

переміщення вгору під дією ТРМ та донизу під дією зміни зусилля стискання електродів; градієнт зміни швидкості (прискорення) в області прояву ТРМ та області осаджування.

1. Орлов Б.Д. Проблемы контроля при контактной сварке / Тезисы докладов Всесоюзной научн.-техн. конф. "Проблемы совершенствования контактной сварки". – Псков, 22–24.09.1987. – С. 68–71. 2. Орлов Б.Д., Чулошников П.Л., Верденский В.Б. и др. Контроль точечной и роликовой электросварки. – М.: Машиностроение, 1973. – 304 с. 3. Рудзит Р.Б., Бумбиерис Э.В. Автоматический контроль процесса контактной микросварки по изменению силы сжатия электродов // Авт. сварка. – 1978. – № 11. 4. Козловский С.Н. Контроль и регулирование процесса контактной точечной сварки // Неразрушающий контроль и системы управления качеством сварн. и паян. соед. – М.: Знание, 1992. – С.64–66. 5. Тиль Р. Электрические измерения неэлектрических величин. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 192 с.

УДК 621.3.045

В.І. Будзан\*, В.М. Віннік

Національний університет "Львівська політехніка",  
\*кафедра охорони праці,  
кафедра деталей машин

## МЕТОДИКА ЗНАХОДЖЕННЯ СИЛОВИХ ТА КІНЕМАТИЧНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ У НАМОТУВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ З ДВОМА НЕКРУГЛИМИ БАРАБАНАМИ

© Будзан В.І., Віннік В.М., 2005

Специфіка роботи намотувальних систем з кінематичним збудженням полягає в тому, що в них практично немає усталеного періоду руху. В процесі намотування змінюється: довжина (тобто податливість) матеріалу між барабанами, радіуси-вектори точок набігання матеріалу на приймальний барабан та збігання його з віддавального барабана, кути між матеріалом та згаданими радіусами-векторами барабанів.

Зазначені зміни параметрів враховані в розробленій авторами математичній моделі динаміки намотувальної системи з двома барабанами.

The paper presents the mathematical equations motion of the winding system that consists of the two non-round cross section coils. The main problem of this task consists in the system stiffness change that connected with the jumping-like change of the flexible element length. The equations of the mechanical system motion are obtained and the flexible element length change is described.

Намотувальні системи з кінематичним збудженням – результат конструктивних розробок (для намотування котушок некругового профілю), або неточності виготовлення і монтажу барабанів, або наслідок їх експлуатації.

У процесі намотування змінюються: довжина (тобто податливість) матеріалу між барабанами, радіуси-вектори точок набігання матеріалу на приймальний барабан та збігання його з віддавального барабана, кути між матеріалом та згаданими радіусами-векторами барабанів. Навіть без врахування пружного ковзання матеріалу по барабанах математично подати процес роботи такої системи дуже складно. Врахування жорсткості матеріалу можливе тільки у диференціальній формі. Особливі складності виникають під час аналізу систем з барабанами, поперечні перерізи яких описано кусково-безперервними лініями (наприклад: прямокутниками з коловими спряженнями кутів).

Розглядом подібних систем, їх вивченням можна запобігати екстремальним режимам роботи намотувальних установок та виготовленню неякісної продукції.

Розглянемо систему зовнішнього намотування з барабанами некругового поперечного профілю.

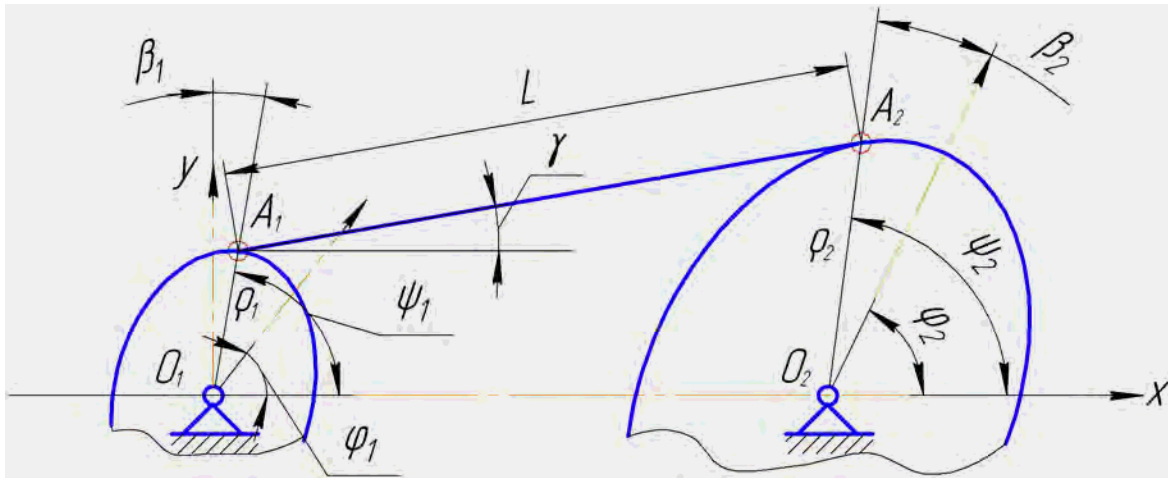


Рис. 1. Розрахункова схема намотувальної системи

Нехай радіуси барабанів в полярних системах координат з центрами на осях обертання барабанів подано залежностями  $\rho_1(\beta_1)$  та  $\rho_2(\beta_2)$ . Тоді поточні значення радіусів-векторів точок контакту матеріалу, що намотується, з барабанами знаходяться при  $\beta_1 = \psi_1 - \varphi_1$  та  $\beta_2 = \psi_2 - \varphi_2$ , де  $\psi$  – кути між віссю, що проходить через центри обертання барабанів, та радіус-векторами точок контакту, а  $\varphi$  – кути повороту барабанів.

Якщо  $\alpha_w$  – міжцентрова відстань, а  $\gamma$  – кут нахилу матеріалу до осі абсцис, можна записати такі геометричні співвідношення:

$$l^2 = (\alpha_w + \rho_2 \cos \psi_2 - \rho_1 \cos \psi_1)^2 + (\rho_2 \sin \psi_2 - \rho_1 \sin \psi_1)^2 = \alpha_w^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\alpha_w(\rho_2 \cos \psi_2 - \rho_1 \cos \psi_1) - 2\rho_1\rho_2 \cos(\psi_2 - \psi_1); \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\rho_2 \sin \psi_2 - \rho_1 \sin \psi_1}{\alpha_w + \rho_2 \cos \psi_2 - \rho_1 \cos \psi_1}; \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1 + \frac{\rho_j'}{\rho_j} \operatorname{tg} \psi_j}{\frac{\rho_j'}{\rho_j} - \operatorname{tg} \psi_j}, \quad j=1,2, \quad (3)$$

тут і далі  $\rho_j = \rho_j(\beta_j) \equiv \rho_j(\psi_j - \varphi_j)$ .

$$\rho_j' = \frac{\partial \rho_j(\beta_j)}{\partial \beta_j}; \quad (4)$$

Введемо позначення

$$r_j = \frac{L_j}{2\pi}, \quad \mu_j = \frac{\rho_j'}{\rho_j} = \operatorname{ctg}(\gamma - \psi_j),$$

де  $r_j$  – еквівалентні радіуси барабанів: радіуси кругових поперечних перерізів барабанів, довжини яких дорівнюють периметрам  $L$  відповідних некругових барабанів.

Якби намотувальна система мала кругові барабани еквівалентних радіусів, залежності (1), (2) мали б вигляд:

$$\ell_0^2 = (\alpha_w + (r_2 - r_1) \cos \psi_0)^2 + ((r_2 - r_1) \sin \psi_0)^2 = \alpha_w^2 - (r_2 - r_1)^2;$$

$$\operatorname{tg} \gamma_0 = \frac{r_2 - r_1}{l_0} = -\operatorname{ctg} \psi_0;$$

$$\cos \psi_0 = -\sin \gamma_0 = -\frac{r_2 - r_1}{\alpha_w}.$$

Залежності (2) і (3) можна записати у вигляді:

$$\frac{\rho_2 \sin \psi_2 - \rho_1 \sin \psi_1}{\alpha_w + \rho_2 \cos \psi_2 - \rho_1 \cos \psi_1} = \frac{1 + \mu_j \operatorname{tg} \psi_j}{\mu_j - \operatorname{tg} \psi_j}, \quad j=1,2. \quad (5)$$

Геометричні співвідношення (1)...(4) доповнюються рівняннями руху барабанів:

$$T_1 - J_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + F \rho_1 (1 + \mu_1^2)^{-\frac{1}{2}} = 0; \quad (6)$$

$$F_2 \rho_2 (1 + \mu_2)^{-\frac{1}{2}} - J_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - T_2 = 0, \quad (7)$$

де  $F$  – зусилля натягу матеріалу, що намотується;  $T_j$  – крутний момент, прикладений до барабанів (вважають, що  $T_1$  – момент рушійний,  $T_2$  – момент опору, а тому взятий із знаком мінус);  $J_j$  – момент інерції барабану;  $t$  – час.

Доповнимо геометричні та силові співвідношення рівнянням деформації матеріалу між барабанами в диференціальній формі:

$$-\rho_1 d\beta_1 (1 + \mu_1^2)^{\frac{1}{2}} + \rho_2 d\beta_2 (1 + \mu_2^2)^{\frac{1}{2}} = d\left(\frac{Fl}{\alpha}\right). \quad (8)$$

Тут  $\alpha = EA$  – жорсткість поперечного перерізу матеріалу для розтягу ( $E$  – модуль потужності матеріалу,  $A$  – площа поперечного перерізу).

Для випуклих барабанів, поперечний переріз яких обмежується безперервною диференційованою кривою, рівняння (6), (7), (8) дещо спроститься після розкладу лівих частин в ряд за параметрами  $\mu^2$ :

$$T_1 - J_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + F \rho_1 \left(1 + \frac{1}{2} \mu_1^2\right) = 0; \quad (9)$$

$$F_2 \rho_2 \left(1 + \frac{1}{2} \mu_2^2\right) - J_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - T_2 = 0; \quad (10)$$

$$-\rho_1 d\beta_1 \left(1 + \frac{1}{2} \mu_1^2\right) + \rho_2 d\beta_2 \left(1 + \frac{1}{2} \mu_2^2\right) = d\left(\frac{Fl}{\alpha}\right). \quad (11)$$

Рівняння (5) після спрощень має вигляд:

$$\mu_1 \rho_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) + \rho_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) + \alpha_w (\cos \psi_1 + \mu_1 \sin \psi_1) - \rho_1 = 0; \quad (12)$$

$$\mu_2 \rho_1 \sin(\psi_1 - \psi_2) - \rho_1 \cos(\psi_1 - \psi_2) + \alpha_w (\cos \psi_2 + \mu_2 \sin \psi_2) + \rho_2 = 0. \quad (13)$$

Прирівнювання правих частин (5) доповнює (12) та (13) додатковою залежністю

$$(\mu_2 - \mu_1) \cos(\psi_1 - \psi_2) + (1 + \mu_1 \mu_2) \sin(\psi_1 - \psi_2) = 0 \quad (14)$$

Розв'язки (12) та (13) як системи рівнянь відносно  $\cos \psi_j$  з врахуванням (14) є досить громіздкими функціями від  $\rho_j$  та  $\mu_j$ .

Після спрощень (що полягають в розкладанні цих функцій в ряд Маклорена за параметрами  $\mu$  з точністю до малих величин) отримуємо залежності:

$$\cos \psi_1 = -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\alpha_w} + \mu_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\alpha_w}\right)^2} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\alpha_w} \mu_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\alpha_w} \mu_1 \mu_2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\alpha_w} \mu_2^2; \quad (15)$$

$$\cos \psi_2 = -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\alpha_w} + \mu_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\alpha_w}\right)^2} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\alpha_w} \mu_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\alpha_w} \mu_1 \mu_2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\alpha_w} \mu_1^2. \quad (16)$$

Легко переконатися, що для еквівалентної намотувальної системи з круговими барабанами ( $\rho_j = r_j, \mu_j = 0$ ) залежності (15), (16) перетворюються в зазначені раніше

$$\cos \psi_j = \cos \psi_0 = -\frac{r_2 - r_1}{\alpha_w}.$$

Розклавши косинуси в ряд Тейлора, в околиці параметрів еквівалентної намотувальної системи можна знайти взаємозв'язок між  $\varphi_j$  і  $\beta_j$ :

$$\beta_j \cong -\varphi_j + \psi_0 - \operatorname{tg} \psi_0 + \sqrt{\operatorname{tg} \psi_0 + 2 - \frac{2z_j}{\cos \psi_0}}, \quad (17)$$

де  $z_j$  – права частина залежностей (15), (16).

Рівняння (17) використовують для диференціалів рівняння (11).

Визначають і вираз змінної довжини матеріалу між барабанами (1), яка входить до правої частини (11):

$$l^2 = \alpha_w^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \left(1 + \mu_1\mu_2 - \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^2)\right) + 2\alpha_w(\rho_2 \cos \psi_2 - \rho_1 \cos \psi_1). \quad (18)$$

Цей вираз одержано конкретизуванням (1) розкладом виразів за степенями  $\mu_j$  з точністю до величин другого порядку малості. В (18) значення косинусів не деталізовано (відповідно до (15), (16) для компактності запису.

У результаті виведено загальні математичні залежності, що описують динамічні явища в складній намотувальній системі. Схема одержання залежностей така:

– за формою барабанів встановлюють вирази  $\rho_j(\beta)$ ;

– знайдені значення підставляють у (15), (16) і (17) для знаходження змінних полярних параметрів радіусів-векторів  $\beta_j$ ;

– визначені параметри підставляють у залежності (9), (10), (18), (11).

Конкретизуючи перше положення цієї схеми, наведемо вирази для деяких важливих випадків.

Так, коли барабани кругові, але центри їх обертання зміщено відносно геометричних центрів кіл (це може бути результатом неточності виготовлення і монтажу), радіуси-вектори барабанів подають у вигляді:

$$\rho = e \cos \beta + \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \beta}; \quad (19)$$

$$\rho = \frac{\partial \rho}{\partial \beta} = \frac{-e \rho \sin \beta}{\sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \beta}}.$$

Отже

$$\mu = -r \sin \beta (r^2 - e^2 \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}}, \quad (20)$$

де  $e$  – ексцентриситет зміщення центра обертання вліво від геометричного центра кола;  $r$  – радіус поперечного перерізу барабана.

Геометричні умови доповнено початковими, тобто значеннями кутів  $\beta_j$  на початку руху системи. Вирази (19) і (20) у рівняннях (9), (10), (11) розглядають для значень  $\beta$  у формі (18).

Якщо профіль барабана кусково-неперервний із спряженнями ділянок колом радіусом  $r_0$  з центром, віддаленим на відстань  $r_c$  від початку полярної системи координат та полярному куті  $\delta$ , значення радіус-вектора в місцях спряження набуде вигляду:

$$\rho = r_c \cos(\beta - \delta) + \sqrt{r_0^2 - r_c^2 \sin^2(\beta - \delta)}; \quad (21)$$

$$\mu = -r_c \sin(\beta - \delta) (r_0^2 - r_c^2 \sin^2(\beta - \delta))^{-\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

Як видно, (19) та (20) – часткові випадки (21) та (22).

На основі значень  $\rho$  та  $\mu$  конкретизують інші положення запропонованої схеми математичного подання динамічного процесу.

Для складних профілей барабанів, особливо коли їх поперечні перерізи окреслено кусково-неперервними випуклими кривими, дослідження навіть квазістаціонарних процесів потребує конкретних ґрунтовних аналізів та спеціальних прийомів.

УДК 621.86.534–16

І.А. Вікович, Х.А. Висоцька

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра транспортних технологій

## РОЗРАХУНОК ЧАСТОТ І ФОРМ КОЛИВАНЬ ПІДВІСНИХ ВАНТАЖОТРИМКИХ І ШТОВХАЮЧИХ КОНВЕЄРІВ

© Вікович І.А., Висоцька Х.А., 2005

**Розроблено математичну модель підвісних вантажотримких і штовхаючих конвеєрів у вигляді системи з розподіленими параметрами з урахуванням розсіяння енергії в матеріалі. Одержано частотне рівняння і визначено дві основні частоти вільних коливань підвісного вантажотримкого конвеєра.**

**It was devised a mathematical model of weightholding conveyor as a system with distributive parameters in a view of dispersion of energy in the material. It was obtained a frequency equation and was determined two main frequencies of the free fluctuations of the suspended weightholding conveyor.**

Підвісні вантажотримкі та штовхаючі конвеєри достатньо широко використовуються для інтенсифікації різноманітних виробничих процесів. Довжина замкнутих контурів таких конвеєрів переважно сягає декількох сотень метрів, а на окремих підприємствах – декількох кілометрів. Велика довжина і значна податливість в осьовому напрямі, а також наявність фрикційних явищ у цих конвеєрах призводить до нерівномірного руху й виникнення поздовжніх та поперечних коливань.

У відомих дослідженнях для аналізу динамічних явищ у машинах безперервного транспорту в основному розрахункові моделі подають у вигляді розімкнутих схем. У роботі [6] та у всіх наступних роботах цього автора для дослідження динаміки машин безперервного транспорту розрахункові схеми подано у вигляді замкнутого контуру, але із зосередженими масами.

Зокрема, у роботі [5] розрахункову схему подано у вигляді замкнутого контура з розподіленими параметрами, проте тут розрахункова схема, яка зображена на рис. 1, істотно відрізняється від аналогічних [5, 6].

На рис. 1  $m_1$  і  $m_2$  – зведені маси ведучого і веденого механізмів конвеєра,  $\rho f(x_1) = \rho F(x_2)$  – маси одиниці довжини робочої і неробочої віток конвеєра та  $\xi(x)$  – погона маса вантажів,  $c(x)$  – деякий приведений коефіцієнт жорсткості постелі вантажів,  $\rho$  – густина матеріалу,  $F_i(x_i)$  – площі поперечних перерізів віток конвеєра ( $i=1,2$ ).