

напівпровідникових та радіоелектронних пристроїв”, 1995. № 289, – С. 32–36. 3. Захарія Й.А. Аналіз некоординатних площинних структур хвилевідних збуджувачів методом скінченних елементів / Вісник НУ “Львівська політехніка” Радіоелектроніка та телекомунікації, № 508. 2004. 4. Левин Л. Современная теория аолноаодов. –М.: Изд. Иностр. Лит., 1954. 5. Саркисьянц А. Распределение токов по периметру индуктивного штыря в волноводе/Радиотехника (М), т. 30, № 10, 1975. С 33-38. 6. Collin R.E. Field theory of guided waves. –New York, Toronto, london: McGrave Hill book company, 1960. P.591. 7. Otto D.V. Fourier transform method in cylindrical antenna theory/Radio science (New series), vol. 3, № 11, November 1968. P. 1050-1057. 8. Yehuda Leviatan, Der-Hua-Shau, Arlon T. Numerical study of the current distribution on a post in rectangular waveguide/IEEE Trans/ on Microwave iheory snd yechniques, vol. MTT- 32, № 10, October 1984. P. 1411-1415. 9. Williamson A.G. Coaxially feed hollow probe in rectangular waveguide/Proc. IEE № 10, H 132, August 1985. P/273-282.

УДК 517.958

В.М. Макар, О. М. Матвійків

Національний університет “Львівська політехніка”
кафедра САПР

h-АДАПТИВНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НА ОСНОВІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ. ЧАСТИНА 3: РЕЗУЛЬТАТИ МОДЕЛЮВАННЯ НА ПРИКЛАДІ ЗАДАЧІ ЛЯМЕ

© Макар В.М., Матвійків О.М., 2004

У роботі, яка є третьою, завершальною, частиною циклу статей, присвячених h -адаптивному моделюванню складних задач математичної фізики на основі методу скінченних елементів, наведені числові результати розв'язання задачі Ляме про визначення напружено-деформованого стану порожнистого циліндра, який знаходиться під дією рівномірного тиску на внутрішню поверхню, за допомогою повного h -адаптивного обчислювального процесу. Досліджено ефективність апостеріорної Z^2 -оцінки та необхідність побудови оптимальної сітки у сенсі рівномірного розподілу за елементами локальної похибки дискретизації. Зроблено висновки про ефективність розглянутих алгоритмів прогнозування діаметра сітки.

In the paper, which is the third part of series of papers devoted to the h -adaptive finite element simulation of complex problems, the results of numerical simulation of Lamé problem for circular hollow cylinder are obtained with use of full h -adaptive computational process. The efficiency of Z^2 a posteriori error estimator and necessity of the optimal mesh generation in terms of local error discretization uniform distribution are investigated. The reliability and robustness of the algorithms of element size prediction are proved by obtained numerical results.

Вступ. Ця стаття базується на результатах попередніх робіт авторів [1,2], в яких розроблено структуру h -адаптивного обчислювального процесу на основі методу скінченних елементів (МСЕ) та детально розглянуто всі його етапи, такі як побудова апостеріорних оцінок похибки, вироблення стратегії локального згущення скінченноелементної сітки, алгоритми прогнозування діаметра сітки та методи генерації адаптивних сіток зі змінним діаметром. Кінцевою метою запропонованої h -адаптивної схеми МСЕ є автоматизація отримання числового розв'язку заданої точності при мінімальному втручанні користувача в обчислювальний процес. Програмна реалізація побудованих

схем МСЕ здійснена для широкого класу задач, які описуються рівняннями статичної теорії пружності анізотропного тіла і які найчастіше формують основу математичного забезпечення різних систем автоматизованого проектування (САПР), що використовуються в механіці. Оцінка працездатності, точності та ефективності розробленої програмної системи проведена на багатьох модельних задачах. У цій роботі, яка є третьою і завершальною частиною циклу статей авторів, наводяться результати h-адаптивного моделювання на прикладі класичної задачі Ляме. На основі цих результатів здійснено також аналіз ефективності апостеріорної Z^2 -оцінки, доведена необхідність побудови оптимальної, в сенсі рівномірного розподілу похибки, сітки скінченних елементів та підтверджена, за допомогою числового експерименту, вірогідність гіпотез, покладених в основу запропонованої процедури прогнозування розмірів скінченних елементів.

Результати h-адаптивного моделювання. Розглянемо задачу Ляме про визначення напружено-деформівного стану довгого порожнистого циліндра з внутрішнім і зовнішнім радіусами R_1 і R_2 , відповідно. Циліндр знаходиться під дією рівномірного навантаження інтенсивності P на внутрішню поверхню (рис. 1). Задача Ляме є класичною задачею лінійної теорії пружності, її математичну постановку можна знайти практично в усіх підручниках з теорії пружності, наприклад, у роботі [3]. Одновимірність задачі (у даному випадку її розглядаємо в осесиметричній постановці) дозволяє позбутися залежності від співвідношення між параметрами скінченно-елементної сітки вздовж двох осей координат Or і Oz , здійснювати згущення сітки лише у радіальному напрямку, а також брати по висоті циліндра лише один скінченний елемент із заданням на торцях циліндра граничної умови $u_z = 0$. Усі нижче описані результати були отримані при таких значеннях наведених параметрів : $R_1 = 1.0$, $R_2 = 2.0$, модуль Юнга $E = 2.0$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$.

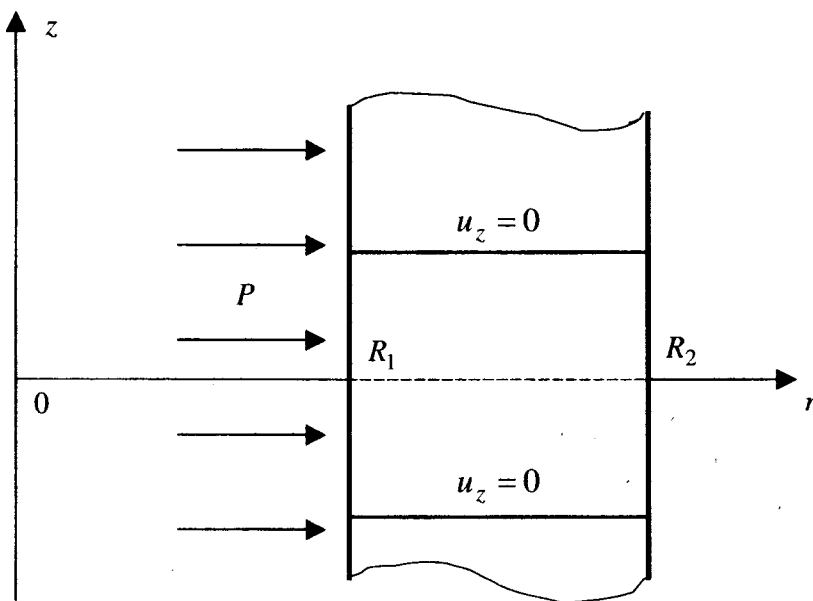


Рис. 1. Порожнистий циліндр під рівномірним навантаженням

Задача Ляме має точний розв'язок [3], що дозволяє дослідити ефективність Z^2 -оцінки. Ефективність оцінки визначається показником ефективності θ [2]:

$$\theta = \frac{\|\tilde{e}\|}{\|e\|}.$$

У табл. 1 наведено результати розрахунків, проведених на послідовності сіток, отриманих шляхом рівномірного згущення з використанням білінійних базисних функцій. Тут перша колонка – це значення абсолютної оціненої похибки, друга – точне значення абсолютної похибки, третя –

наближене значення відносної процентної похибки, четверта – точна відносна процентна похибка і п'ята колонка – значення показника ефективності Z^2 -оцінки.

Таблиця 1

Рівномірне розбиття

К-сть СЕ	$\ \tilde{e}\ $	$\ e\ $	$\tilde{\eta}$	η	θ
2	0.17865	0.22528	7.41378	9.20506	0.79
4	0.09999	0.11146	4.10284	4.55412	0.89
8	0.05304	0.05554	2.16945	2.26975	0.95
16	0.02709	0.02775	1.10693	1.13391	0.98

Як видно з табл. 1 показник ефективності θ прямує до одиниці, що добре узгоджується з априорною оцінкою, хоча спосіб побудови нової сітки шляхом рівномірного згущення попередньої є не ефективним. Це підтверджується результатами з табл. 2, в якій наведено розподіл похибки в енергетичній нормі по СЕ. Тут важливим є не абсолютне значення похибки, а характер її розподілу. З табл. 2 видно, що незважаючи на те, що отримано числовий розв'язок високої точності, сітка, на якій був отриманий цей розв'язок, не є оптимальною у сенсі рівномірного розподілу похибки. Так, різниця між похибками на першому та останньому елементах становить від 73% до 80%. У цій тестовій задачі це не має принципового значення, оскільки ця задача є, в певному сенсі, простою для числового розв'язування МСЕ. Однак вже в цьому найпростішому випадку спостерігається факт нерівномірного розподілу похибки, який у задачах з сингулярністю може призвести до такої ситуації: апроксимація МСЕ задовольняє заданий критерій точності, проте у місцях великого градієнту, а це, як правило, і є місця, де нас найбільше цікавить поведінка розв'язку, отримано результат незадовільної точності. Рівномірне згущення сітки навіть у випадках, коли вдається змінити якісну картину розподілу є занадто неефективним і дорогим у сенсі обчислювальних затрат. Ефективне вирішення цієї проблеми полягає у використанні h -адаптивного моделювання.

Таблиця 2

Розподіл похибки по елементах при рівномірному згущенні сітки

Номер елемента	Енергетична норма похибки			
	2	4	8	16
1	0.208089	0.088365	0.035154	0.013298
2	0.086335	0.053050	0.026580	0.011477
3		0.034792	0.020675	0.009986
4		0.024286	0.016457	0.008753
5			0.013354	0.007724
6			0.011013	0.006856
7			0.009209	0.006119
8			0.007794	0.005488
9				0.004945
10				0.004474
11				0.004063
12				0.003704
13				0.003387
14				0.003107
15				0.002859
16				0.002637

Розглянемо приклад розв'язування задачі Ляме на основі використання h -адаптивної версії МСЕ. Нехай задана максимально допустима відносна похибка $\eta_{\max} = 3\%$. У табл. 3 наведено результати розрахунків, проведених на послідовності сіток, отриманих за допомогою адаптивного розбиття. Колонки табл. 3 збігаються за своїм змістом з відповідними колонками табл. 2. Для порівняння, в останньому рядку табл. 3 наведені результати, одержані на рівномірній сітці з тією ж кількістю скінчених елементів, що і в остаточній сітці h -адаптивного процесу, необхідній для отримання числового розв'язку бажаної точності.

Таблиця 3

Адаптивне розбиття, $\eta_{\max} = 3\%$

К-сть СЕ	$\ \tilde{e}\ $	$\ e\ $	$\tilde{\eta}$	η	θ
2	0.17865	0.22528	7.41378	9.20506	0.79
4	0.09999	0.11146	4.10284	4.55412	0.89
6	0.06396	0.06651	2.61714	2.71749	0.96
6	0.06945	0.07413	2.84326	3.02895	0.94

Як видно з табл. 3, при одному і тому ж числі степенів свободи, похибка на адаптивній сітці на 10% менша за похибку на рівномірній сітці. Особливий інтерес у цьому прикладі становить порівняння розподілів похибки по елементах на адаптивній та рівномірних сітках, наведений у табл. 4, і розташування вузлів сіток в обох випадках, схематично зображене на рис. 2. Легко бачити, що максимальна різниця між похибками на різних елементах, у випадку адаптивної сітки становить 32%, у той час, як для рівномірної сітки – 76%.

У табл. 5, 6 та на рис. 3 наведені аналогічні результати при $\eta_{\max} = 2\%$.

Таблиця 4

Характер розподілу похибки на рівномірній та адаптивній сітках, $\eta_{\max} = 3\%$

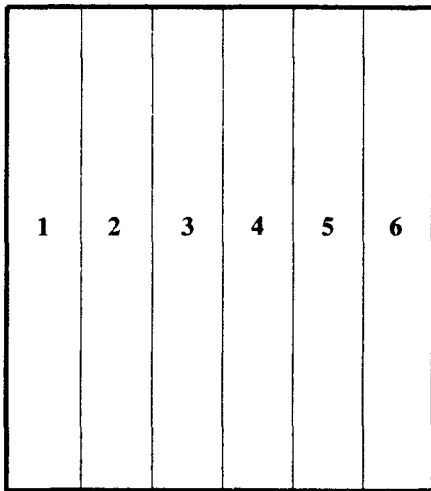
Номер СЕ	Енергетична норма похибки	
	Адаптивна сітка	Рівномірна сітка
1	0.03518	0.05191
2	0.02661	0.03618
3	0.02571	0.02641
4	0.02648	0.01998
5	0.03458	0.01554
6	0.02411	0.01238

Таблиця 5

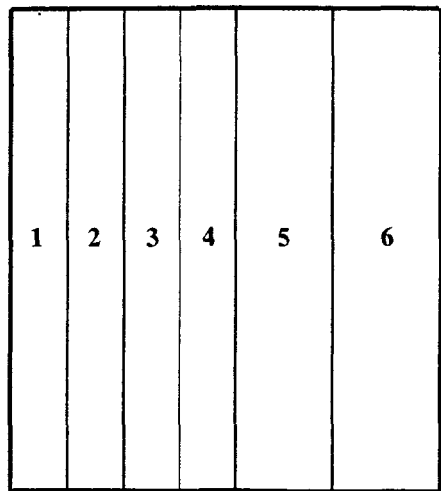
Адаптивне розбиття, $\eta_{\max} = 2\%$

К-сть СЕ	$\ \tilde{e}\ $	$\ e\ $	$\tilde{\eta}$	η	θ
2	0.17865	0.22528	7.41378	9.20506	0.79
4	0.09999	0.11146	4.10284	4.55412	0.89
7	0.05571	0.05936	2.27903	2.42509	0.94
9	0.04365	0.04541	1.74369	1.85548	0.96
9	0.04741	0.04937	1.93842	2.02707	0.96

Рівномірна сітка

 R_1 R_2

Адаптивна сітка

 R_1 R_2 Рис. 2. Схематичне зображення скінченноелементної сітки ($\eta_{\max} = 3\%$)

Таблиця 6

Характер розподілу похибки на рівномірній та адаптивній сітках, $\eta_{\max} = 2\%$

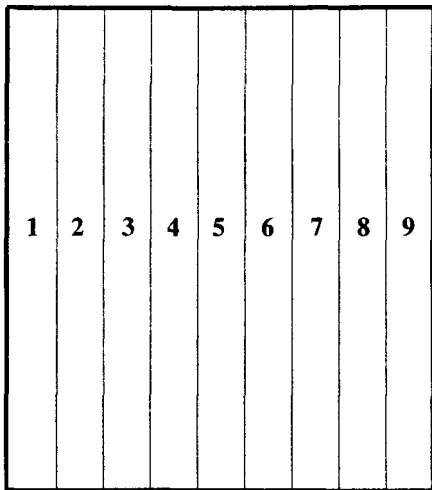
Номер елем.	Енергетична норма похибки	
	Адаптивна сітка	Рівномірна сітка
1	0.01331	0.02988
2	0.01149	0.02326
3	0.01012	0.01849
4	0.01378	0.01501
5	0.01066	0.01237
6	0.01403	0.01034
7	0.01334	0.00877
8	0.01101	0.00748
9	0.01643	0.00648

Аналогічно на основі цих результатів можна зробити висновок, що при однаковій кількості степенів свободи похибка числового розв'язку, отриманого на адаптивній сітці, на 8% менша за похибку розв'язку, отриманого на рівномірній сітці, і що максимальна різниця між похибками на різних елементах, у випадку адаптивної сітки становить 35%, а для рівномірної сітки – 78%.

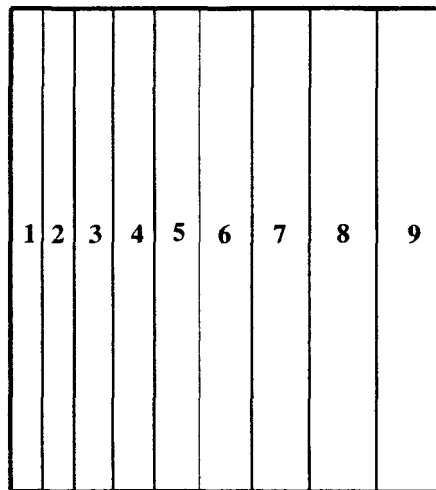
Значний інтерес при розв'язуванні даної задачі становить перевірка припущень, на основі яких будується процедура прогнозування розмірів скінченних елементів, і які виражаються такими співвідношеннями [2]:

$$\frac{\|\tilde{e}\|_n}{\|\tilde{e}\|_n} \approx \left(\frac{h_n}{h_n} \right)^c, \quad (1)$$

Рівномірна сітка

 R_1 R_2

Адаптивна сітка

 R_1 R_2 Рис. 3. Схематичне зображення скінченноелементної сітки ($\eta_{\max} = 2\%$)

$$\frac{\|\tilde{e}^{(e_h)}\|_n}{\|\tilde{e}^{(e)}\|_n} \approx \left(\frac{h_n^{(e_h)}}{h_n^{(e)}} \right)^c. \quad (2)$$

Тут введені такі позначення : $\|e\|_n$ – це похибка на попередній сітці з n скінченних елементів, $\|e\|_n$ – похибка на новій сітці з n елементів, отриманій шляхом рівномірного згущення попередньої сітки, h_n – розмір елемента на попередній сітці, h_n – розмір нових елементів, $\|e^{(e)}\|_n$ – це похибка на e -му елементі попередньої сітки, $\|e^{(e_h)}\|_n$ – це похибка на всіх нових елементах, що містяться в e -му елементі попередньої сітки, $h_n^{(e)}$ – розмір e -го елемента попередньої сітки, $h_n^{(e_h)}$ – розмір нових елементів, які містяться в e -му елементі попередньої сітки, $c = \min(p, \lambda)$, де поліноміальний порядок базисних функцій МСЕ, λ – порядок сингулярності розв'язку. Формули (1) – (2) виражають припущення, що відношення між похибкою на новій сітці і похибкою на попередній сітці приблизно дорівнює відношенню між характерними розмірами елементів в степені $c = \min(p, \lambda)$, причому ця гіпотеза існує як на глобальному рівні (1), так і на локальному рівні (2). Результати проведених у цьому напрямку досліджень відображені у табл. 7 та 8.

Таблиця 7

Перевірка співвідношення (1)

	Оцінена похибка		Точна похибка	
	$\ e\ _n / \ e\ _n$	h_n / h_n	$\ e\ _n / \ e\ _n$	h_n / h_n
$n = 4, n = 2$	0.553	0.5	0.495	0.5
$n = 8, n = 4$	0.535	0.5	0.498	0.5
$n = 16, n = 8$	0.509	0.5	0.499	0.5

Перевірка співвідношення (2)

	Оцінена похибка		Точна похибка	
	$\ e^{(e)_h}\ _h / \ e^{(e)}\ _n$	$h_n^{(e)_h} / h_n^{(e)}$	$\ e^{(e)_h}\ _h / \ e^{(e)}\ _n$	$h_n^{(e)_h} / h_n^{(e)}$
$e = 1, h = 8, n = 4$	0.619	0.5	0.498	0.5
$e = 2, h = 8, n = 4$	0.462	0.5	0.499	0.5
$e = 3, h = 8, n = 4$	0.464	0.5	0.497	0.5
$e = 4, h = 8, n = 4$	0.437	0.5	0.494	0.5

Із табл. 7, 8 можна зробити такий висновок : чим точніше оцінюється похибка на елементі, тим точніше виконуються співвідношення (1), (2).

Висновки. Отже, підсумовуючи результати як попередніх робіт [1,2], так і цієї роботи, маємо всі підстави для того, щоб стверджувати, що розроблено повний h -адаптивний обчислювальний процес на основі методу скінченних елементів та апостеріорної Z^2 -оцінки, метою якого є автоматизація отримання розв'язку заданої точності. Новизна цього процесу полягає ось у чому:

- запропоновано алгоритми локального згущення скінченноелементної сітки та прогнозування діаметра сітки;
- побудовано новий метод генерації адаптивних сіток із змінним діаметром з чотирикутних елементів;
- розроблена програмна реалізація запропонованих схем МСЕ для статичних задач лінійної теорії пружності анізотропного тіла.

Внаслідок обчислювального експерименту, проведеного за допомогою розробленого підходу, користувач повинен отримати числовий розв'язок вихідної задачі необхідної точності, причому ітераційна процедура послідовного досягнення заданої точності апроксимації здійснюється автоматично. Більше того, поставлена мета досягається побудовою оптимальної, в сенсі рівномірного розподілу локальної похибки дискретизації, сітки, завдяки чому можна отримати наближений розв'язок, який не містить великих локальних градієнтів. Побудована h -адаптивна схема МСЕ, яка реалізована у вигляді відповідного програмного комплексу, дає змогу проводити комп'ютерне моделювання процедури отримання розв'язку бажаної точності при мінімальному втручанні користувача у розв'язання задачі, і може бути покладена в основу математичного та програмного забезпечень САПР механіки твердого деформівного тіла.

1. Макар В.М., Матвійків О.М. h -адаптивне моделювання на основі методу скінченних елементів. Ч. 1: апостеріорні оцінки похибки // Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2003. – № 470. – С. 149–155. 2. Макар В.М., Матвійків О.М. h -адаптивне моделювання на основі методу скінченних елементів. Стратегія згущення і адаптивні сітки. Ч. 2. // Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2003. – № 471. – С. 94–100. 3. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. школа, 1982. – 264 с.