УДК 621.372

В. М. Заяць
Національний університет "Львівська політехніка"
кафедра ПЗ

ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ МОДЕЛІ ДИСКРЕТНОЇ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ТА УМОВИ СТІЙКОСТІ ЇЇ РЕЖИМІВ

Запропонований підхід та розроблений алгоритм побудови загальної моделі дискретної коливної системи, яка володіє широким спектром динамічних режимів. Отримані аналітичні оцінки амплітуди та частоти виявлених динамічних режимів моделі, які апробовані для значного класу функцій, що використовуються при побудові моделі. Встановлені необхідні та достатні умови стійкості виявлених режимів.

Approach to construction of general model of the discrete oscillation system which owns the wide spectrum of the dynamic modes is offered. Analytical estimations of amplitude and frequency of dynamical regimes, which are approved for the wide class of functions, which are used for construction of model, are got. Set necessary and sufficient terms of stability of the exposed modes.

Вступ. Під час проектування коливних пристроїв з бажаними характеристики інформаційного сигналу по амплітуді, частоті та формі, доцільно провести їх аналіз і комп'ютерне моделювання шляхом побудови математичної моделі об'єкта, що розробляється. Такий підхід дозволяє при менших часових і технічних засобах, порівняно з фізичним експериментом, реалізувати попередню процедуру проектування об'єкта чи явища.

У нелінійній динаміці застосовують дискретні за своєю природою моделі коливних систем [5–9]. Для систем цього класу дискретність закладена в природі самого об'єкта досліджень, а не є наслідком дискретизації неперервної системи. Доцільність використання дискретних за своєю природою моделей пояснюється такими їх особливостями:

– відносною простотою математичного опису порівняно з неперервними моделями;

– наявністю широкого спектра динамічних режимів;

– скінченною вимірністю, що дозволяє моделювати кожну нову гармоніку шляхом її введення у вектор змінних стану, тоді як в безперервних системах для розв'язання цієї задачі необхідно підвищувати розмірність системи;

– максимальною пристосованістю до постановки комп'ютерного експерименту.

Варто зауважити, що виникненню і розвитку теорії неперервних і дискретних коливних систем значною мірою сприяли відомі роботи Ван-дер-Поля, А.А. Андронова, С.Е. Хайкіна [1,3], які грунтуються на методі повільно змінних амплітуд [3]. Оскільки отримані за такого підходу рівняння наближені, то низка ефектів, таких як генерація на квазігармоніках, хаотичні режими, біфуркаційні значення параметрів, при яких відбувається зміна динаміки системи, не були виявлені. У роботі запропонований підхід до побудови універсальної дискретної моделі для дослідження цих явищ. Відзначимо, що модель будується так, щоб мати можливість знайти точний розв'язок як для амплітуди, так і частоти коливань у вигляді гармонійного сигналу, оскільки вихід за межі гармонійного процесу приводить до надмірно громіздких перетворень [2] у найпростіших випадках [7].

Підхід до побудови дискретної моделі другого порядку. Задамося метою побудувати модель коливного процесу, в якій можливе виникнення та існування гармонійних коливань з бажаною частотою і амплітудою, квазігармонійних коливань і хаотичних рухів під час зміни параметрів системи і початкових умов.

При побудові такої моделі слід враховувати те, що при малих значеннях амплітуди коливань рух повинен відбуватися у бік її збільшення, а при великих амплітудах – у бік зменшення. Цього можна досягнути шляхом введення в матрицю переходу станів деякої функції f від амплітуди коливань r, яка володіє ділянкою з від'ємною швидкістю зміни, принаймні, для великих значень амплітуд. При цьому в околі нульового стану рівноваги абсолютна величина швидкості (якщо вона від'ємна) не перевищує одиниці і для великих значень амплітуд добуток функції f на r прямує до нуля в міру зростання амплітуди коливань. Отже, базовими функціями при побудові дискретної моделі можуть бути тільки нелінійні функції, що мають ділянки повільних і швидких рухів, а також ділянку з від'ємною похідною в області великих амплітуд.

З метою забезпечення бажаної частоти коливань необхідно задати початкове значення фази коливань. Цього можна досягнути шляхом введення гармонійних функцій, роль аргумента в яких відіграватиме початкова фаза коливань, в матрицю переходу станів як одного із співмножників.

Нарешті, зміни амплітуди коливань моделі найпростішим способом можна досягнути, якщо ввести постійний коефіцієнт в матрицю монодромії як ще одного із співмножників.

Отже, можна запропонувати узагальнену дискретну модель коливної системи другого порядку такого вигляду:

$$\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ y_{m+1} \end{bmatrix} = a \cdot f(r_m) \cdot A(\varphi) \cdot \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix},$$

де x_m, y_m – змінні стану в m–й точці дискретизації; $r_m = x_m^2 + y_m^2$ – амплітуда можливих коливань; φ – початкова фаза коливань; a – постійний параметр, зміна якого дає змогу забезпечити широкий діапазон зміни амплітуди коливань, $A(\varphi)$ – матриця розміром (2 x 2), елементи якої є функціями частоти коливань.

Оскільки йдеться про побудову моделей другого порядку, то комбінуючи певні функції від амплітуди коливань і використовуючи різні тригонометричні функції для задання початкової фази коливань можна отримати цілий клас моделей з симетричною, кососиметричною і несиметричною матрицями переходу станів [7]. Кожна з таких моделей відрізняється своєю динамікою і потребує детального дослідження.

У роботі [7] проведений аналіз запропонованої моделі під час вибору базової функції $f(r)=\exp(-\sqrt{r})$ та кососиметричної матриці A, елементами якої є гармонійні функції і показано існування стійких гармонійних коливань при зміні параметра a від одиниці до e^2. Шляхом комп'ютерного моделювання виявлені квазігармонійні коливання як парного, так і непарного порядків і, зважаючи на відсутність повторення амплітуди коливань при великому числі дискрет, а також нерегулярності заповнення фазових портретів коливань, висловлена гіпотеза про існування хаотичних рухів в такій моделі [8]. Результати комп'ютерного моделювання підтверджують ці припущення для широкого класу дискретних моделей.

Аналіз коливань на основній частоті. Проведемо дослідження можливих динамічних режимів дискретної коливної моделі

$$\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ y_{m+1} \end{bmatrix} = a \cdot f(r_m) \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix}, \tag{1}$$

де елементи матриці A є гармонійними функціями параметра φ. Встановимо умови виникнення і стійкості динамічних режимів моделі (1). Після зведення в квадрат кожного з рівнянь системи (1) і їх підсумовування отримаємо

$$r_{m+1} = a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m . \tag{2}$$

Оскільки усталеному режиму відповідає значення $r = r_{m+1} = r_m$, то з останнього виразу отримуємо рівняння для визначення значення коливань на основній частоті

$$f(r) = \frac{1}{a} \tag{3}$$

або

$$r = g\left(\frac{1}{a}\right) \tag{4}$$

де g – функція обернена до f, яку завжди можна визначити для однозначної неперервної функції. Відзначимо, що формула (4) справедлива, якщо композиція функцій f і g є тотожним перетворенням незалежно від порядку застосування функцій і дає значення аргумента функції. У разі неоднозначності функції f можна визначити відповідні їй обернені функції на ділянках монотонності функції f. Для складних неоднозначних функцій обернена функція може бути записана лише в неявному вигляді. В цих випадках для оцінки амплітуди коливань доцільніше застосовувати формулу (3).

Для встановлення закону зміни частоти в дискретній моделі (1) шукатимемо її розв'язок у вигляді

$$x_m = \rho^m \cdot \cos\alpha_m \quad \text{і} \quad y_m = \rho^m \cdot \sin\alpha_m \tag{5}$$

де ρ – модулі власних значень матриці переходу станів.

Після підстановки (5) в (1), отримуємо:

$$p^{m+1} \cdot \cos\alpha_{m+1} = a \cdot f(r_m) \cdot \cos(\alpha_m - \varphi)$$

$$p^{m+1} \cdot \sin\alpha_{m+1} = a \cdot f(r_m) \cdot \sin(\alpha_m - \varphi)$$

З врахуванням (3) з останньої системи рівнянь виходить, що

$$\alpha_{m+1} = \alpha_m - \varphi$$

Отже, слід чекати, що встановлене значення фази коливань, а значить і частота коливань, визначатиметься величиною початкової фази φ. У першому наближенні величину періоду коливань можна оцінити за формулою

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\varphi} \quad . \tag{6}$$

Як бачимо величина періоду коливань визначається співвідношенням (6) і ніяк не залежить від виду функції f.

Для дослідження стійкості гармонійного режиму, амплітуда якого визначається рівнянням (3), а період відповідає формулі (6) після лінеаризації рівняння (2) в околі усталеного режиму отримаємо

$$z_{m+1} = [1 + 2 \cdot a^2 \cdot f(r) \cdot f'(r)] \cdot z_m ,$$

де $z_m = r_m - r$ – величина відхилення амплітуди від стаціонарного значення.

Значить, після використання (3) умова стійкості гармонійних коливань набуває вигляду:

$$\left| 1 + 2 \cdot a \cdot r \cdot \frac{df(x)}{dx_{x=r}} \right| < 1 . \tag{7}$$

Після розкриття модуля в останньому виразі можна визначити область стійких гармонійних коливань досліджуваної моделі. З виразу (7) виходить, що необхідною умовою стійкості гармонійних режимів є від'ємність похідної базової функції моделі в околі усталеного режиму.

Для дослідження дискретних моделей як базові функції використовувалися експоненціальна (exp(-r)) і показникова (b^{-r}) функції з від'ємним аргументом, а також ці функції з аргументом під знаком кореня k-го степеня (exp($-\sqrt[k]{r}$); гіперболічні функції (sh(r), ch(r), -й(r), cth(r)) як з додатним, так і від'ємним знаком та спеціальні показникові функції, які введені в розгляд аналогічно гіперболічним функціям:

$$sb(x) = \frac{b^x - b^{-x}}{2}, \; cb(x) = \frac{b^x + b^{-x}}{2}, \; tb(x) = \frac{b^x - b^{-x}}{b^x + b^{-x}}, \; ctb(x) = \frac{b^x + b^{-x}}{b^x - b^{-x}} \tag{8}$$

і названі, відповідно до наведених визначень, гіперпоказниковим синусом, косинусом, тангенсом і котангенсом. Відзначимо, що при виборі як основи показникової функції b натурального логарифма приходимо до гіперболічних функцій, тому всі взаємні зв'язки між гіперболічними функціями вснують і для наведених функцій (8). Ці зв'язки також можна встановити, враховуючи дві основні властивості гіперпоказникових функцій

$$cb^2(x) - sb^2(x) = 1 \quad i \quad ctb(x) = \frac{1}{tb(x)},$$

які перевіряються безпосередньою підстановкою в (8). Нижче в таблиці 1. наведений набір тих з розглянутих тридцяти базових функцій, які забезпечують існування стійких гармонійних коливань з оцінкою амплітуд коливань і діапазону зміни параметрів досліджуваної моделі, який не виходить за межі області стійкості.

Таблиця

Набір базових функцій для побудови моделей дискретних систем

Базова функція f(r)	Амплітуда гармонійних коливань r	Область Діапазон зміни a нижній; верхній / і b	Стійкості Діапазон зміни r нижній ; верхній
exp(-r)	ln(a)	1 ; e^2	0 ; 2
b^{-r}	ln(a)/ln(b)	1 ; e^2	0 ; 2/ln(b)
exp(- $\sqrt[k]{r}$)	$(\ln(a))^k$	1 ; e^{2k}	0 ; $(2*k)^k$
$b^{-\sqrt[k]{r}}$	$(\ln(a)/\ln(b))^k$	1 ; e^{2k}	0 ; $(2*k)^k/\ln(b)$ при цьому b>0
cth(r)	arth(a)	0 ; 1	0 ; 1
tb(r)	arctb(a)	1 ; ∞ / b>1	0 ; ∞
tb(-r)	-arctb(a)	1 ; ∞ / b<1	0 ; ∞
ctb(r)	artb(a)	0 ; 1 / b>1	0 ; ∞
ctb(-r)	-arth(a)	0 ; 1 / b<1	0 ; ∞

Відзначимо, що при використанні спеціальних функцій (гіперболічних і гіперпоказникових) амплітуди стаціонарних коливань виражені на основі формули (4) через обернені функції, для яких справедливо таке подання:

$$\mathrm{arth}(x) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \ \mathrm{artb}(x) = \frac{1}{2}\frac{ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{ln(b)}, \ \mathrm{arctb}(x) = \frac{1}{2}\frac{ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{ln(b)}.$$

У цьому можна переконатися, враховуючи визначення гіперболічного котангенса і наведених вище двох останніх властивостей гіперпоказникових функцій.

Отримані результати свідчать про те, що використовування показникової функції не змінює ширини області стійкості порівняно з використанням експоненційної функції, але при цьому з'являється можливість одержувати стійкі гармонійні коливання з як завгодно великою амплітудою у міру наближення основи показникової функції b до одиниці. Внесення аргументу під знак кореня к-го степеня приводить до розширення як області стійкості, так і діапазону зміни амплітуди стійких коливань. У разі використання гіперболічних функцій тільки cth(r) забезпечує стійкі коливання, оскільки для інших функцій цього класу не виконуються необхідні умови стійкості. У той же час при розгляді гіперпоказникових функцій стійкі коливання спостерігаються вже для чотирьох функцій з цього класу (tb(r), tb(-r), ctb(r), ctb(-r)). Найбільшою областю стійкості володіє функція tb(r). При її використанні тільки в області зміни параметра a від нуля до одиниці коливання затухають до нульового положення рівноваги. Для будь-яких інших значень параметра a можна отримати стійкі коливання довільної амплітуди за рахунок вибору основи b>1. Цю модель можна розглядати як модель ідеального генератора гармонійних коливань.

Верхні значення параметра *a*, які наведені в таблиці, визначають границю зони стійкості побудованих моделей і відповідають біфуркаційному значенню параметра, при якому існує якісна зміна характеру коливного процесу.

Встановлення умов стійкості квазігармонічних режимів дискретної моделі. Для визначення амплітуд квазігармонійних коливань довільного порядку k необхідно зв'язати значення дискретних амплітуд, що рознесені один від одного на k відліків. Якщо подати рівняння (2) у вигляді сукупності k рівнянь

$$r_{m+i+1} = a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_{m+i} \tag{9}$$

де i =1,..., k, то після підстановки першого рівняння в друге, другого в третє, і т.д. k-1 в k приходимо до співвідношення

$$r_{m+k} = a^{2k} \cdot f^2[a^{2k-2} \cdot f^2(a^{2k-4} \cdot f^2(a^{2k-6} \cdot ... \cdot f^2(a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m) \cdot f^2(r_m) \cdot r_m] \cdot$$
$$\cdot f^2[a^{2k-4} \cdot f^2(a^{2k-8} \cdot ..... \cdot f^2(a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m) \cdot f^2(r_m) \cdot r_m] \cdot ....$$
$$... \cdot f^2[a^4 \cdot f^2(a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m) \cdot f^2(r_m) \cdot r_m] \cdot f[a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m] \cdot f^2(r_m) \cdot r_m$$

Оскільки усталеному режиму відповідає значення r = r_{m+k} = r_m на основі останнього співвідношення можна отримати неявне рівняння для визначення амплітуд коливань довільної кратності k:

$$f[a^{2k-2} \cdot f^2(a^{2k-4} \cdot f^2(a^{2k-6} \cdot ...... \cdot f^2(a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m) \cdot f^2(r_m) \cdot r_m] \cdot$$
$$\cdot f[a^{2k-4} \cdot f^2(a^{2k-8} \cdot .... \cdot f^2(a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m) \cdot f^2(r_m) \cdot r_m] \cdot ....$$
$$.... \cdot f[a^4 \cdot f^2(a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m) \cdot f(r_m) \cdot r_m] \cdot f[a^2 \cdot f^2(r_m) \cdot r_m] \cdot f(r_m) = \frac{1}{a^k}$$

При k=2 з останнього виразу одержуємо рівняння для визначення двократних амплітуд

$$f[a^2 \cdot f^2(r) \cdot r] \cdot f(r) = \frac{1}{a^2}$$

Після лінеаризації (9) для значення k=2 приходимо до рівняння для приростів амплітуд в m і m+2 дискретних відліках

$$z_{m+2} = \{1 + 2 \cdot a^2 \cdot r \cdot (f'(r) \cdot f[a^2 \cdot f^2(r) \cdot r] + f'[a^2 \cdot f^2(r) \cdot r] \cdot f(r)\} \cdot z_m .$$

Для довільних значень k рівняння для приростів амплітуд набуває вигляду:

$$z_{m+k} = \{1 + 2 \cdot a^k \cdot r \cdot \sum_{i=1}^{k} f'(a_{2i-2}(r)) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} f \ \ (a_{2i-2}(r))\} z_m ,$$

де $f \ \ (a_{2i-2}(r))$ – позначає рекурсивний виклик функції самої себе вкладений на глибину 2i-2. Таким чином, достатнім критерієм стійкості квазігармонійних коливань довільної кратності є умова

$$\left| 1 + 2 \cdot a^k \cdot r \cdot \sum_{i=1}^{k} f'(a_{2i-2}(r)) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} f(a_{2j-2}(r)) \right| < 1.$$

З наведеної нерівності виходить, що необхідна умова стійкості коливань довільної кратності k виконується при використанні додатно визначених функцій f(r) і їх рекурсивних викликів до k-го порядку включно і від'ємної визначеності похідних від цих функцій та їх рекурсій.

На основі проведеного аналізу можна сформулювати алгоритм розроблення дискретних моделей коливних систем, в яких виникатимуть коливні режими різного порядку складності та будуть виконуватися необхідні умови стійкості цих режимів:

1. Сформувати матрицю переходу дискретних станів у вигляді добутку трьох співмножників: постійного параметра *a*, зміна якого забезпечує широкий діапазон зміни амплітуди коливань; матриці A(φ), елементами якої визначається частота коливань; вектора змінних стану x[n] вирахуваного або заданого в дискретний момент відліку n.

2. Вибрати таку нелінійну функцію f(r), аргуметом якої виступає амплітуда (чи амплітуди) коливань, що має ділянки повільних і швидких рухів при різних амплітудах коливань та ділянку з від'ємною похідною, по крайній мірі, для великих амплітуд коливань для забезпечення повернення фазової точки до нульового положення рівноваги.

3. Для забезпечення необхідних умов стійкості в околі усталеного режиму функція f(r) має бути додатновизначена і мати від'ємновизначену похідну.

4. Елементи матриці A(φ) доцільно брати кососиметричними відносно діагоналі з визначником, який дорівнює одиниці, оскільки в цьому випадку є можливість розділення рівнянь для аналітичної кількісної оцінки амплітуди та частоти коливань.

5. Якщо вибрана базова функція в околі почату коливань має від'ємну похідну, то її абсолютна величина не повинна перевищувати одиницю, бо інакше не виконуються необхідні умови стійкості можливих коливних режимів моделі.

Висновки. На основі запропонованого підходу побудована універсальна дискретна коливна модель, що володіє широким діапазоном коливних рухів: гармонійні коливання, квазігармонійні режими різної кратності, хаотичні рухи.

Отримані аналітичні вирази загального вигляду для визначення амплітуд гармонійних коливань, оцінки періоду коливань і наведені неявні рівняння для визначення амплітуд квазігармонійних коливань довільної кратності.

Проведений аналіз широкого класу базових функцій, які використовуються під час побудови моделі, для кожної з яких визначена і амплітуда коливань і встановлені межі області стійкості.

Введений клас гіперпоказникових функцій, які мають найбільшу область стійкості і дозволяють генерувати гармнійні коливання довільної амплітуди в широкому діапазоні зміни параметрів.

Встановлені необхідні і достатні умови стійкості як гармонійних коливань, так і квазігармонійних довільного порядку в загальному вигляді під час дослідження моделі (1).

1. Андронов А. А., Вит А. А., Хайкин С. Е. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 400 с. 2. Бутенин Н.В., Неймарк .И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука,1976. – 354 с. 3. Ван-дер-Поль. Нелинейная теория электрических цепей. – М.: Связь, 1935. – 186 с. 4. Видаль П. Нелинейные импульсные системы. – М.:Энергия, 1974. – 336 с. 5. Динамика одномерных отображений / А.Н. Шарковский, С.Ф. Коляда, А.Г. Сивак, В.В. Федоренко. – К.: Наук. думка, 1989. – 216 с. 6. Заяць В.М. Построение и анализ модели дискретной колебательной системы // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – С. 161–165. 7. Заяць В.М. Моделі дискретних коливних систем // Комп'ютерні технології друкарства. – 1998 – с. 37–38. 8.Заяць В.М. Клас функцій для побудови дискретних моделей коливних систем // Ювілейна науково-технічна конф. "КРА-40". – 2004. – Львів: – 2004. – С. 31–32. 9. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 240 с. 10. Zayats V. Chaos searching algorithm for second order oscillatory system // Proc. International Conf. "TCSET – 2002". – Lviv-Slavske. – 2002. – P. 97–98.