УДК 681.325

І.О. Процько
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра САПР

ПРИВЕДЕННЯ ДО ЕФЕКТИВНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ХАРТЛІ

Розглянуто узагальнений підхід ефективного обчислення дискретного перетворення Хартлі на основі циклічних згорток. Підхід базується на приведенні матриці показників і матриці знаків дійсного базису трансформування до еквівалентних циклічних блоково-матричних структур.

The general method of efficient computation discrete Hartley transform using of circular convolutions is considered. The method is based on the presentation of the matrix of powers and signs of the real harmonic transform basis to the equivalent block-matrix structures.

Вступ. Під час проектування обчислювальних засобів використовуються ефективні підходи з організації проведення обчислювального процесу. У сучасних комп'ютерних системах для обробки даних застосовують ортогональні перетворення інформації з оригіналів в образ і навпаки. Для подання, особливо, дійсних даних в їх спектральний образ поряд з швидким перетворенням Фур'є (ШПФ) поширено використовується дискретне швидке перетворення Хартлі (ШПХ) [1], що базується на ефективних алгоритмах реалізованих програмно-апаратними або апаратно-орієнтованими засобами.

Особливого застосування алгоритми цього класу набули для перетворення значень обсягів даних, що дорівнюють цілому степеню двійки. Але фізична природа багатьох явищ характеризується обсягом інформації, що може мати довільну кількість даних. Тому для спектрального, кореляційного, кепстрального аналізів, кодування, розпізнавання та відтворення актуальним є довільний обсяг вхідних даних ефективного обчислення дискретного перетворення Хартлі (ДПХ). Тобто гнучке ШПХ повинно виконуватись над змінною кількістю відліків N масиву даних, що належать значенню елемента з множини натуральних чисел.

Виконання перетворень класу Фур'є послідовностей довільного обсягу вимагає додаткових операцій серед найпоширеніших засобів, що опрацьовують обсяги даних, які дорівнюють цілому степеню двійки [2]. Так для забезпечення цього під час аналізу можна змінювати частоту дискретизації вхідного інформаційного сигналу. Збільшення числа відліків за рахунок збільшення частоти дискретизації при незмінному інтервалі Tc сигналу вимагає зміни тривалості такту роботи аналого-цифрового перетворювача. Здебільшого одержані вхідні фізичні дані доповнюють нулями, щоб кількість даних N для перетворення дорівнювала цілому степеню двійки. Розгляд питання використання підходу доповнення нулями послідовності на значення (L-N) кількості відліків функції (1)

$$X(k/NT)=Tc \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\exp(-j\,2\pi kn/NT) \qquad (1)$$

де $k=0,1,2,\dots,L-1$; $n=0,1,2,\dots,N-1$;
показує, що лише покращується розрізнення гармонічних компонент. Це дозволяє отримати інтерпольоване перетворення більшого числа компонент функції (1) та підвищити точність значень частотних піків на спектральній характеристиці [3]. Але збільшуючи обсяг, зростає величина обчислювальних затрат і, відповідно, час виконання перетворень.

Тому є актуальним дослідження і розвиток загальних підходів ефективного обчислення дискретних перетворень послідовностей довільного обсягу, що дасть можливість створювати гнучкі та універсальні інструменти спектрального подання інформації.

Для довільного обсягу N інформаційних даних, одержано різноманітні форми та схеми узагальненого обчислення перетворень класу Фур'є [4,5]. Існуючі підходи мають як свої переваги, так і особливості, що полягають в специфічній складності синтезу швидкого алгоритму для певних значеннь обсягів та узагальненому поданні для будь-якого обсягу.

Обчислення ДПХ через циклічні згортки. Одним з підходів у теорії синтезу алгоритмів дискретних перетворень у цифровій обробці сигналів є приведення обчислення до циклічних згорток. Тобто, алгоритми швидких згорток визначають ефективне обчислення ДПХ, можливо навпаки. Цей підхід ефективного обчислення започатковано в роботі Рейдера [6]. Дискретне перетворення з базисом W зводилось до обчислення циклічної згортки для послідовності обсягом, що дорівнює простому числу. В основу приведення дискретного перетворення:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk}, \tag{2}$$

де n,k=0,...N-1, до циклічної згортки покладено переіндексацію порядку вхідної послідовності x(n). Для цього застосовано первісний корінь g з відповідним показником степеня, що зводить добуток індексів до додавання показників степеня числа g. Тобто, обчислення набуває вигляду:

$$X(g^l)=\sum_{m=0}^{N-2} x(g^{-m})W^{g^{(l-m)}} + x(0) \tag{3}$$

При цьому враховується, що та $W^{nk} = W^{(nk)\mathrm{mod}N} = W^{g^l g^m} = W^{g^{(l+m)}}$ та $W^N=1$. Числу g відповідає первісний корінь з властивостями $g^{N-1}=1$, $g^k\neq1$, для 0<k<N-1. Вираз (3) відповідає циклічній згортці без x(0) [6].

Далі підхід розвинуто та узагальнено в роботах Винограда [7,8] для послідовностей обсягом, що дорівнює простому числу та степеню простого числа, та одержано значення мінімальної мультиплікативної обчислювальної складності. У цих алгоритмах використовуються для певного обсягу конкретні обчислення з використанням китайської теореми про залишки, властивостей прямого добутку матриць та алгоритмів циклічної згортки.

Аналіз структури матриці аргументів базису ДТХ. Проаналізуємо структуру матриці показників базису ДПХ для довільних значень обсягів

$$X(k)= (NT)^{-1} \sum_{r=0}^{N-1} x(n) \cos(2\pi kr/NT)\ , \tag{4}$$

де r,k=0,...N-1, cas(2πkr/NT) = (cos(2πkr/NT)+sin(2πkr/NT)), приймемо інтервал дискретизації T=1. Проведемо декомпозицію та детальний аналіз при цьому аргументів базису ДПХ, що є елементами матриці з (4). Функція cas(2πkr/N), де r,k =0(1)N-1, періодична відносно N, тому можна записати на основі (4) квадратну матрицю аргументів базису порядку (N×N) у вигляді

$$V=[v(r,k) \bmod N], \tag{5}$$

де v(r,k)= r*k – значення елементів матриці по r=1(1)N-1 рядку та k=1(1)N-1 стовпцю. Враховуючи симетричність функцій базису ДПХ , їх можна повністю визначити для інтервалу l=0(1)N/4, доповнюючи матрицями знаків Zs синуса і Zc косинуса [9], при цілих N, кратних чотирьом, і для парних N , що є дільниками 360 :

$$V=[v(r,k) \bmod (N/4)],\quad r,k=1(1)(N/4), \tag{6}$$

для решти N, (непарних, парних не кратних 4 і парних не дільників 360) визначаємо при l=0(1){N/2} :

$$V = [v(r,k) \bmod (N/2)],\quad r,k=1(1)\{N/2\}, \tag{7}$$

при N-непарному, береться ціла частина від ділення {N/2}. Порядок матриць (6,7) при цьому зменшується.

Матриці знаків синуса Zs і косинуса Zc формуються на основі елементів матриці (5) і визначаються за нерівностями:

$$Zs[r,k] = \begin{cases} +1, & \text{якщо } v(r,k) < N/2 \\ -1, & \text{якщо } v(r,k) > N/2 \;; \end{cases} \tag{8}$$

$$Zc[r,k] = \begin{cases} +1, & \text{якщо } 3N/4 < v(r,k) < N/4 \\ -1, & \text{якщо } N/4 < v(r,k) < 3N/4 \;, \end{cases} \tag{9}$$

де r,k=1(1)N/4 для (6) і r,k=1(1){N/2} для (7).

На схемі 1 показано розміщення симетрії значень знаків синусної та косинусної частин матриць, де для Zs - – антисиметричне відображення значень синуса; для Zc + – симетричне відображення значень косинуса; для Zs – антисиметричне відображення значень парних рядків і парних стовпців матриці значень знаків синуса; для Zc – антисиметричне відображення значень непарних рядків і непарних стовців матриці значень знаків косинуса.

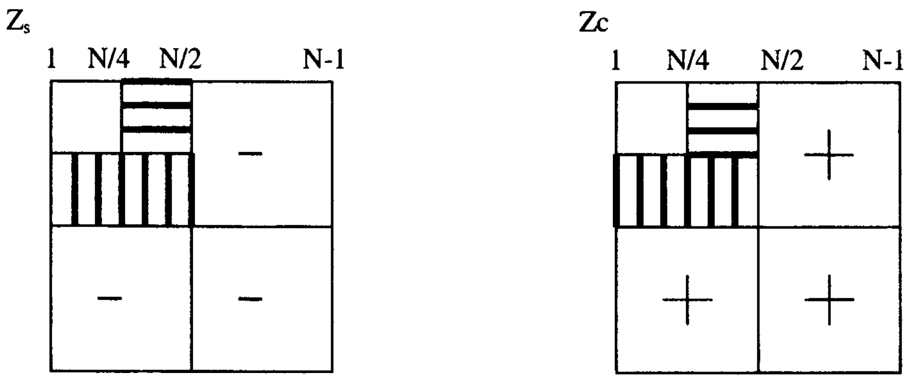

Схема 1. Симетричність розміщення елементів у матрицях знаків Zs синусної та Zc косинусної частин ДПХ

Аналіз одержаних матриць V (6), (7) для аргументів базису ДПХ, що містять цілі числа, у випадку для N простого, показує, що матриця є нормалізований латинський квадрат. В інших випадках, довільних значень обсягів N, з матриці V (6,7) може бути виділений набір латинських квадратів, де кожен одержаний квадрат не містить елементів інших квадратів.

Визначення матриць аргументів базису ДПХ у випадку довільного обсягу вимагає затрат часу при обчисленні за формулами (6), (7) для кожного конкретного значення обсягу. Тому ефективніше формувати матриці показників за допомогою переставлення елементів кожного наступного рядка матриці на основі попереднього. Для цього знайдено форму підстановки, що визначається на основі елементів першого та другого рядка квадратної матриці показників. Підстановку можна описати за допомогою циклічного розкладу, який характеризується числом циклів циклічного розкладу $P(z)=(z_1)(z_2)...(z_i)$, що є конкретним для кожного довільного значення обсягу. Наприклад, для обсягу N=17, P(z)=(1 2 4 8)(3 6 5 7); N=30, P(z)=(1 2 4 7)(3 6) (5); N=44, P(z)= (1 3 9 5 7)(2 4 8 6 10); N=64, P(z)=(1 3 9 5 15 13 7 11)(2 6 14 10)(4 12)(8).

Отже, сформовані Vp матриці показників за циклічним розкладом підстановки P(z) визначають структури матриць аргументів базису ДПХ послідовностей довільного обсягу і відповідні еквівалентно-структурні матриці знаків Z'c, Z's, які в сукупності становлять цілісність базису ДПХ. Під еквівалентно-структурними матрицями розуміються матриці одного порядку з однаковими властивостями, що складаються з різних елементів, і містять відповідні підматриці з однаковими порядками та властивостями.

Розглянемо структуру, сформованих за циклічним розкладом підстановки матриць Vp аргументів базису ДПХ послідовностей довільного обсягу та відповідних матриць знаків Z's синуса і Z'c косинуса, що містять елементи ±1. Кожен одержаний квадрат, що побудований на основі підстановки z_i, з циклічного розкладу P(z), містить елементи рівні між собою, розміщені паралельно бічній діагоналі v[i,j]=v[k,l], при i+j=k+l, де $i,j,k,l \in \{1,2,..., n\}$, $v[i,j] \in Vp$ або рівні всі елементи симетрично розміщені відносно головної діагоналі.. Тобто, такі квадратні матриці називаються Ганкелевими (Hankel), що повністю визначаються своїм першим рядком та останнім стовпцем. Окрім того, у даної Ганкелевої матриці Vp кожен наступний рядок одержаний з попереднього циклічним зсувом ліворуч. Тобто, Ганкелева матриця повністю визначається своїм першим рядком і такі матриці називають ліво-циркулянтними або циклічними зліва.

Можна сформулювати на основі декомпозиції та аналізу базису ДПХ (4)–(9) для відповідних косинусних і синусних частин теорему еквівалентності структур матриці значень цілочислових аргументів і матриці знаків.

Теорема. Для квадратних матриць цілочислових аргументів (7) і знаків косинуса (9) порядку $\{N/2\}\times\{N/2\}$, обчислених на основі періодичності та симетрії базису ДПХ, а для матриці показників степеня (5) і відповідної матриці знака синуса (8) порядку $\{N\times N\}$, обчислених на основі періодичності, та переставленні рядків і стовпців за допомогою підстановок з циклічного розкладу, існує еквівалентність структур для довільного обсягу N.

Доведення. Для взаємозв'язку елементів декомпозиції базису ДПХ необхідні аналогічні дії з переставлення рядків і стовпців, у відповідність до матриці Vp, над матрицями (8), (9) знаків Z's синуса і Z'c косинуса. Оскільки значення величин $\cos(2\pi n/N)$ для n=0(1)N-1 дійсного базису ДТФ, рівномірно розподілених на відрізку $(0,2\pi)$, симетричні відносно осі N/2, як для абсолютних величин значень косинуса, так і для їх знаків. Тому достатньо для косинусної частини розглядати елементи декомпозиції Vp та Z'c і одержані їхні властивості для порядку $\{N/2\}\times\{N/2\}$, на відміну від антисиметричної функції $\sin(2\pi n/N)$ для n=0(1)N-1 відрізка $(0,2\pi)$ властивості еквівалентності структур якої правильні для порядку $\{N\times N\}$, обчислених на основі періодичності даної функції.

Обчислення ДПХ на основі проведеної декомпозиції. Одержана структура матриць показників степеня Vp і відповідних матриць знаків задає процес проведення обчислення ДПХ послідовностей довільного обсягу за допомогою циклічних згорток. При цьому необхідно застосовувати швидкі алгоритми згорток [7], що і визначатимуть основні обчислювальні затрати даного трансформування.

На початковому етапі проводиться групування (переіндексація) вхідних даних, що визначається циклічним розкладом підстановки. Одночасно можна визначити коефіцієнти косинусних і синусних складових базису ДПХ, що беруть участь в операціях згортки. Для косинусної частини проводиться групування вже об'єднаних вхідних даних

$$x_c(i) = x(i) \pm x(N\text{-}1), \qquad i=1(1)\{N/2\}\text{-}1, \tag{10}$$

що може виконуватись в один-три етапи. На основі сформульованої теореми за одержаним циклічним розкладом підстановки матриця показників степеня Vp базису ДПХ послідовностей довільного обсягу і відповідна матриця знака Z'c, Z's, розбиваються на еквівалентні блоково-матричні структури. Вони можуть визначати додаткові об'єднання даних та обсяг і кількість циклічних згорток, необхідних для проведення обчислення. Так, варто зауважити, для парних значень обсягів перетворення ДПХ матриця показників степеня Vp для косинусної і синусної частин складатиметься з підматриць Vo, Ve і матиме вигляд:

$$Vp = \begin{bmatrix} Vo & Ve \\ Ve & Ve \end{bmatrix}, \tag{11}$$

що вимагає додаткових об'єднань даних. Важливо, що для синусної частини базису ДПХ порядку $(N\times N)$ циклічні зліва підматриці містять асиметричну блоково-матричну структуру другого порядку вигляду (A – блоковий елемент):

$$Vp = \begin{bmatrix} A & -A \\ -A & A \end{bmatrix}, \tag{12}$$

Ці основні особливості структур узагальненого підходу проведення обчислення ДТХ на основі циклічних згорток, звичайно, не перекривають всього розмаїття конкретних матричних структур для ДПХ послідовностей довільного обсягу. Тому ці особливості, за виконаним аналізом для цілих значень обсягів N, можна виділити в підмножинах S1, S2, S3, S4, S5, S6 множини натуральних чисел.

S1={3,5,7,9,11,13,15,17,...} – множина непарних значень обсягів, а множина парних значень поділяється на підмножини:

S2={6,10,18,30,90,...},

S3={14,22,26,34,38,42,46,50,58,...},

S4={12,20,28,36,44,52,60,...}.

S5={2,4,8,16,32,64,128,256,...}.

S6={24,40,48,56,72,80,88,96,104,...}.

Наприклад, для обсягів, що належать підмножині S5, елементи якої дорівнюють цілому степеню двійки, легко подати кількість згорток s для косинусної частини на основі даного підходу у вигляді таблиці

Таблиця

N	8	16	32	64	128	...
s	1	4,1 1	8,4,1 4,1 1	16,8,4,1 8,4,1 4,1 1	32,16,8,4,1 6,8,4,1 8,4,1 4,1 1	...

На завершальному етапі на основі одержаної матричної структури, об'єднуємо з попередніх етапів одержані значення згорток і компонуючи дійсні та уявні частини, проводимо формування вихідних значень дійсних дискретних коефіцієнтів Хартлі .

Висновки. У роботі показано, як на основі переставлення елементів вхідної послідовності, що визначається на основі перших двох рядків матриці показників (5), обчислюється ДПХ за допомогою алгоритмів згортки. Визначення переставлення не потребує спеціальних обчислень і для обсягів N, N/2 - простих чисел може формуватись елементарним відбором елементів натурального ряду. Використання циклічного розкладу підстановки P(z) приводить до однотипового підходу проведення організації обчислення ДПХ при проектуванні даних обчислювальних засобів послідовностей довільного обсягу. Окреме проведення обчислень для косинусної та синусної частин базису ДПХ, так і блокових елементів дозволяє розпаралелювати обчислення для підвищення швидкодії опрацювання інформації.

1. Брейсуел Р., Преобразование Хартли / Пер. с англ. – М.: – Мир,1990. 2. Потемкин В.Г. Система MATLAB. Справочное пособие. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1998. 3. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы / Пер. с англ – М.: Мир, 1982. 4. КумаресанР.,Гупта П.К . Алгоритм БПФ для простых множителей на основе арифметики действительных чисел. // ТИИЭР, – Т.73. 1985. № 7. 5. Сверлик М.Б., Троянский А.В. Обобщенное матричное описание алгоритма // БПФ. Радиоэлектроника. 1995. № 7. 6. C.M. Rader, Discrete Fourier transform when the number of data samples is prime. // Proc.IEEE 56, 1968. 7. Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч. М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1983. 8. S. Winograd, On cumputing the discrete Fourier transform. // Math.Comput. 1978. 32. 9. Prots'ko I. An algorithm for computing the discrete Fourier transform. // Proceedings of LSPIC-90. – Riga, april 22–26, – 1990. – P. 123–127.