прямої задачі, тобто значно швидше, ніж при використанні звичайних алгоритмів.

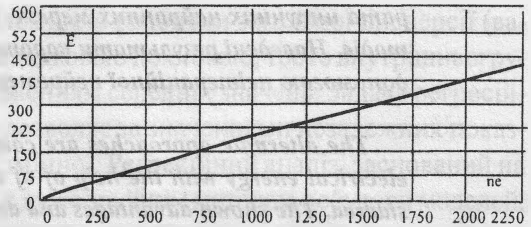


Рис. 3. Ефективність запропонованого алгоритму

1. Дорожовець М.М. Математичні проблеми реконструкції образів в технічній томографії// Вимірювальна техніка та метрологія. – 1998. – №.53. – С. 3-18.
2. Дорожовець М. Дослідження властивостей нелінійних залежностей, які описують обернену задачу електричної томографії// Вимірювальна техніка та метрологія. – 2001. – №.58. – С.16-19.
3. Sikora J. Algorytmy numeryczne w tomografii impedancyjnej i wiroprowadowej. - Warszawa: OWPW, 2000.- 212s.
4. Деннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной минимизации и решения нелинейных уравнений. - М.: Мир, 1988.-340 с.
5. Дорожовець М., Ковальчик А. Характеристична матриця трикутного скінченного елемента при лінійній апроксимації провідності та параболічній апроксимації потенціалу// Вісн. ДУ"Львівська політехніка". – 2001. – N408. – С.32-39.
6. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. М.: Высшая школа, 1961. – 792 с.
7. Дорожовець М.М. Порівняльний аналіз розв'язування задачі томографії електричної провідності методами вузлових потенціалів та контурних струмів// Відбір і передача інформації. – 2002. – №17. – С.47-52.

**Р. Ткаченко, О. Павлюк**

Національний університет "Львівська політехніка"

УДК 681.142.37

## ПІДХОДИ ДО ПРОГНОЗУ СПОЖИВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ В ЕНЕРГОПОСТАЧАЛЬНИХ КОМПАНІЯХ

© Ткаченко Р., Павлюк О., 2002

*Порівнюються альтернативні підходи до прогнозування споживання і втрат електричної енергії за допомогою статистичних методів та за допомогою ана-*