

## ОСОБЛИВОСТІ КОЛИВАНЬ ПІДВАНТАЖЕНОЇ СТРІЧКИ

© Яковенко М.Г., 2005

Отримано аналітичні розв'язки рівнянь, що визначають власні і вимушені коливання рухомої, підвантаженої сконцентрованою масою, стрічки. Спектр власних коливань визначають комплексними числами, що є розв'язками трансцендентного характеристичного рівняння. Встановлено, що власні коливання є завжди загасаючими. Розв'язок для вимушених коливань приведено до форми, що легко аналізується.

Analytical solutions of natural and forced oscillations of movable streap loaded with a concentrated mass are obtained. The spectrum of natural oscillations is determined by complex numbers, which are the solutions of the transcended characteristic equation. It is stated that the natural oscillations are always damping. The solution for forced oscillations is reduced to a form, which is easily analyzable.

Сучасні вимоги до точності запису-відтворення інформації при все більш зростаючих швидкостях диктують необхідність уточнення динамічних явищ, що виникають під час транспортування стрічки, а саме, коливань в місці запису-відтворення. Тракт транспортування, як правило, має складний характер, а джерелами коливань є привідні механізми, ексцентричність ведучого валу, котушок, притискних роликів, а також зміна натягу стрічки [1]. Для визначення величини впливу окремого джерела збурення на коливальний процес доцільно розбити весь тракт на окремі ділянки і в подальшому підсумувати коливальні процеси від кожного окремого джерела збурення на кожній ділянці. Такою ділянкою може бути ділянка стрічки, підвантажена з одного боку масою (це може бути ролик чи рулон), а з протилежного боку відбувається кінематичне збурення.

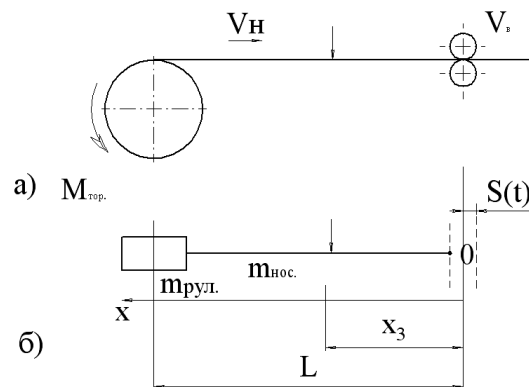


Рис. 1. Тракт транспортування:  
а – спрощена ідеалізована схема ділянки тракту,  
б – розрахункова схема

Найближче підійшли до розв'язання поставленої задачі у [2]. Але самого розв'язку не подається, автори обмежились тільки постановкою задачі (складено систему рівнянь) і деякими зауваженнями відносно власних частот коливальної системи. Близькі за фізичною суттю проблеми вирішено в літературі [3] і [4]. Отже, можна вважати, що практично відсутні розв'язки подібних задач.

Коливання в пружних рухомих одновимірних системах математично описано відомим гіперболічним рівнянням в частинних похідних [2]. При цьому приймаємо, що натяг стрічки стабільний.

Позначено:

$U(x,t)$  – переміщення стрічки з координатою  $x$  в довільний момент часу  $t$ ;

$c$  – швидкість поширення пружної поздовжньої хвилі ( $c^2 = \frac{ES}{m_0}$ ),

$E, S, m_0$  – модуль пружності першого роду, переріз і маса одиниці довжини стрічки;

$V_H$  – швидкість руху стрічки;

$L, m$  – довжина і маса стрічки.

Тоді коливальний процес подається рівнянням

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2V_H \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - (c^2 - V_H^2) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

для  $0 \leq x \leq \ell$ ,  $t \geq 0$  для граничних умов

$$U(x, t) = A \sin \omega t, \quad x = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2V_H \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + V_H^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{ES}{m_{pyl}} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad x = \ell, \quad (2)$$

де  $A, \omega$  – амплітуда і частота кінематичного збурення;  $m_{pyl}$  – зведена маса рулона.

Приймаємо початкові умови

$$U = \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad t = 0, \quad 0 < x \leq \ell. \quad (3)$$

**Мета і результати досліджень.** Метою роботи є отримання аналітичного розв'язку рівнянь для власних і вимушених коливань рухомої стрічки, підвантаженої сконцентрованою масою.

Загальний розв'язок шукаємо у вигляді суми власних і вимушених коливань [5], [6], тобто

$$U(x, t) = W(x, t) + W_0(x, t). \quad (4)$$

Розглянемо деякі особливості власних коливань. Вважаючи, що  $A = 0$ , отримуємо систему рівнянь

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2V_H \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} - (c^2 - V_H^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0,$$

$$W(0, t) = 0,$$

$$c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{ES}{m_{pyl}} \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad x = \ell$$

яка допускає розділення змінних величин і зводиться до деякої узагальненої задачі на власні значення. Відшукаючи цей розв'язок у вигляді

$$W(x, t) = y_1(x) e^{\lambda_1 t}$$

для невідомої функції  $y_1(x)$  знаходимо рівняння

$$y_1''(x) - \frac{2V_H \lambda_1}{c^2 - V_H^2} y_1'(x) - \frac{\lambda_1^2}{c^2 - V_H^2} y_1(x) = 0, \quad (5)$$

з граничними умовами

$$y_1(0) = 0$$

$$c^2 y_1''(\ell) + \frac{ES}{m_{pyl}} y_1'(\ell) = 0. \quad (6)$$

Отриману граничну задачу перетворюємо на другу задачу для функції  $y(x)$ , вважаючи, що

$$y_1(x) = y(x) e^{ax}, \quad (7)$$

де сталу  $a$  вибираємо так, щоби функція не містила члена з першою похідною. Диференціюючи (7) за  $x$ , за зробленою заміною отримаємо рівняння

$$y''(x) + 2\left(a - \frac{V_H \lambda_1}{c^2 - V_H^2}\right)y'(x) + \left(a^2 - \frac{2V_H \lambda_1}{c^2 - V_H^2}a - \frac{\lambda_1^2}{c^2 - V_H^2}\right)y(x) = 0.$$

Вибираючи

$$a = \frac{V_H \lambda_1}{c^2 - V_H^2},$$

і беручи до уваги, що

$$a^2 - \frac{2V_H \lambda_1}{c^2 - V_H^2}a - \frac{\lambda_1^2}{c^2 - V_H^2} = -\lambda_1^2 \frac{c^2}{c^2 - V_H^2},$$

рівняння для  $y(x)$  набуде простого вигляду

$$y''(x) - \lambda_2^2 y(x) = 0, \text{ де } \lambda_2 = \lambda_1 \frac{c}{c^2 - V_H^2}. \quad (8)$$

Відповідно до заміни (7) граничні умови (6) перетворюються в такі

$$\lambda_2(a_1 \lambda_2 + b_1)y(l) + (a_2 \lambda_2 + b_2)y'(l) = 0, \quad (9)$$

$$y(0) = 0.$$

Тут прийнято позначення

$$a_1 = c^2 + V_H^2, \quad a_2 = 2V_H c, \quad b_1 = \frac{ES}{m_{pyl}} \frac{V_H}{c}, \quad b_2 = \frac{ES}{m_{pyl}}. \quad (10)$$

Розв'язком рівняння (8), що задовольняє умову  $y(0) = 0$ , є функція

$$y(x) = c \frac{sh \lambda_2 x}{\lambda_2}, \quad (11)$$

де  $c$  – довільна постійна величина.

Підставляючи цей розв'язок в граничні умови для  $x = l$ , отримуємо характеристичне рівняння

$$L(\lambda_2) = (a_1 \lambda_2 + b_1)sh \lambda_2 l + (a_2 \lambda_2 + b_2)ch \lambda_2 l = 0. \quad (12)$$

Корені цього рівняння визначають спектр власних частот коливань рухомого носія друку залежно від параметрів системи. Обмежимося деякими загальними зауваженнями.

Як видно з рівняння, коренями його є комплексні числа  $\lambda_{2n} = \alpha_n + i\beta_n$ , модулі яких утворюють зростаючу послідовність з точкою згущування в безмежності. Подаючи ліву частину рівняння (12) у вигляді степеневого ряду за змінним  $\lambda_2$  і використавши критерій Рауса–Гурвіца для цілих функцій [7], пересвідчуємося, що при  $0 < V_H < c$  всі корені рівняння знаходяться в лівій напівплощині комплексного змінного  $\lambda_2$ . Фізично це означає, що власні коливання в стрічці є завжди загасаючими. Причому, із збільшенням швидкості носія і його жорсткості інтенсивність згасання збільшується.

У тому, що характеристичне рівняння не має дійсних коренів, можна переконатись, подавши його так

$$thl \lambda_2 = -M - \frac{K}{\lambda_2 + N}, \quad (13)$$

де  $1 > M = \frac{2V_H c}{c^2 + V_H^2} > 0, \quad K = \frac{ES}{m_{pyl}} \frac{c - V_H}{c + V_H} > 0, \quad N = \frac{ES}{m_{pyl}} \frac{V_H}{c(c^2 + V_H^2)} > 0,$

і побудувавши відповідні криві. Як видно з рис. 2, графіки лівої і правої частини рівняння (13) не перетинаються.

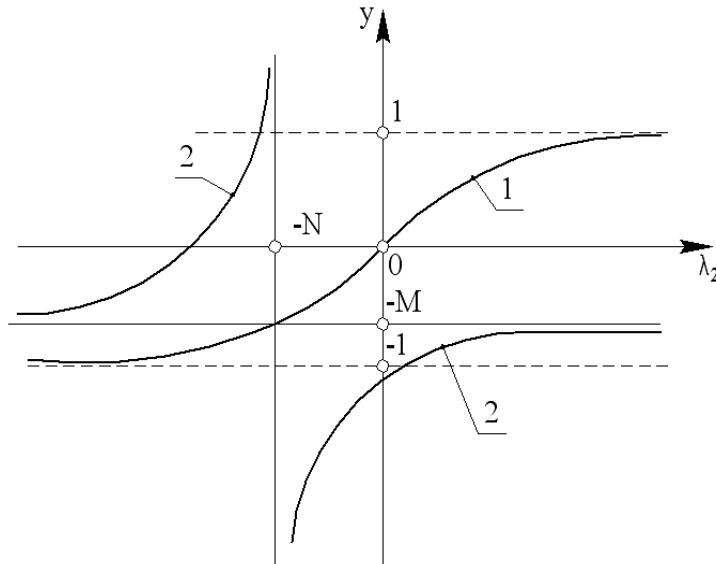


Рис. 2. Графіки функцій: 1 –  $th \lambda_2 l$  ; 2 –  $-\frac{K}{\lambda_2 + N}$

Для випадку  $V_H = 0$  рівняння (12) набуває простого вигляду і має суто уявні корені. Справді, приймаючи, що  $\lambda_2 = i\mu$  і  $\beta = \mu l$ , отримуємо рівняння, що характеризує спектр власних частот нерухомої підвантаженої стрічки і визначається точками перетину тангенсоїд з гіперболою.

Відповідно до одержаних результатів загальний розв'язок вільних коливань системи можна навести у такому вигляді

$$W(x, t) = f\left(t + \frac{x}{V_1}\right) - f\left(t - \frac{x}{V_2}\right), \quad (15)$$

де  $f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_{2n}} e^{\frac{\lambda_{2n} V_1 V_2}{c} z}$ .

Тут уведено позначення  $V_1 = c - V_H$ ,  $V_2 = c + V_H$ .

Як видно, коливання в кожній точці носія визначено різницею нескінченних сум прямих і зворотних загасаючих хвиль. Функція  $f(z)$  завжди є комплексно значущою. Зазначимо, що постійні коефіцієнти  $\{c_n\}$  виявляються комплексними величинами і визначаються з початкових умов.

Згідно з [ 4 ] усталений коливальний процес можна подати у вигляді

$$W_0(x, t) = \varphi(x) \sin \omega t + \psi(x) \cos \omega t, \quad (16)$$

для визначення невідомих функцій  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  одержуємо рівняння

$$\varphi''(x) + a_3 \psi'(x) + b_3 \varphi(x) = 0, \quad (17)$$

$$\psi''(x) - a_3 \varphi'(x) + b_3 \psi(x) = 0,$$

і граничні умови

$$\varphi(0) = 0, \quad c^2 \varphi''(l) + \frac{ES}{m_{pyl}} \varphi'(l) = 0 \quad (18)$$

$$\psi(0) = 0, \quad c^2 \psi''(l) + \frac{ES}{m_{pyl}} \psi'(l) = 0.$$

Із системи (17) шляхом диференціювання виключаємо функцію  $\psi(x)$ .

$$\begin{aligned}\varphi'''(x) + a_3\psi''(x) + b_3\varphi'(x) &= 0, \\ \psi''(x) &= a_3\varphi'(x) - b_3\psi(x), \\ \varphi'''(x) + (a_3^2 + b_3)\varphi'(x) &= a_3b_3\psi(x).\end{aligned}$$

Звідки

$$\psi(x) = \frac{1}{a_3b_3} [\varphi'''(x) + (a_3^2 + b_3)\varphi'(x)], \quad (19)$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{a_3b_3} [\varphi^{iv}(x) + (a_3^2 + b_3)\varphi''(x)]. \quad (20)$$

Диференціюємо рівняння (19) і з урахуванням (20) отримуємо рівняння

$$\varphi^{iv}(x) + (a_3^2 + b_3)\varphi''(x) + b_3^2\varphi(x) = 0. \quad (21)$$

Тут позначено

$$a_3 = \frac{2V_H\omega}{c^2 - V_H^2}, \quad b_3 = \frac{\omega^2}{c^2 - V_H^2}.$$

Характеристичне рівняння для (21) має такий вигляд

$$\lambda_3^4 + \frac{2\omega^2(c^2 + V_H^2)}{(c^2 - V_H^2)^2}\lambda_3^2 + \frac{\omega^4}{(c^2 - V_H^2)^2} = 0. \quad (22)$$

Коренями його є суто уявні числа

$$\lambda_{31} = \frac{i\omega}{V_1}, \quad \lambda_{32} = -\frac{i\omega}{V_1}, \quad \lambda_{33} = \frac{i\omega}{V_2}, \quad \lambda_{34} = -\frac{i\omega}{V_2}.$$

Використавши формулу Ейлера, запишемо розв'язок рівняння (21)

$$\varphi(x) = D_1 \sin \frac{\omega x}{V_2} + D_2 \cos \frac{\omega x}{V_2} + D_3 \sin \frac{\omega x}{V_1} + D_4 \cos \frac{\omega x}{V_1}, \quad (23)$$

Значення функції  $\psi(x)$  з урахуванням (19) і (22) має вигляд

$$\psi(x) = -D_2 \sin \frac{\omega x}{V_2} + D_1 \cos \frac{\omega x}{V_2} + D_3 \sin \frac{\omega x}{V_1} - D_4 \cos \frac{\omega x}{V_1}. \quad (24)$$

Тут  $D_1, D_2, D_3, D_4$  – сталі величини, визначені з умов (18).

Зазначимо, що цей частинний розв'язок неоднорідної задачі (1), (2) є дійсною функцією.

Між сталими інтегрування існує залежність

$$D_2 + D_4 = A, \quad D_1 - D_3 = 0.$$

Звідки  $D_3 = D_1$  і  $D_4 = A - D_2$

Відповідно до цього значення функцій  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  можна записати

$$\varphi(x) = D_1 \left[ \sin \frac{\omega x}{V_2} + \sin \frac{\omega x}{V_1} \right] + D_2 \left[ \cos \frac{\omega x}{V_2} - \cos \frac{\omega x}{V_1} \right] + A \cos \frac{\omega x}{V_1} \quad (25)$$

$$\psi(x) = D_1 \left[ \cos \frac{\omega x}{V_2} - \cos \frac{\omega x}{V_1} \right] - D_2 \left[ \sin \frac{\omega x}{V_2} + \sin \frac{\omega x}{V_1} \right] + A \sin \frac{\omega x}{V_1}$$

Значення сталих подаємо так

$$D_1 = A \frac{N_4 N_2 - N_3 N_1}{N_1^2 + N_2^2}, \quad D_2 = A \frac{N_4 N_1 + N_3 N_2}{N_1^2 + N_2^2}, \quad (26)$$

де

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -\frac{c^2 \omega^2}{V_2^2} \cos \frac{\omega t}{V_2} + \frac{c^2 \omega^2}{V_1^2} \cos \frac{\omega t}{V_1} - \frac{ES}{m_{\text{пупл}}} \frac{\omega}{V_2} \sin \frac{\omega t}{V_2} + \frac{ES}{m_{\text{пупл}}} \frac{\omega}{V_1} \sin \frac{\omega t}{V_1}, \\
 N_2 &= -\frac{c^2 \omega^2}{V_2^2} \sin \frac{\omega t}{V_2} - \frac{c^2 \omega^2}{V_1^2} \sin \frac{\omega t}{V_1} + \frac{ES}{m_{\text{пупл}}} \frac{\omega}{V_2} \cos \frac{\omega t}{V_2} + \frac{ES}{m_{\text{пупл}}} \frac{\omega}{V_1} \cos \frac{\omega t}{V_1}, \\
 N_3 &= -\frac{c^2 \omega^2}{V_1^2} \sin \frac{\omega t}{V_1} + \frac{ES}{m_{\text{пупл}}} \frac{\omega}{V_1} \cos \frac{\omega t}{V_1}, \\
 N_4 &= \frac{c^2 \omega^2}{V_1^2} \cos \frac{\omega t}{V_1} + \frac{ES}{m_{\text{пупл}}} \frac{\omega}{V_1} \sin \frac{\omega t}{V_1}.
 \end{aligned}$$

Функцію вимушених коливань рухомого носія записуємо у зручному для дослідження вигляді

$$W_0(x, t) = Y(x) \sin(\omega t + \theta), \quad (27)$$

де

$$Y(x) = \sqrt{[\varphi(x)]^2 + [\psi(x)]^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}.$$

Зазначимо, що при  $V_H = 0$  коефіцієнти  $D_1$  і  $D_2$  набувають вигляду

$$D_1 = A \frac{N_4}{N_2}, \quad D_2 = A \frac{N_3}{N_2}. \quad (28)$$

Звідки отримуємо

$$\psi(x) = 0, \quad Y(x) = \varphi(x) = 2D_1 \sin \frac{\omega x}{c} + A \cos \frac{\omega x}{c}. \quad (29)$$

Вираз (29) визначає коливання нерухомої підвантаженої стрічки, що повністю відповідає поздовжнім коливанням призматичного стрижня з масою на кінці [8].

Одержаний вираз для усталених вимушених коливань стрічки (27) у наведеній формі легко аналізується. Видно, що коливання здійснюються з амплітудою, що залежить від просторового знаходження точки запису-відтворення інформації і властивостей коливальної системи. Частота коливань стрічки дорівнює частоті збурення, але зсунута за фазою, яка також залежить від положення точки запису-відтворення інформації і параметрів системи. Наведений вираз зручний тим, що аналіз коливального процесу можна провести, використавши частотні характеристики (амплітудні і фазові).

**Висновки.** Власні коливання підвантаженої рухомої стрічки визначаються різницею сум прямих і зворотних загасаючих хвиль. Ступінь загасання визначається не тільки співвідношенням мас вантажу і стрічки, а і швидкістю руху стрічки. Власні коливання завжди є загасаючими, якщо швидкість руху стрічки не перевищує швидкості поширення пружної поздовжньої хвилі. Функції форм власних коливань завжди є комплексно визначеними. Оперувати такими функціями для інженерних розрахунків недоцільно. Поведінку спектра власних коливань за різних співвідношень системи легко можна зрозуміти за амплітудно-частотними і фазочастотними характеристиками вимушених стаціонарних коливань стрічки.

На відміну від власних аналітична залежність для вимушених коливань проста і легко аналізується. Коливання відбувається з амплітудою, що залежить від розташування точки запису – відтворення інформації і параметри системи (співвідношення мас, швидкості руху стрічки, її жорсткості). Частота коливань стрічки завжди відповідає частоті збурення, але зсунута по фазі. Величина фазового зсуву також визначається тими самими параметрами коливальної системи.

*І. Михневич А.В. Лентопротяжные механизмы. – М.: Энергия, 1971. – 168 с. 2. Барвинский А.Ф., Пархоменко А.Л. Анализ собственных частот подвижного элемента с распределенными параметрами в двухмассовой колебательной системе // Вестник ЛопПИ "Математика и механика". – Т. 10, 1974. –*

Вып. 1,59. – № 119. – 63 с. 3. Горошко О.А. Собственные и сопровождающие колебания в системах с подвижными инерциальными нагрузками // Труды 5-й Международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 3. – К.: АН УССР, 1970. – С. 58–64. 4. Савин Г.Н. и др. Введения в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. – К.: Наукова думка, 1976. – 205 с. 5. Гащук П., Зорій Л. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Українські технології, 1999. – 392 с. 6. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища школа, 1976. – 592 с. 7. Чеботарев А.Г. Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. – М. – Л.: АН СССР, 1949. – 332 с. 8. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.