

## ПЕРЕВІРКА ПРОПОРЦІЙНОСТІ ДЕВІАТОРІВ ПІД ЧАС ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ДИСКА

© Русинко А.К., 2005

**У межах синтезної теорії пластичності перевірено пропорційність девіаторів під час пружно-пластичного деформування диска, що обертається. Це здійснено на основі побудов траєкторії навантаження у тривимірному просторі девіаторів напруження. Показано, що навіть за певного відхилення траєкторії навантаження від прямої лінії зберігається пропорційність девіаторів.**

**In the article in the framework of synthetic theory of plasticity the deviators proportionality at elastic-plastic deformation of a disc has been checked. It has been developed on the base of construction of trajectories of loading in the three-dimension space of the stress deviators. The deviators proportionality is valid even at some deviation of trajectory of loading from a straight line.**

У теорії пластичного деформування пропорційний (простий) тип навантаження посідає особливе місце, оскільки деформація не залежить від передісторії деформування і визначається за формулою пропорційності девіаторів. Як відомо, під час простого деформування траєкторія навантаження у просторі девіаторів напружень є прямою лінією. Разом з тим, теорії пластичності, які передбачають виникнення кутової точки на поверхні навантаження, забезпечують пропорційність девіаторів навіть за певного відхилення траєкторії навантаження від прямолінійності. До класу таких теорій належить синтезна теорія незворотного деформування, у межах якої проведено наше дослідження.

Метою роботи є дослідження траєкторій навантажень під час пружно-пластичного деформування турбінного диска, що обертається, в умовах двовісного розтягу.

Досліджено диск сталі товщини 30 мм з центральним отвором, внутрішній радіус диска  $a = 45$  мм, зовнішній  $b = 225$  мм. Матеріал, з якого виготовлено диск – сталь ЭИ415 з такими механічними властивостями: модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, межа пластичності за одноосового розтягу  $\sigma_S = 650$  МПа, питома вага  $\gamma = 7,82 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; коефіцієнт Пуассона дорівнює  $\nu = 0,5$ . Діапазон частот обертання –  $n = 17000 - 21500$  об/хв. Диск з'єднано з валом за допомогою пружного елемента. Досліджують напруження, викликані лише силами інерції самого диска. Отже, радіальне напруження на внутрішньому та зовнішньому контурах диска відсутнє:  $\sigma_{r_a} = \sigma_{r_b} = 0$ .

Радіальне та окружне напруження  $\sigma_r$  і  $\sigma_\varphi$ , які виникають під час обертання диска, визначають з розв'язку системи двох рівнянь: інтегральне рівняння

$$\sigma_r = \int_a^r \frac{1}{r} \left[ (\sigma_\varphi - \sigma_r) - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 \right] dr, \quad (\omega = \pi n / 30) \quad (1)$$

отримане з рівняння рівноваги та рівняння

$$\sigma_\varphi = \nu \sigma_r + \frac{(1 - \nu^2) E'}{r^{1+\nu}} \int_a^r \frac{r^\nu \sigma_r}{E'} dr + A \frac{E'}{r^{1+\nu}}, \quad (2)$$

виведене з рівняння сумісності деформацій

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\varphi) - \varepsilon_r = 0,$$

де

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E'}\sigma_r - \frac{\nu}{E'}\sigma_\varphi, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E'}\sigma_\varphi - \frac{\nu}{E'}\sigma_r \quad (3)$$

У формулах (2),(3)  $E'$  – січний модуль діаграми пластичності матеріалу, побудованої в системі координат  $\tau_0 - \gamma_0$ , де  $\tau_0$  – інтенсивність дотичних напружень,  $\gamma_0$  – інтенсивність деформацій. Для випадку  $\nu = 0,5$  ця діаграма збігається з діаграмою одноосового розтягу. Отже, пружно-пластична задача замінюється на суто пружну зі змінним модулем  $E'$ , який залежить від величини напруження.

Система рівнянь (1)–(2) розв'язана методом початкових наближень, методику якого викладено в роботі [1]. За цим методом для  $m$  – го наближення ( $m = 0, 1, \dots$ )

$$\sigma_{r_m} = \int_a^r \frac{1}{r} \left[ \frac{(1-\nu^2)E'}{r^{1+\nu}} \int_a^r \frac{r^\nu \sigma_{r_{m-1}}}{E'} dr - (1-\nu)\sigma_{r_{m-1}} \right] dr + A_m \int_a^r \frac{E'}{r^{2+\nu}} dr - \frac{\gamma}{2g} \omega^2 (r^2 - a^2), \quad (4)$$

$$\sigma_{\varphi_m} = \nu \sigma_{r_m} + \frac{(1-\nu^2)E'}{r^{1+\nu}} \int_a^r \frac{r^\nu \sigma_{r_m}}{E'} dr + A_m \frac{E'}{r^{1+\nu}}, \quad (5)$$

$$A_m = \frac{\frac{\gamma}{2g} \omega^2 (b^2 - a^2) - \int_a^b \frac{1}{r} \left[ \frac{E'}{r^{1+\nu}} \int_a^b \frac{(1-\nu^2)r^\nu \sigma_{r_{m-1}}}{E'} dr - (1-\nu)\sigma_{r_{m-1}} \right] dr}{\int_a^b \frac{E' a^\nu}{r^{2+\nu}} dr}. \quad (6)$$

Значення  $\sigma_{r_0}$  та  $\sigma_{\varphi_0}$  визначають з пружного розв'язку:

$$\sigma_{\varphi_0} = \frac{3+\nu}{8} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} \left[ a^2 + b^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \cdot r^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} \right],$$

$$\sigma_{r_0} = \frac{3+\nu}{8} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} \left[ a^2 + b^2 - r^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} \right].$$

Розрахунки завершують тоді, коли різниця між напруженнями для двох кроків не перевищить наперед задану величину.

Визначимо січний модуль  $E'$  у межах синтезної теорії пластичності [2,3], де силове навантаження задає вектор  $\vec{S}$  з компонентами  $S_1 = \sqrt{3/2} S_{xx}$ ,  $S_2 = S_{xx}/\sqrt{2} + \sqrt{2} S_{yy}$ ,  $S_3 = \sqrt{2} S_{xz}$ ;

$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$ ,  $i, j = x, y, z$ ,  $\sigma = \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk}$ . Для випадку плоскої деформації

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\sigma_r - \sigma_\varphi), \quad S_2 = \frac{\sigma_\varphi}{\sqrt{2}}, \quad |\vec{S}| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi}. \quad (7)$$

За пропорційного навантаження компоненти вектора пластичної деформації  $e_k^S$  ( $k=1,2,3$ ) визначають так [3]:

$$e_k^S = e' \frac{S_k}{|\vec{S}|}, \quad (8)$$

де  $e'$  – єдина відмінна від нуля компонента вектора пластичної деформації  $\vec{e}$  визначена у системі координат  $S_1'S_2'S_3'$ , розгорнутій так, щоб вектор  $\vec{S}$  лежав на осі  $S_1'$  [3]. За таких умов

$$e' = a\Phi(\sin \beta_1), \quad a = \frac{\pi\sigma_S^2}{9p}, \quad \sin \beta_1 = \frac{\sqrt{2/3}\sigma_S}{|\vec{S}|}, \quad (9)$$

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \left( 2\sqrt{1-\xi^2} - 5\xi^2\sqrt{1-\xi^2} + 3\xi^4 \ln \frac{1+\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right), \quad (p = \text{const}).$$

На основі формул (7),(8) та зв'язку між компонентами вектора  $\vec{e}$  та тензора деформації  $\varepsilon$  –  $\varepsilon_r = \sqrt{2/3}e_1$ ,  $\varepsilon_\varphi = e_2/\sqrt{2} - e_1/\sqrt{6}$  [1,2] отримаємо

$$\varepsilon_r = \left( \frac{1}{E} + \frac{2e'}{3|\vec{S}|} \right) \sigma_r - \left( \frac{\nu}{E} + \frac{e'}{3|\vec{S}|} \right) \sigma_\varphi, \quad \varepsilon_\varphi = \left( \frac{1}{E} + \frac{2e'}{3|\vec{S}|} \right) \sigma_\varphi - \left( \frac{\nu}{E} + \frac{e'}{3|\vec{S}|} \right) \sigma_r.$$

З порівняння формул (3) і (9) отримуємо вираз січного модуля

$$E' = \frac{3|\vec{S}|E}{3|\vec{S}| + 2e'E}. \quad (10)$$

За відсутності пластичної деформації  $e' = 0$  з формули (10) випливає рівність січного модуля та модуля Юнга:  $E' = E$ .

Результати розрахунків за формулами (4–6), (8), (9) і (11) наведено на рис. 1 у вигляді графіків залежностей  $\sigma_r(r)$  і  $\sigma_\varphi(r)$ , поряд з якими наведено експериментальні значення  $\sigma_\varphi(r)$  (результати досліджень для  $\sigma_r$  не нанесено з огляду на щільність їхнього розташування з розрахунковими графіками  $\sigma_r(r)$ ). З цього рисунка видно добре узгодження аналітичних та експериментальних результатів.

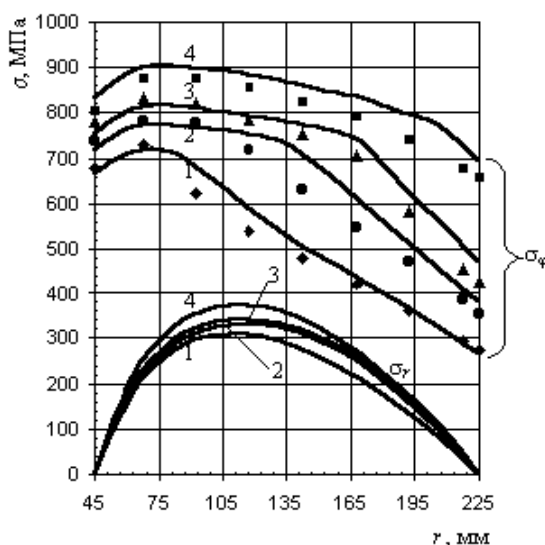


Рис. 1. Розподіл напружень  $\sigma_r$  і  $\sigma_\varphi$  за радіусом диска для частот обертання: 1 – 17000 об./хв, 2 – 19000 об./хв, 3 – 20000 об./хв, 4 – 21500 об./хв. Лінії – розрахункові криві, • – експериментальні значення  $\sigma_\varphi$

За визначеними напруженнями побудовані вектори напруження (рис. 2) для трьох точок диска: 1 –  $r = 45$  мм; 2 –  $r = 63$  мм; 3 –  $r = 81$  мм для таких частот обертання:  $a - 17$ ,  $b - 19$ ,  $c - 20$  і  $d - 21,5$  тис. об/хв. Як видно з рис. 2, для  $r = 81$  мм траєкторія навантаження, тобто геометричне місце кінців вектора  $\vec{S}$ , дещо відхиляється від прямої лінії. Тому постає запитання про правомірність застосування формули (8), яка є записом пропорційності девіаторів у термінах синтезної теорії. Відповідь на це запитання одержимо, дослідивши поверхню пластичності в тривимірному просторі девіаторів напруження.

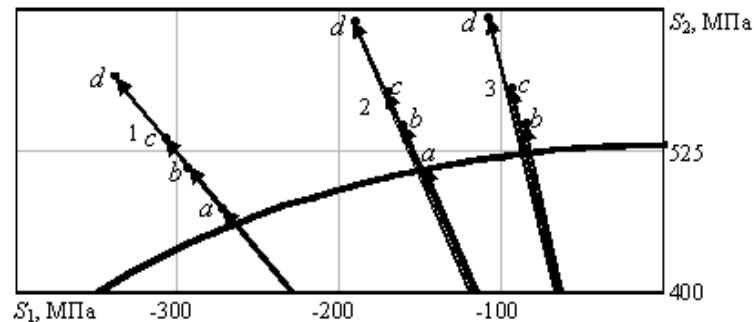


Рис. 2. Положення вектора навантаження у площині  $S_1S_2$  тривимірного простору девіаторів напруження

У межах синтезної теорії поверхня пластичності має форму сфери з радіусом  $\sqrt{2/3}\sigma_S$ , що відповідає умові пластичності Губера–Мізеса. Через кожну точку цієї сфери проводять дотичну площину. В процесі силового навантаження вектор  $\vec{S}$  провадить трансляційно на своєму вістрі ті дотичні площини, яких він досягнув. Рух кожної площини символізує незворотну деформацію у певній системі координат.

Формозміна поверхні пластичності відбувається так, щоб вона огинала усі дотичні площини: як нерухомі, так і ті, які перемістив вектор  $\vec{S}$ . За такої трансформації поверхні навантаження, очевидно, на ній виникатиме кутова конічна точка; твірні конуса утворені граничними дотичними площинами, які опинилися на вістрі вектора  $\vec{S}$ .

Розглянемо такий режим навантаження (рис. 3): спершу навантаження по прямій лінії  $OM_1$  (вектор  $\vec{S}_1$ ), а потім довантаження вектором  $d\vec{S}$  до точки  $M_2$  – кут між векторами  $d\vec{S}$  і  $\vec{S}_1$  позначимо через  $\delta$ . Під час дії вектора  $\vec{S}_1$  поверхня навантаження має форму кола, яке у точках  $A_1$  і  $A_2$  переходить в конус, твірні якого утворені лініями 1. Розглянемо два випадки довантаження  $\delta > \beta_1$  і  $\delta \leq \beta_1$  (половину кута при вершині конуса  $\beta_1$  визначають за формулою (9)) і порівняємо поверхню навантаження з утвореною під час простого навантаження вектором  $\vec{S}_2$ . Для вектора  $\vec{S}_2$  поверхня навантаження має таку саму форму, що і для  $\vec{S}_1$ , лише твірні конуса утворені лініями 2 і перехід конуса у сферу відбувається у точках  $B_1$  і  $B_2$ . Якщо поверхні навантаження за програмами навантаження  $OM_2$  та  $OM_1M_2$  однакові, то це свідчить про однаковість утвореної пластичної деформації для обох траєкторій, а, отже, про можливість застосування формули пропорційності девіаторів навіть при певному відхиленні від прямолінійності траєкторії. У протилежному випадку застосування формули (9) є неправомірним.

З порівняння рис. 3а та 3б видно, що при  $\delta > \beta_1$  поверхня навантаження матиме вигляд кола, яке переходить у ламану  $A_2M_1M_2B_1$ . Очевидно, що ця поверхня не збігається з поверхнею навантаження для вектора  $\vec{S}_2$ . Якщо ж  $\delta \leq \beta_1$ , то для програм навантаження  $OM_2$  та  $OM_1M_2$  поверхні навантаження будуть ідентичними. Отже, умовою збереження пропорційності девіаторів є умова  $\delta \leq \beta_1$ , тобто вектор довантаження повинен перебувати всередині конуса, утвореного граничними площинами, які перебувають на вістрі вектора  $\vec{S}_1$ .

Визначені за формулою (9) кути  $\beta_1$  для  $r = 81 \text{ мм}$  і для частот обертання 19, 20 і 21,5 тис. об/хв становлять  $72^\circ$ ,  $65^\circ$  і  $54^\circ$  відповідно, а максимальне відхилення вектора довантаження  $d\vec{S}$ , яке спостерігається під час збільшення обертів з 19 до 20 тис. об./хв., не перевищує  $5^\circ$ . Отже, пропорційність девіаторів зберігає свою чинність, що дає змогу використовувати формулу (8) для визначення пластичної деформації.

**Висновки.** У роботі у межах синтезної теорії пластичності показано, що, розраховуючи напруження під час пружно-пластичного деформування диска, що обертається, можливо застосовувати формули пропорційності девіаторів, незважаючи на певне відхилення траєкторії навантаження від прямої лінії. Це можливо тому, що за синтезною теорією на поверхні навантаження під час пластичного деформування виникає кутова точка.

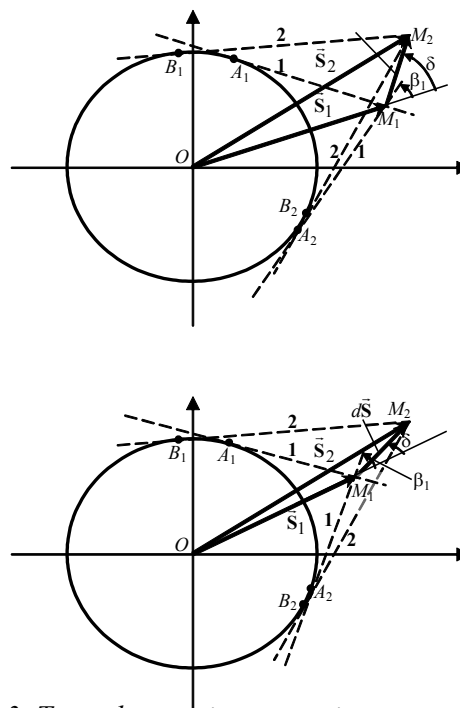


Рис. 3. Трансформація поверхні навантаження під час довантаження вектором  $d\vec{S}$ : а –  $\delta > \beta_1$ , б –  $\delta < \beta_1$

1. Демьянушко И.В., Бюргер И.С. Расчёт на прочность вращающихся дисков. – М.: – Наука, 1978.
2. Андрусик Я.Ф., Русинко К.Н. Пластическая деформация упрочняющихся материалов при нагружении в трехмерном подпространстве пятимерного пространства девіаторов // Механика твердого тела. – 1993. – № 2. – С. 78–83.
3. Русинко А.К. Повзучість із температурним зміцненням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1997. – № 6. – С. 71–74.

УДК 621.656-83:001.2

Є. В. Харченко, Р. А. Ковальчук  
Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра опору матеріалів

## РОЗРАХУНОК НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ У НАСОСНОМУ АГРЕГАТІ БУРОВОЇ УСТАНОВКИ

© Харченко Є. В., Ковальчук Р. А., 2005

Запропоновано нелінійну математичну модель нестационарних процесів, що відбуваються у насосному агрегаті бурової установки. Модель містить рівняння руху елементів системи, записані з урахуванням несталості зведеного моменту інерції рухомих частин поршневого насоса, а також рівняння електромагнітних явищ в асинхронному двигуні. Сумісне інтегрування одержаної системи диференціальних рівнянь виконується числовим методом. Наведено результати числової реалізації побудованої моделі.

Mathematical model of unit, which includes asynchronous motor, clutch and piston pump with pneumatic compensator is proposed. The model includes non-linear differential equations of electromagnetic effects in motor and motion equations of mechanical units, which generates uniform system. Calculation of transition process is developed by numerical integration of this system.

**Вступ.** Розв’язання широкомасштабних народногосподарських завдань забезпечення України сировинними і паливно-енергетичними ресурсами пов’язане із збільшенням обсягів бурових робіт,