

ГІДРОДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕСТАБІЛІЗОВАНОЇ ДВОШАРОВОЇ ТЕЧІЇ УЗАГАЛЬНЕНИХ НЬЮТОНІВСЬКИХ РІДИН

© Желяк В., Кончевич Я., Регуш А., 2005

In activity it is ground usages of an allocation procedure the equations for the description of two-layer non-stabilized flow are obtained. The outcomes of a numerical modeling circumscribing geometrical, kinematic and dynamic parameters of a two-layer flow are submitted.

Постановка проблеми. Дво- і багатошарові течії рідин широко представлені в різних технологічних процесах, таких як: виготовлення кінофотоплівки, співекструзія полімерів при виготовленні комбінованих матеріалів, цементування шпар в свердловинах для видобутку нафти й газу в процесі їхнього буріння, трубопровідний транспорт нафти, коли як менш в'язкий прошарок між нафтою й стінкою труби вводиться тонкий шар води, стратифікований рух води в руслах і водоймах тощо. Необхідність інтенсифікації різних технологічних процесів, у яких зустрічаються подібного роду течії, викликає необхідність їхнього вивчення для створення надійних методик розрахунку гідродинамічних параметрів таких потоків.

Особливий інтерес являють собою дво- і багатошарові нестабілізовані течії рідин як більш загальний випадок багатошарової течії і які часто зустрічаються в коротких каналах технологічного обладнання виробництва.

Аналіз останніх досліджень. Сьогодні є обмеженою кількість досліджень, що розглядають гідродинамічні аспекти багатошарових течій в'язких і аномально в'язких рідин у зазначеному вище устаткуванні, особливо, в коротких за довжиною каналах. У цьому випадку течію необхідно

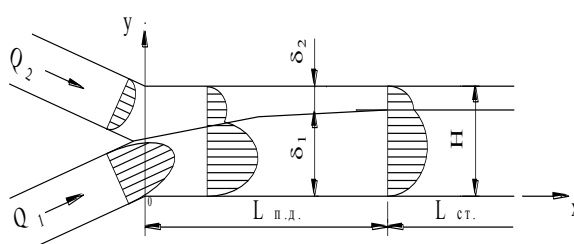


Рис. 1. Схема двошарової течії

На початковій ділянці течія має нестабілізований характер і проходить в умовах формування полів швидкостей, напружень і тисків. Крім того, за різних об'ємних витрат рідин у шарах чи навіть

за однакових витрат, але відмінностей в реологічних властивостях рідин, за рахунок динамічної взаємодії шарів за довжиною гідродинамічної початкової ділянки відбуватиметься зміна положення лінії контакту шарів (рис. 1). Отже, рух у кожному із шарів може бути також і нерівномірним. Як показують дані експериментальних досліджень [3], за довжиною ділянки стабілізації потоку зміна швидкості на границі контакту шарів відбувається від деякого, близького до нуля значення в області зустрічі потоків, до значення, що відповідає стабілізованій течії. Лінія границі контакту шарів має вигляд кривої і змінюється від початкового значення до відповідної товщини шару при стабілізованій течії. Інтенсивність деформації лінії контакту шарів залежить від співвідношення витрат рідин у шарах і від відмінності в реологічних властивостях. Формування профілю швидкостей у двошаровому потоці відбувається в складних умовах і епюра швидкостей змінюється від двох парабол до епюри, що відповідає ділянці стабілізованої течії (рис. 1) [3]. Якщо рідини значно відрізняються за своїми властивостями, то навіть на ділянці стабілізованої течії, на границі контакту шарів епюра розподілу швидкостей матиме перелом з наявністю максимуму швидкості в одному із шарів (переважно менш в'язкому з більшою об'ємною витратою).

За довжиною гідродинамічної початкової ділянки тиск змінюється за нелінійною залежністю й градієнт тиску більший, ніж за стабілізованою течією. Таке додаткове падіння тиску викликається динамічною взаємодією шарів рідин і в'язкою дисипацією енергії, витраченої на формування профілю швидкостей у двошаровому потоці. Процеси, що відбуваються на початковій ділянці, впливають на формування параметрів двошарового потоку рідин і тому їх необхідно враховувати під час описання течії. Варто зазначити, що в деяких випадках довжина каналу може бути настільки малою ($l/H \geq 3$), що стабілізація потоку так і не відбувається.

Дослідження питань дво- і багатошарових течій в'язких і аномально-в'язких рідин висвітлюється в багатьох роботах [1, 2, 5, 6, 7, 8, 13]. Передусім вони торкаються двошарових напірних течій узагальнених ньютонівських рідин стосовно процесів виготовлення багатошарових матеріалів методом співекструзії полімерів, як одних з найширше розповсюджених. Такі течії реалізуються в плоских каналах і для їх опису можна використовувати таку систему рівнянь руху рідини в напруженнях (1) і рівняння нерозривності (2), записаного для кожного шару окремо:

$$\rho(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y}) = \rho a_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}; \quad (1)$$

$$\rho(U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y}) = \rho a_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

де a_x, a_y – проекції масових сил; U_x, U_y – проекції швидкості на осі координат.

У кожному конкретному випадку течії аномально-в'язкої рідини замість дотичних напружень τ_{ij} використовується відповідний реологічний закон. Розв'язання систем рівнянь (1) і (2) повинно здійснюватися з врахуванням граничних і крайових умов. Як граничні використовуються умови прилипання рідини до стінок каналу й рівності швидкостей і дотичних напружень на границі контакту шарів, справедливості яких підтверджена в роботах [2, 4, 6, 8, 9, 10]. Стосовно до схеми течії, показаної на рис. 1, граничні умови матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} U_{x_1} = U_{y_1} = 0 \quad \text{при } y = 0; \\ U_{x_2} = U_{y_2} = 0 \quad \text{при } y = H; \\ U_{x_1} = U_{x_2} = U_k \quad \text{при } y = \delta_1; \\ \tau_{xy_1} = \tau_{xy_2} = \tau_k \quad \text{при } y = \delta_1, \end{aligned} \quad (3)$$

де U_k, τ_k – швидкість та дотичне напруження на лінії контакту шарів.

Як крайові використовуються умови, що описують значення геометричних, кінематичних і динамічних параметрів двошарового потоку на початку і в кінці каналу. Так, при поздовжній координаті потоку $x = 0$ товщина першого шару $\delta_1 = \delta_{01}$, швидкість на границі контакту шарів U_k дорівнює або має значення, близьке до нуля, а тиск p має величину, що забезпечує задану витрату потоку. Наприкінці початкової ділянки ці параметри набувають значень, характерних стабілізованої течії. Вважається, що стабілізація геометричних, кінематичних і динамічних характеристик потоку в кожному із шарів відбувається на однаковій відстані від входу рідин у канал і, отже, довжина гідродинамічної початкової ділянки в кожному із шарів є однаковою.

Система рівнянь (1) дещо спрощується для випадків течій, викликаних дією гравітаційних сил або сил тиску. У першому випадку для безнапірної течії $\partial p / \partial x = 0$, а в другому дією на потік масових сил можна знехтувати і $a_x = a_y = 0$. Для випадків течії рідин в тонких шарах складовою $\partial p / \partial y$ нехтують. Слід зазначити, що за даними [2, 4, 6, 11], тиск p , виміряний в різних шарах у тому самому перерізі, не відрізняється один від одного в межах похибок виміру. Отже, градієнт тиску за напрямком течії в багатошаровому потоці $\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial p_2}{\partial x} = \dots = \frac{\partial p_n}{\partial x}$.

Розв'язок системи рівнянь (1) разом із замикаючим їх рівнянням нерозривності (2) пов'язаний з великими труднощами. Навіть для звичайних "одношарових" течій для розв'язання такої системи рівнянь використовувалися наближені методи, пов'язані з лінеаризацією рівнянь руху використанням наближення шуканих функцій за допомогою степеневих рядів, безпосередньо інтегруванням рівнянь на ЕОМ з використанням числових методів. Саме цим, очевидно, і викликано те, що аналітичний опис двошарових течій рідин на гідродинамічній початковій ділянці розглядається в [3, 5].

Через значні труднощі, що виникають при спробі аналітичного опису дво- і багатошарової течії рідин на гідродинамічній початковій ділянці, особливо у випадку течії аномально-в'язких середовищ, основні теоретичні залежності отримані для ділянки стабілізованої течії. У цьому випадку проекція швидкості на вісь y дорівнює нулю й система рівнянь (1) значно спрощується. Для течії рідини під дією сили ваги вона набирає вигляду:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho a_x, \quad (4)$$

а для напірної течії в щілині

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5)$$

Розв'язок цих рівнянь для випадку дво- і багатошарової течії в'язких і аномально-в'язких рідин не являє особливих труднощів. В [9, 10, 11] отримано вирази, які уможливають розрахувати кінематичні характеристики й товщини шарів за двошарової течії ньютонівських та в'язкопластичних рідин по похилій площині під дією гравітаційних сил. Більшість робіт розглядає напірну двошарову течію рідин у плоскощілинному каналі. Так, у роботах [4, 7, 8, 11] розглянуто течію рідини, реологічна поведінка якої описується законом Освальда де Віля. Отримані вирази дають змогу визначити розподіл швидкостей у кожному із шарів, положення лінії розділу шарів і перепад тиску в потоці на ділянці стабілізованої течії. Отримані у цих роботах результати добре узгоджуються з результатами дослідів, проведених для випадку стабілізованої течії рідин.

Як зрозуміло з огляду теоретичних досліджень дво- і багатошарових течій узагальнених ньютонівських рідин, стабілізований рух вивчений досить добре. Що ж стосується гідродинамічної початкової ділянки, то через складність аналітичного опису гідромеханічних процесів, що відбуваються, основні результати отримані або в результаті фізичного моделювання течії, або розв'язком рівнянь руху за допомогою наближених і числових методів. У [2, 4, 6, 11] наведені дані з фізичного моделювання двошарової течії в'язких та степеневих рідин на початковій ділянці плоскощілинного каналу. Дані експериментів дали змогу отримати інформацію про розвиток полів

швидкостей та напружень зсуву у кожному із шарів, а також зміни положення лінії розділу шарів і величини тиску вздовж течії. Порівняння результатів розв'язку рівнянь (5) з даними експерименту дає розбіжність у значеннях перепаду тиску до 40 %, що, очевидно, викликано нехтуванням впливу на потік сил інерції від конвективного прискорення.

Гідродинамічні характеристики нестабілізованої двошарової течії. Проведений у попередньому розділі аналіз досліджень дво- і багатошарової течії рідин показав, що здебільшого вона є нестабілізованою. На потік впливають сили інерції від конвективного прискорення і по довжині гідродинамічної початкової ділянки відбувається зміна геометричних, кінематичних і динамічних параметрів потоку. Такі особливості потоку вимагають для його аналітичного опису застосування двовимірної моделі.

Для опису двошарової нестабілізованої течії узагальнених ньютонівських рідин в плоскому каналі можна використовувати системи рівнянь руху й нерозривності (6) і (7), записані для кожного шару окремо. При цьому зберігається припущення про рівність нулю градієнта тиску в напрямку осі y :

для першого шару ($0 \leq y \leq \delta_1$)

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(U_{x_1} \frac{\partial U_{x_1}}{\partial x} + U_{y_1} \frac{\partial U_{x_1}}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx_1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy_1}}{\partial y}, \\ \rho_1 \left(U_{x_1} \frac{\partial U_{y_1}}{\partial x} + U_{y_1} \frac{\partial U_{y_1}}{\partial y} \right) &= \frac{\partial \tau_{yx_1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy_1}}{\partial y}, \\ \frac{\partial U_{x_1}}{\partial x} + \frac{\partial U_{y_1}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

і для другого шару ($\delta_1 \leq y \leq H$)

$$\begin{aligned} \rho_2 \left(U_{x_2} \frac{\partial U_{x_2}}{\partial x} + U_{y_2} \frac{\partial U_{x_2}}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx_2}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy_2}}{\partial y}, \\ \rho_2 \left(U_{x_2} \frac{\partial U_{y_2}}{\partial x} + U_{y_2} \frac{\partial U_{y_2}}{\partial y} \right) &= \frac{\partial \tau_{yx_2}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy_2}}{\partial y}, \\ \frac{\partial U_{x_2}}{\partial x} + \frac{\partial U_{y_2}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Течія рідини в кожному із шарів після входу в канал спільної течії відбувається в умовах формування полів швидкостей і тисків. Границя контакту шарів на гідродинамічній початковій ділянці має вигляд кривої і при куті зустрічі потоків на вході в канал спільної течії $\alpha = 0^\circ$ (рис. 1) дотична до неї має невеликий кут нахилу (як показують результати дослідів, навіть при значних співвідношеннях витрат рідин у шарах цей кут становить близько 15°). Отже, можна зробити висновок, що гідродинамічні параметри двошарового потоку на початковій ділянці формуються поступово і рівняння систем (6) і (7) у разі течії рідин, близьких за своїми властивостями до ньютонівських, можуть бути спрощені:

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(U_{x_1} \frac{\partial U_{x_1}}{\partial x} + U_{y_1} \frac{\partial U_{x_1}}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_{x_1}}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial U_{x_1}}{\partial x} + \frac{\partial U_{y_1}}{\partial y} &= 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \left(U_{x_2} \frac{\partial U_{x_2}}{\partial x} + U_{y_2} \frac{\partial U_{x_2}}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_{x_2}}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial U_{x_2}}{\partial x} + \frac{\partial U_{y_2}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для розв'язання систем рівнянь (8) і (9) необхідно використовувати або числові методи, або наближені, до яких можна віднести метод лінеаризації рівнянь руху [1, 3], метод інтегральних співвідношень Кармана–Польгаузена, метод М.Е. Швеця і С.М. Тарга. В останніх двох методах задається рівняння, що описує розподіл швидкостей у потоці рідини на гідродинамічній початковій ділянці. Цей вираз має вигляд полінома. Його ступінь під час використання у методі інтегральних співвідношень залежить від кількості граничних умов. Далі цей вираз використовується в рівнянні імпульсів, що взаємопов'язує сили інерції, тиску й тертя.

Під час використання методу М.Е. Швеця і С.М. Тарга заданий в першому наближенні вираз для розподілу швидкостей використовується в рівняннях руху і нерозривності, з яких, після їхнього інтегрування, можна буде отримати більш повні, ніж вихідні, дані про розподіл швидкостей, а також тиску й напружень у потоці рідини.

Використаний у роботі під час розв'язання систем рівнянь (8) і (9) метод послідовного наближення М.Е. Швеця і С.М. Тарга дає змогу отримати доволі просту порівняно з вихідними, а також у результаті використання методів лінеаризації й інтегральних співвідношень систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, що описують геометричні, кінематичні і динамічні параметри двошарового потоку узагальнених ньютонівських рідин на гідродинамічній початковій ділянці.

У цьому випадку використовується метод розділення змінних, у якому локальна швидкість потоку U_x , що є функцією координат x і y , приймається рівною добутку двох функцій, одна з яких – U_k залежить тільки від поздовжньої координати x , а друга – $f(\eta)$ – тільки від поперечної координати y . Запишемо вираз для розподілу швидкостей у кожному із шарів у вигляді

$$U_x = U_k (a\eta - b\eta^3), \quad (10)$$

де U_k – швидкість на лінії контакту шарів; η – безрозмірна поперечна координата, що дорівнює: для першого шару $\eta = y/\delta_1$ і для другого шару $\eta = (H - y)/\delta_2$; a і b – коефіцієнти, причому $a - b = 1$. За такої форми запису рівняння (10) задовольняє граничним умовам прилипання рідини до стінок каналу, а при досягненні змінною y значення δ_1 локальна швидкість U_x дорівнює швидкості на границі контакту U_k . За звичайної одношарової нестабілізованої течії вираз (10) повинен також задовольняти умові $\partial U_x / \partial y = 0$ при $y = \delta_1$, що неприйнятно для двошарового потоку, по довжині якого величина $\partial U_x / \partial y$ змінює свій знак. Тому для визначення значень коефіцієнтів a і b доцільно скористатися результатами експериментальних досліджень. Визначимо лінійну швидкість деформації ($\partial U_{x1} / \partial x$), диференціюючи (10) по x :

$$\frac{\partial U_{x1}}{\partial x} = \frac{dU_k}{dx} \left(a \frac{y}{\delta_1} - b \frac{y^3}{\delta_1^3} \right) - U_k \frac{d\delta_1}{dx} \left(a \frac{y}{\delta_1^2} - 3b \frac{y^3}{\delta_1^4} \right), \quad (11)$$

а з рівняння нерозривності визначимо похідну, яка дорівнюватиме

$$\frac{\partial U_{y1}}{\partial y} = - \frac{\partial U_{x1}}{\partial x} = U_k \frac{d\delta_1}{dx} \left(a \frac{y}{\delta_1^2} - 3b \frac{y^3}{\delta_1^4} \right) - \frac{dU_k}{dx} \left(a \frac{y}{\delta_1} - b \frac{y^3}{\delta_1^3} \right). \quad (12)$$

З останнього виразу можна визначити проекцію локальної швидкості на вісь y . Для цього проінтегруємо рівняння (12)

$$U_{y1} = - \int_y \frac{\partial U_{x1}}{\partial x} dy; \quad (13)$$

$$U_{y1} = \frac{1}{4} U_k \frac{d\delta_1}{dx} \left(2a \frac{y^2}{\delta_1^2} - 3b \frac{y^4}{\delta_1^4} \right) - \frac{1}{4} \frac{dU_k}{dx} \left(2a \frac{y^2}{\delta_1} - b \frac{y^4}{\delta_1^3} \right).$$

З огляду на граничну умову прилипання рідини до стінок каналу стала інтегрування в рівнянні (13) дорівнюватиме нулю. Швидкість зсуву можна визначити з виразу (10), диференціюючи його по y :

$$\frac{\partial U_{x_1}}{\partial y} = U_k \left(a \frac{1}{\delta_1} - 3b \frac{y^2}{\delta_1^3} \right). \quad (14)$$

З першого рівняння системи (8) можна визначити прискорення зсуву:

$$\frac{\partial^2 U_{x_1}}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu_1} \frac{dP}{dx} + \frac{\rho_1}{\mu_1} \left(U_{x_1} \frac{\partial U_{x_1}}{\partial x} + U_{y_1} \frac{\partial U_{x_1}}{\partial y} \right). \quad (15)$$

З врахуванням раніше отриманих виразів (11)...(14) рівняння (15) перепишемо так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{x_1}}{\partial y^2} = & \frac{1}{\mu_1} \frac{dP}{dx} + \frac{\rho_1}{\mu_1} \left[\frac{1}{4} U_k \frac{dU_k}{dx} \left(2a^2 \frac{y^2}{\delta_1^2} - ab \frac{y^4}{\delta_1^4} + \right. \right. \\ & \left. \left. + b^2 \frac{y^6}{\delta_1^6} \right) - \frac{1}{4} U_k^2 \frac{d\delta_1}{dx} \left(2a^2 \frac{y^2}{\delta_1^3} - 7ab \frac{y^4}{\delta_1^5} + 3b^2 \frac{y^6}{\delta_1^7} \right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Останній вираз можна використовувати для визначення залежності, що описує розподіл швидкостей у першому шарі. Інтегруючи (16) двічі по y , отримаємо

$$\begin{aligned} U_{x_1} = & \frac{1}{2\mu_1} \frac{dP}{dx} y^2 + \frac{\rho_1}{\mu_1} \left[\frac{1}{3360} U_k \frac{dU_k}{dx} \left(140a^2 \frac{y^4}{\delta_1^2} - 28ab \frac{y^6}{\delta_1^4} + 15b^2 \frac{y^8}{\delta_1^6} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3360} U_k^2 \frac{d\delta_1}{dx} \left(140a^2 \frac{y^4}{\delta_1^3} - 196ab \frac{y^6}{\delta_1^5} + 45b^2 \frac{y^8}{\delta_1^7} \right) \right] + C_2 y + C_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Стала інтегрування C_3 дорівнює нулю внаслідок прилипання рідини до стінок каналу. Стала C_2 визначимо з умови рівності U_{x_1} швидкості на границі контакту шарів при $y = \delta_1$.

З врахуванням цього остаточний вираз для розподілу швидкостей у першому шарі матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} U_{x_1} = & \frac{1}{2\mu_1} \frac{dP}{dx} (y^2 - y\delta_1) + \frac{\rho_1}{\mu_1} \left\{ \frac{1}{3360} U_k \frac{dU_k}{dx} \left[\left(140a^2 \frac{y^4}{\delta_1^2} - 28ab \frac{y^6}{\delta_1^4} + 15b^2 \frac{y^8}{\delta_1^6} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (140a^2 - 28ab + 15b^2) y \delta_1 \right] - \frac{1}{3360} U_k^2 \frac{d\delta_1}{dx} \left(140a^2 \frac{y^4}{\delta_1^3} - 196ab \frac{y^6}{\delta_1^5} + 45b^2 \frac{y^8}{\delta_1^7} \right) - \right. \\ & \left. - (140a^2 - 196ab + 45b^2) y \right\} + U_k \frac{y}{\delta_1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Повторивши аналогічні операції із системою рівнянь (9) і виразом (10), отримаємо закон розподілу швидкостей і в другому шарі:

$$\begin{aligned} U_{x_2} = & \frac{1}{2\mu_2} \frac{dP}{dx} (H-y)(\delta_1-y) + \frac{\rho_2}{\mu_2} \left\{ \frac{1}{3360} U_k \frac{dU_k}{dx} \left[140a^2 \frac{(H-y)^4}{\delta_2^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 28ab \frac{(H-y)^6}{\delta_1^4} + 15b^2 \frac{(H-y)^8}{\delta_1^6} - (140a^2 - 28ab + 15b^2)(H-y)\delta_2 \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3360} U_k^2 \frac{d\delta_2}{dx} \left[140a^2 \frac{(H-y)^4}{\delta_1^3} - 196ab \frac{(H-y)^6}{\delta_2^5} + 45b^2 \frac{(H-y)^8}{\delta_2^7} - \right. \right. \\ & \left. \left. - (140a^2 - 196ab + 45b^2)(H-y) \right] \right\} + U_k \frac{(H-y)}{\delta_2}. \end{aligned} \quad (19)$$

З рівнянь (18) і (19) отримаємо вираз для визначення об'ємної витрати на одиницю ширини каналу в кожному із шарів

$$Q_1 = \int_0^{\delta_1} U_{x_1} dy \quad \text{і} \quad Q_2 = \int_{\delta_1}^H U_{x_2} dy,$$

отже,

$$Q_1 = -\frac{1}{12\mu_1} \frac{dP}{dx} \delta_1^3 + \frac{\rho_1}{\mu_1} \left[\frac{1}{20160} U_k^2 \frac{d\delta_1}{dx} (252a^2 - 420ab + 105b^2) \delta_1^2 - \frac{1}{20160} U_k \frac{dU_x}{dx} (252a^2 - 60ab + 35b^2) \delta_1^3 \right] + \frac{1}{2} U_k \delta_1; \quad (20)$$

$$Q_2 = -\frac{1}{12\mu_2} \frac{dP}{dx} \delta_2^3 + \frac{\rho_2}{\mu_2} \left[\frac{1}{20160} U_k^2 \frac{d\delta_2}{dx} (252a^2 - 420ab + 105b^2) \delta_2^2 - \frac{1}{20160} U_k \frac{dU_x}{dx} (252a^2 - 60ab + 35b^2) \delta_2^3 \right] + \frac{1}{2} U_k \delta_2. \quad (21)$$

З рівнянь (20) і (21) можуть бути визначені градієнти тиску dp/dx , що забезпечують протікання рідини в кожному шарі із заданою витратою. Для першого шару:

$$\frac{dp_1}{dx} = \frac{\rho_1}{\delta_1} \left[\frac{1}{1680} U_k^2 \frac{d\delta_1}{dx} (252a^2 - 420ab + 105b^2) - \frac{1}{1680} U_k \frac{dU_x}{dx} (252a^2 - 60ab + 35b^2) \delta_1 \right] + 6 \frac{\mu_1 U_k}{\delta_1^2} - 12 \frac{\mu_1 Q_1}{\delta_1^3}; \quad (22)$$

для другого шару з врахуванням того, що $\frac{d\delta_2}{dx} = -\frac{d\delta_1}{dx}$:

$$\frac{dp_2}{dx} = \frac{\rho_2}{\delta_2} \left[\frac{1}{1680} U_k^2 \frac{d\delta_2}{dx} (252a^2 - 420ab + 105b^2) - \frac{1}{1680} U_k \frac{dU_x}{dx} (252a^2 - 60ab + 35b^2) \delta_2 \right] + 6 \frac{\mu_2 U_k}{\delta_2^2} - 12 \frac{\mu_2 Q_2}{\delta_2^3}. \quad (23)$$

Відповідно до граничних умов (3) повинна виконуватися умова рівності дотичних напружень на границі контакту шарів, тобто $\tau_{xy1} = \tau_{xy2} = \tau_k$:

$$\tau_k = \mu_1 \frac{dU_{x1}}{dy} \Big|_{y=\delta_1} = \mu_2 \frac{\partial U_{x2}}{\partial y} \Big|_{y=\delta_1}.$$

Отже, для першого шару

$$\tau_{k1} = \rho_1 \left[\frac{1}{3360} U_k \frac{dU_k}{dx} (168a^2 - 80ab + 70b^2) \delta_1 + \frac{1}{3360} U_k^2 \frac{d\delta_1}{dx} (168a^2 - 560ab + 210b^2) \right] + 4 \frac{\mu_1 U_k}{\delta_1} - 6 \frac{\mu_1 Q_1}{\delta_1^2}; \quad (24)$$

для другого шару

$$\tau_{k2} = \rho_2 \left[\frac{1}{3360} U_k \frac{dU_k}{dx} (168a^2 - 80ab + 70b^2) \delta_2 + \frac{1}{3360} U_k^2 \frac{d\delta_1}{dx} (168a^2 - 560ab + 210b^2) \right] - 4 \frac{\mu_2 U_k}{\delta_2} + 6 \frac{\mu_2 Q_2}{\delta_2^2}. \quad (25)$$

Використовуючи умови рівності градієнтів тиску в кожному із шарів, а також дотичних напружень на границі контакту, з (22) і (23), а також (24) і (25) одержимо систему двох диференціальних рівнянь

$$U_k \frac{dU_k}{dx} \frac{84a^2 - 40ab + 35b^2}{3360} (\rho \delta_1 + \rho_2 \delta_2) + U_k^2 \frac{d\delta_1}{dx} \frac{84a^2 - 280ab + 105b^2}{3360} (\rho_2 - \rho_1) = B_1; \quad (26)$$

$$U_k \frac{dU_k}{dx} \frac{252a^2 - 60ab + 35b^2}{10080} (\rho_2 - \rho_1) + U_k^2 \frac{d\delta_1}{dx} \frac{252a^2 - 420ab + 105b^2}{10080} \left(\frac{\rho_1}{\delta_1} + \frac{\rho_2}{\delta_2} \right) = B_2, \quad (27)$$

де

$$B_1 = 3 \left(\frac{\mu_1 Q_1}{\delta_1^2} + \frac{\mu_2 Q_2}{\delta_2^2} \right) - 2U_k \left(\frac{\mu_1}{\delta_1} + \frac{\mu_2}{\delta_2} \right);$$

$$B_2 = 2 \left(\frac{\mu_1 Q_1}{\delta_1^3} - \frac{\mu_2 Q_2}{\delta_2^3} \right) - U_k \left(\frac{\mu_1}{\delta_1^2} - \frac{\mu_2}{\delta_2^2} \right).$$

Запишемо рівняння (26) і (27) у нормальній формі Коші:

$$\frac{dU_k}{dx} = \frac{3360 \left(\frac{\rho_1}{\delta_1} + \frac{\rho_2}{\delta_2} \right) B_1}{U_k (84a^2 - 40ab + 35b^2) \left[(\rho_1 \delta_1 + \rho_2 \delta_2) \left(\frac{\rho_1}{\delta_1} + \frac{\rho_2}{\delta_2} \right) - (\rho_2 - \rho_1)^2 \right]} - \frac{10080(\rho_2 - \rho_1)B_2}{U_k (252a^2 - 420ab + 105b^2) \left[(\rho_1 \delta_1 + \rho_2 \delta_2) \left(\frac{\rho_1}{\delta_1} + \frac{\rho_2}{\delta_2} \right) - (\rho_2 - \rho_1)^2 \right]}; \quad (28)$$

$$\frac{d\delta_1}{dx} = \frac{10080(\rho_1 \delta_1 + \rho_2 \delta_2)B_2}{U_k^2 (252a^2 - 420ab + 105b^2) \left[(\rho_1 \delta_1 + \rho_2 \delta_2) \left(\frac{\rho_1}{\delta_1} + \frac{\rho_2}{\delta_2} \right) - (\rho_2 - \rho_1)^2 \right]} - \frac{3360(\rho_2 - \rho_1)B_1}{U_k^2 (84a^2 - 40ab + 35b^2) \left[(\rho_1 \delta_1 + \rho_2 \delta_2) \left(\frac{\rho_1}{\delta_1} + \frac{\rho_2}{\delta_2} \right) - (\rho_2 - \rho_1)^2 \right]}. \quad (29)$$

Ці рівняння дають змогу отримати дані про геометричні й кінематичні характеристики двошарового потоку узагальнених ньютонівських рідин. Для визначення перепаду тиску по довжині потоку можна скористатися рівняннями (22) чи (23). У разі течії рідини, що незначно відрізняється одна від одної густиною, рівняння (28) і (29) істотно спрощуються і набувають вигляд

$$\frac{dU_k}{dx} = \frac{3360}{84a^2 - 40ab + 35b^2} \frac{B_1}{U_k \rho H} \quad (30)$$

і

$$\frac{d\delta_1}{dx} = \frac{3360}{84a^2 - 140ab + 35b^2} \frac{\delta_1 \delta_2 B_1}{U_k^2 \rho H}. \quad (31)$$

Тоді градієнт тиску у двошаровому потоці дорівнюватиме:

$$\frac{dP}{dx} = 6B_2 \frac{\delta_2}{H} - 2 \frac{252a^2 - 60ab + 35b^2}{84a^2 - 40ab + 35b^2} \frac{B_1}{H} + 6 \frac{\mu_1 U_k}{\delta_1^2} - 12 \frac{\mu_1 Q_1}{\delta_1^3}. \quad (32)$$

Можна припустити, що для визначення перепаду тиску при двошаровій течії рідин на гідродинамічній початковій ділянці можна використовувати формулу, структура якої аналогічна до формул для визначення втрат тиску при одношаровій нестабілізованій течії рідини. Тоді залежність для визначення перепаду тиску при двошаровій течії рідини матиме вигляд

$$\frac{2\Delta P}{\rho V^2} = \frac{24}{Re} \frac{l_{n.d.}}{H} + C. \quad (33)$$

Величина C , що враховує додаткові втрати тиску, пов'язані з переформуванням границі контакту шарів і епюри швидкостей, повинна залежати від співвідношення об'ємних витрат рідин у шарах Q_1/Q_2 і їх реологічних властивостей, у більш загальному випадку – від співвідношення чисел Рейнольдса в кожному із шарів Re_1/Re_2 . Загальне число Рейнольдса, що входить у вираз (33), доцільно визначати за такою залежністю [12]:

$$Re = 4 \frac{Re_1 Re_2}{Re_1 \frac{V_2^2}{V^2} + Re_2 \frac{V_1^2}{V^2}}, \quad (34)$$

де V – середня швидкість двошарового потоку.

Отже, якщо для двошарового потоку використовувати запропоновану форму запису числа Рейнольдса, то втрати тиску можна визначати за залежністю (33). З врахуванням того, що стала у цій формулі повинна залежати від інтенсивності зміни товщин шарів на ділянці формування параметрів двошарового потоку, то цю залежність можна подати у вигляді

$$\frac{2\Delta P}{\rho V^2} = \frac{24}{Re} \frac{l_{n.d.}}{H} + C(Re_1/Re_2). \quad (35)$$

Слід чекати, що під час інтенсивнішої зміни товщин шарів на гідродинамічній початковій ділянці, її довжина буде зменшуватися, а величина $C(Re_1/Re_2)$ внаслідок інтенсивнішого гасіння кінетичної енергії в області зустрічі потоків зростатиме. Для визначення переважаючого впливу на втрати тиску величин $l_{n.d.}$ і $C(Re_1/Re_2)$ необхідні подальші числові й експериментальні дослідження.

Найважливішими геометричними характеристиками нестабілізованої двошарової течії рідин є довжина гідродинамічної початкової ділянки й закон зміни товщини шарів по довжині потоку. Для визначення довжини гідродинамічної початкової ділянки застосовується формула

$$l_{n.d.} = C_H H Re,$$

де C_H – коефіцієнт пропорційності.

Для звичайних течій рідини в плоскому каналі за даними [5] коефіцієнт C_H можна прийняти таким, що дорівнює 0,04. Багато дослідників, які вивчають нестабілізовані течії рідини, вважають, що на вході в канал має місце рівномірний розподіл швидкостей. Однак при течії високов'язких рідин такий розподіл швидкостей зустрічається лише в тому випадку, коли форма входу в канал описується лемніскатою. А при течії декількох шарів рідин епюра розподілу швидкостей змінюється від двох парабол до епюри, що відповідає стабілізованій течії. Крім того, на довжину гідродинамічної початкової ділянки істотно впливатиме динамічна взаємодія шарів рідин, що збільшується в міру збільшення співвідношення Re_1/Re_2 . Вплив співвідношення чисел Рейнольдса в шарах Re_1/Re_2 доцільно врахувати в коефіцієнті C_H . Тоді формула для визначення довжини гідродинамічної початкової ділянки при двошаровій течії рідин матиме такий вигляд:

$$l_{n.d.} = C_H (Re_1/Re_2) H Re. \quad (36)$$

Значення коефіцієнта C_H для часткового випадку сталого положення лінії контакту шарів по довжині початкової ділянки можна отримати з формули (30). Таким чином, якщо об'ємні витрати рідин у шарах рівні $Q_1 = Q_2 = Q/2$, а рідини мають однакові реологічні властивості $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ і $\delta_1 = \delta_2 = H/2$, то рівняння (30) можна записати в такий спосіб:

$$\frac{dUk}{dx} = \frac{13440}{79a^2 - 30a + 35} \frac{\mu}{\rho H^2} \frac{3V - 2Uk}{Uk} \quad (37)$$

або

$$dx = \frac{79a^2 - 30a + 35}{13440} \frac{\rho H^2}{\mu} \frac{Uk}{3V - 2Uk} dUk.$$

Інтегрування цього рівняння дає можливість визначити довжину ділянки стабілізації потоку для цього часткового випадку двошарової течії рідини

$$x = \frac{79a^2 - 30a + 35}{13440} \frac{\rho H^2}{\mu} \int_{U_k} \frac{U_k}{3V - 2U_k} dU_k$$

або

$$x = -\frac{79a^2 - 30a + 35}{26880} \frac{\rho H^2}{\mu} [U_k + \frac{2}{3}V \ln(3V - 2U_k)] \Big|_{U_{k0}}^{U_{kcm}}. \quad (38)$$

Відомо, що при ламінарній течії в'язкої рідини в плоскощільному каналі максимальна швидкість U_{max} дорівнює $3/2V$. У даному випадку це відбувається наприкінці ділянки стабілізації потоку. Із залежності (2.56) зрозуміло, що наближення профілю швидкостей на гідродинамічній початковій ділянці до стабілізованого відбувається асимптотично на нескінченно великій відстані. Прийmemo, що початкова ділянка закінчується в тому місці потоку, де значення швидкостей відрізняється від стабілізованих не більше ніж на 1%. У такому разі швидкість на границі контакту дорівнюватиме $1,485V$, а в області зустрічі потоків швидкість на границі контакту дорівнює нулю. Використавши ці значення U_k у виразі (38), визначимо величину C_H у формулі (36) для різних значень коефіцієнтів a і b (стовпчик 4, таблиця 1). Якщо прийняти, що на вході в канал мав місце рівномірний розподіл швидкостей, тобто $U_k = V$, то з формули (38) отримаємо величину C_H для звичайної нестабілізованої одношарової течії (стовпчик 3, таблиця 1). З таблиці зрозуміло, що значення C_H у разі одношарової течії менше від відповідного для двошарової нестабілізованої течії, що викликано меншим ступенем деформації епюри швидкостей на гідродинамічній початковій ділянці. Використовуючи вирази (35) і (36), можна визначити величину C у формулі (35), значення якої для одно- і двошарової течії наведено в табл. 1. Як показали порівняння з результатами, наведеними в роботі [3] ($C_H = 0.04$, $C = 0.63$), а також проведені для випадку двошарової течії експериментальні дослідження, у формулі (10) доцільно використовувати коефіцієнти $a = 1.75$ і $b = 0.75$. Тоді вирази (30)–(32) наберуть вигляду:

$$\frac{dU_k}{dx} = 14.97 \frac{B_1}{U_k \rho H}; \quad (39)$$

$$\frac{d\delta_1}{dx} = 36.056 \frac{\delta_1 \delta_2 B_2}{U_k^2 \rho H}; \quad (40)$$

$$\frac{dP}{dx} = 6 \frac{\delta_2 B_2}{H} - 6.35 \frac{B_1}{H} + 6 \frac{\mu_1 U_k}{\delta_1^2} - 12 \frac{\mu_1 Q_1}{\delta_1^3}. \quad (41)$$

Деякі гідродинамічні характеристики одно- і двошарової ($\delta_1 = \delta_2$, $Q_1 = Q_2$, $\mu_1 = \mu_2$) нестабілізованої течії для різних значень a і b у формулі (10)

| a | b | Величина C_H у формулі (36) | | Величина C у формулі (35) | |
|------|------|-------------------------------|-----------------|-----------------------------|-----------------|
| | | одношарова течія | двошарова течія | одношарова течія | двошарова течія |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1,0 | 0 | 0,0149 | 0,0169 | 0,27 | 0,49 |
| 1,5 | 0,5 | 0,0298 | 0,0338 | 0,56 | 1,03 |
| 1,75 | 0,75 | 0,0399 | 0,0453 | 0,74 | 1,37 |
| 2,0 | 1,0 | 0,0511 | 0,0581 | 0,99 | 1,71 |
| 3,0 | 2,0 | 0,116 | 0,132 | 2,176 | 3,99 |

Як показують проведені дослідження, а також дані робіт [2, 3], на гідродинамічній початковій ділянці лінія розділу шарів має вигляд кривої, а її положення в загальному випадку повинно залежати як від довжини ділянки стабілізації $l_{n.d.}$, так і співвідношення чисел Рейнольдса в шарах

(Re_1/Re_2). Товщину одного із шарів, наприклад першого, можна записати у вигляді функціональної залежності

$$\delta_1(x) = f(x, Re_1, Re_2). \quad (42)$$

Числовий розв'язок рівнянь (39) – (41) уможливив отримати дані про геометричні, кінематичні та динамічні характеристики двошарової нестабілізованої течії в'язких рідин. Проведене математичне моделювання нестабілізованої двошарової течії рідин у плоскому каналі дало змогу з'ясувати залежність довжини гідродинамічної початкової ділянки від таких чинників, як співвідношення чисел Рейнольдса в шарах і загального числа Рейнольдса двошарового потоку. Як бачимо з наведених на рис. 2 даних про формування границі контакту шарів для сталого числа Рейнольдса, збільшення співвідношення Re_1/Re_2 викликає зменшення довжини гідродинамічної початкової ділянки, що пояснюється інтенсивнішою дисипацією кінетичної енергії кожного із шарів в області зустрічі потоків внаслідок їхньої взаємодії.

Застосування для визначення довжини початкової ділянки формули (36) за фіксованих значень δ_1/H дало змогу одержати залежність $l_{n.d.} = f(Re)$, що, як зрозуміло з рис. 2, має лінійний характер. Показані на рис. 2 і 3 дані дають можливість зробити висновок про те, що коефіцієнт пропорційності C_H у формулі (36) для визначення довжини початкової ділянки у разі двошарової течії залежить від величини (Re_1/Re_2). Отже, для визначення величини $l_{n.d.}$ доцільно використовувати залежність (36).

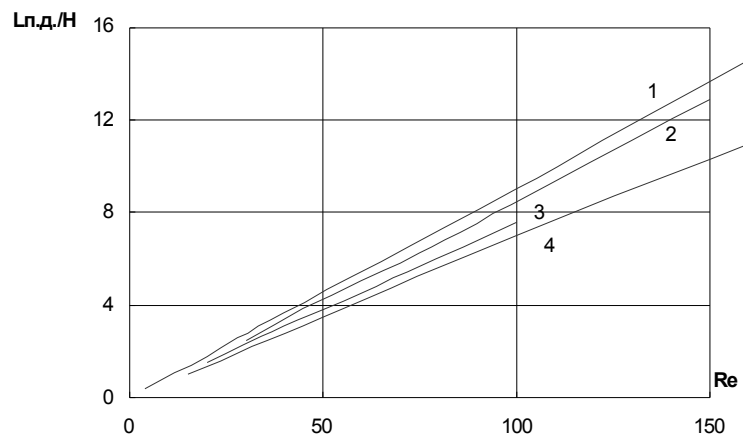


Рис. 2. Залежність довжини початкової ділянки від числа Рейнольдса для різних товщин δ_1/H першого шару: 1 – 0,5; 2 – 0,61; 3 – 0,67; 4 – 0,71

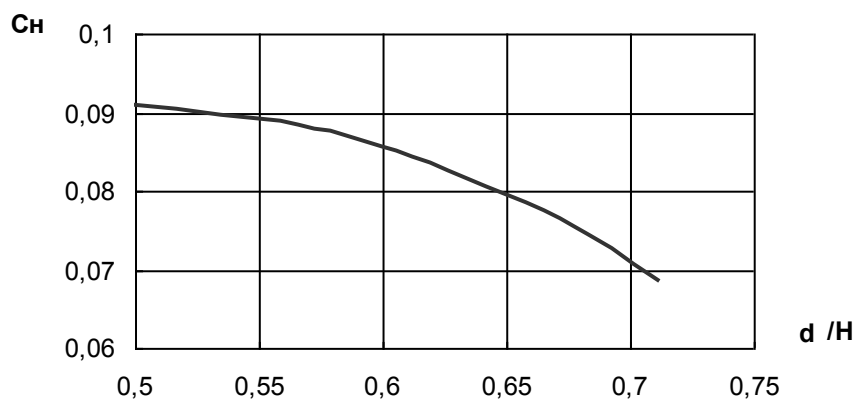


Рис. 3. Залежність коефіцієнта довжини початкової ділянки від товщини першого шару

Розрахунок розподілу швидкостей на лінії контакту шарів гідродинамічної початкової ділянки двошарового потоку показав істотну відмінність кінематичних характеристик двошарового потоку від одношарового. В одношаровому потоці осьова швидкість змінюється від деякої вхідної, часто рівної середній (залежно від умов входу в канал), до тієї, що відповідає стабілізованій течії.

Для двошарової ж течії швидкість на границі контакту шарів змінюється від значення, близького до нуля, до значення, що відповідає стабілізованій течії. Графічна залежність зміни швидкості на границі контакту шарів показана на рис. 4.

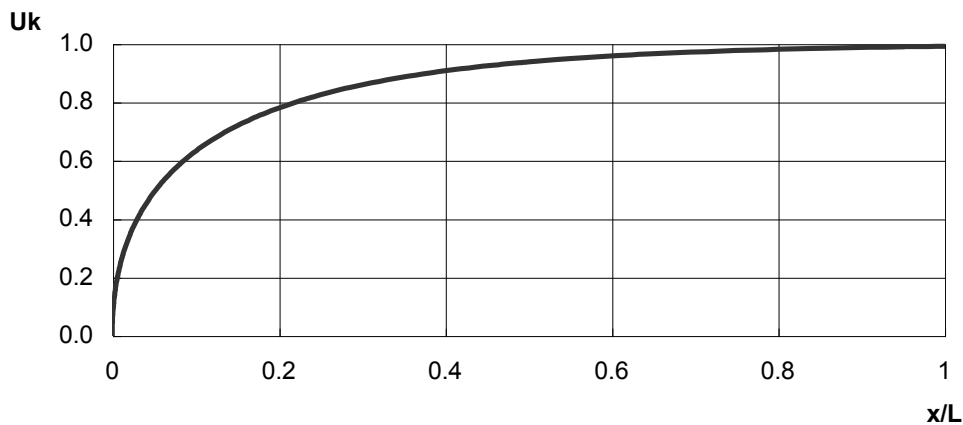


Рис. 4. Зміна швидкості на границі контакту шарів по довжині початкової ділянки

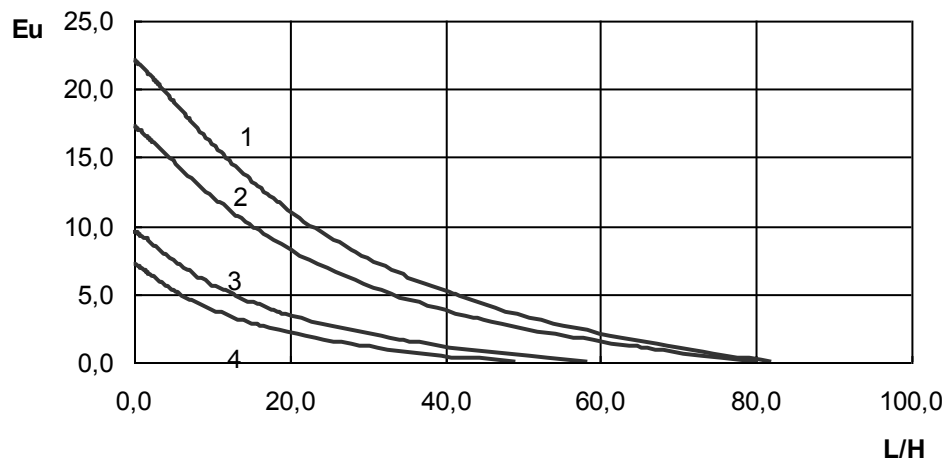


Рис. 5. Зміна критерію Ейлера по довжині двошарового потоку для різних величин товщини першого шару δ_1 / H : 1 – 0,5; 2 – 0,57; 3 – 0,67; 4 – 0,71 ($Re = 100$)

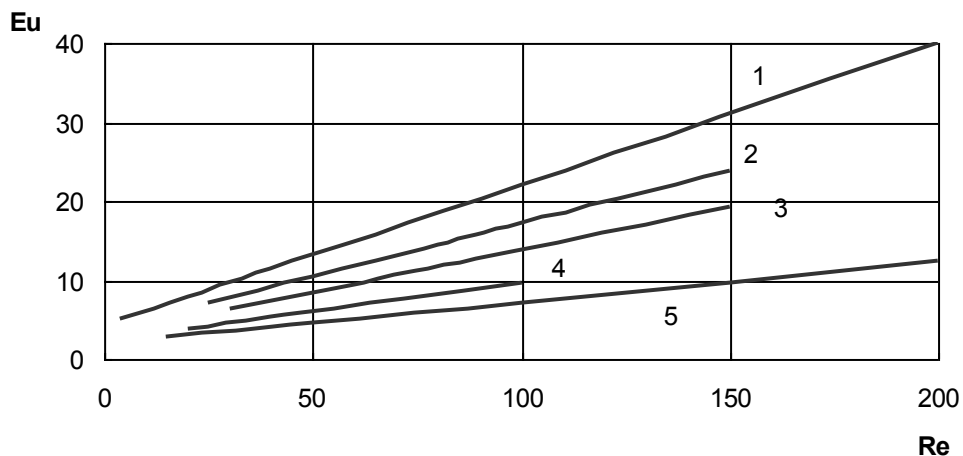


Рис. 6. Залежність зміни критерію Ейлера від числа Рейнольдса для різних товщин першого шару δ_1 / H : 1 – 0,5; 2 – 0,57; 3 – 0,61; 4 – 0,67; 5 – 0,71

Подібно до геометричних і кінематичних параметрів відрізняються від звичайної одношарової течії і динамічні характеристики двошарового нестабілізованого потоку. За двошарової течії, коли лінія контакту шарів має вигляд прямої лінії, втрати тиску мають більшу величину, ніж за одношарової течії з такими самими характеристиками потоку. Це викликано

більшою деформацією епюри розподілу швидкостей на гідродинамічній початковій ділянці. За збільшення співвідношення витрат в шарах перепад тиску в області зустрічі потоків зменшується, що викликано зменшенням довжини гідродинамічної початкової ділянки. Однак зі збільшенням Q_1/Q_2 також збільшується і градієнт тиску $\partial p/\partial x$, що свідчить про інтенсивніші процеси дисипації енергії в області зустрічі потоків. Це можна спостерігати на графіках, показаних на рис. 5 і 6.

Висновки. Проведені дослідження двошарової течії рідин дали можливість уточнити методику гідравлічного розрахунку технологічного обладнання. Але розв'язок системи рівнянь руху для випадку нестабілізованої двошарової течії узагальнених ньютонівських рідин є наближеним унаслідок використання рівнянь пограничного шару й апроксимації епюри розподілу швидкостей у кожному з шарів на вході в канал спільної течії за допомогою полінома. У зв'язку з цим, для перевірки правильності отриманих результатів математичного моделювання і у разі потреби їхнього корегування, що полягає в уточненні коефіцієнтів, що входять у рівняння (31)–(33), а також доповнення даних математичного моделювання новими, доцільно провести фізичне моделювання двошарової течії узагальнених ньютонівських рідин в плоскому каналі.

1. Воронцов Е.Г., Яхно О.М. Исследование нестабилизированного многослойного пленочного течения // *Хим. машиностроение: Респ. межвед. науч.-техн. сб.* – 1985. – Вып. 41. – С. 23–28. 2. Экспериментальные исследования начального участка при двухслойном течении вязких жидкостей / В.А. Ануфриев, Ю.Е. Лукач, А.Д. Петухов, О.М. Яхно // *Гидравлика и гидротехника: Респ. межвед. науч.-техн. сб.* – 1977. – Вып. 24. – С. 85–90. 3. Яхно О.М. Кинематические характеристики двухслойного потока вязкой жидкости на начальном участке // *Гидравлика и гидротехника: Респ. межвед. науч.-техн. сб.* – 1983. – Вып. 37. – С. 48 – 52. 4. Chin H.B., Kirn G.J., Han C.D. A study on non – isothermal flat -film coextrusion // *Pol. Eng. Rev.*, – 1984. – V. 4. – № 4. – P. 281 – 311. 5. Shu T.E., Charmchi M., Chen S.J. A theoretical study of non – isothermal multi – layer stratified flows between parallel plates // *J. Polym. Eng.* – 1987. – V.7. – № 4. – P. 255 – 274. 6. Sornberger G., Vergnes B., Agassant J.F. Coextrusion flow of two molten polymers between parallel plates: non isothermal computation and experimental study // *Polym. Eng. and Sci.* – 1986. – V. 26. – № 10. – P. 682 – 689. 7. Особенности стратифицированного течения аномально-вязких жидкостей / В.А. Ануфриев, Ю.Е. Лукач, А.Д. Петухов, О.М. Яхно // *Гидравлика и гидротехника: Респ. межвед. науч.-техн. сб.* – 1979. – Вып. 29. – С. 3–8. 8. Хан Ч.Д. Реология в процессах переработки полимеров. – М., 1979. 9. Бабчин А.И., Леви С.М. О течении нескольких слоев вязкой жидкости по наклонной плоскости экструдера поливной машины // *Журн. прикл. и науч. фотографии и кинематографии.* – 1965. – Т. 17, № 10. – С. 344 – 347. 10. Бабчин А.И., Леви С.М. О течении нескольких слоев пластичновязкой жидкости по наклонной плоскости экструдера поливной машины // *Журн. прикл. и науч. фотографии и кинематографии.* – 1973. – Т. 17, № 5. – С. 108 – 111. 11. Goto Seiji, Kafco Hiroshi. Stratified two - component flow of polymer solutions // *Bull. JSME.* – 1984. –V. 27.– № 223. – P. 30 – 37. 12. Яхно О.М., Желяк В.И., Сивак П.В., Хади А.А. Анализ возможного метода расчета критерия Рейнольдса для двухслойных потоков // *Хим. машиностроение: Респ. межвед. науч.-техн. сб.* – 1992. – Вып. 55. – С. 3 – 8. 13. An arbitrary Lagrangian+Eulerian approach for simulating stratified viscoelastic fluids / H. Yamaguchia, A. Mishimaa, T. Yasumotoa, T. Ishikawab // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* – 2000. – №89. –PP. 251–272.