

АСИМПТОТИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ ДЛЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ, ЯКІ ОПИСУЮТЬСЯ НЕЛІНІЙНИМ РІВНЯННЯМ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

© Назар І.І., Сенік А.П., Сокіл Б.І., 2005

Розглянуто задачу про побудову асимптотичних наближень для хвильових процесів у одновимірних рухомих нелінійно пружних середовищах обмеженої довжини. Математичною моделлю розглядуваних процесів може слугувати, за певних крайових умов, узагальнене нелінійне рівняння Клейна–Гордона. В основу досліджень покладено модифіковане за д'Аламбером подання розв'язку на відповідну незбурену крайову задачу з подальшим застосуванням методу Ван-дер-Поля для збуреної задачі. Отримано математичні залежності, які визначають вплив пружних і кінематичних характеристик середовища на основні параметри руху.

The task about construction of asymptotic the decisions for wave processes in one-dimensional mobile nonlinear elastic environments of final length is considered. Mathematical model of the specified process under the certain regional conditions can be the equation Klejn-Gordon. In a basis of researches the generalization of a method D'Alamber on the appropriate not indignant regional task with further use of a method In for the indignant task is necessary. The mathematical dependences are received which determine influence of the nonlinear characteristics of environment on its basic parameters.

Актуальність і постановка задачі. Відомо [1], що коливні процеси в рухомих середовищах описано диференціальними рівняннями з частинними похідними, які містять змішану похідну лінійної і часової змінної. Наявність останньої не дозволяє безпосередньо під час розв'язання цих рівнянь застосувати такі відомі класичні методи, як методи Фур'є і д'Аламбера. Проблема суттєво ускладнюється у випадку нелінійних аналогів вказаних типів рівнянь. У роботі, на прикладі узагальненої нелінійної моделі рівняння Клейна – Гордона

$$u_{tt} + 2\beta u_{xt} - \alpha^2 u_{xx} + \gamma u = \mathcal{E}(u, u_x, u_t), \quad (1)$$

зроблено спробу побудувати асимптотичний розв'язок для вказаного класу диференціальних рівнянь з частинними похідними. У (1) α, β, γ – сталі, визначені через кінематичні і фізико-механічні характеристики досліджуваного середовища, ε – малий параметр, $f(u, u_x, u_t)$ – аналітична функція. Для диференціального рівняння (1) розглянемо найпростіші крайові умови

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

Асимптотику розв'язку рівняння (1) при $\beta = 0$ (середовище нерухоме) побудовано в [2] за припущення, що середовище має безмежний розмір (крайові умови для рівняння (1) не ставили), а у [3] – за цих же припущень, тільки для диспергуючого середовища (коефіцієнти α, β, γ є повільно змінними функціями просторової і часової змінних). Розв'язання сформульованої задачі є актуальним хоча б тому, що: а) у граничному випадку при $\beta \rightarrow 0$ із результатів, які будуть отримані нижче, впливають деякі із [2]; б) низка прикладних задач динаміки одновимірних середовищ зводяться до побудови і дослідження розв'язання крайових задач для рівняння (1).

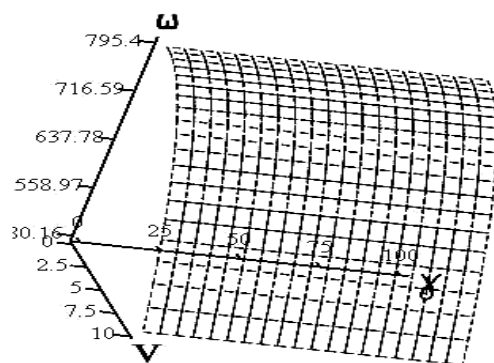
Методика розв'язування. Як показано в [4,5], одночастотний розв'язок незбуреної ($\varepsilon = 0$) крайової задачі для диференціального рівняння (1) при $\gamma = 0$ можна записати у вигляді

$$u(x, t) = \frac{a}{2} (\cos(\kappa x + \omega t + \varphi) - \cos(\chi x - \omega t - \varphi)), \quad (3)$$

де a, φ – сталі і нижче перший параметр називатимемо амплітудним, κ, χ – відповідно хвильовими числами прямої і відбитої хвиль, ω – їх частота:

$$\kappa = \frac{k\pi}{2l} + \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2 k^2 \pi^2 - \gamma}{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \chi = \frac{k\pi}{2l} - \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2 k^2 \pi^2 - \gamma}{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \omega = \alpha \sqrt{\frac{\alpha^2 k^2 \pi^2 - \gamma}{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad k=1,2,\dots \quad (4)$$

Нижче на рисунку показано закон зміни головної частоти коливань ($k=1$) процесу від швидкості руху середовища і параметра γ . Зауважимо, що коефіцієнти α, β виражаються через фізико-механічні і кінематичні параметри середовища так: $\alpha^2 = \frac{E}{\rho} - V^2$, $\beta = V$ (E – модуль пружності матеріалу середовища, ρ – його густина)



Графік залежності частоти хвильового процесу рухомого середовища від швидкості його руху та параметра γ

Отримані залежності показують, що навіть постійна швидкість руху середовища приводить до зміни його частоти власних коливань. Останнє особливо актуальне для дослідження впливу зовнішніх періодичних збурень на процес, зокрема резонансних явищ. Крім цього, принципово змінюється характер процесу, якщо $V \geq \sqrt{\frac{E}{\rho} - \frac{\gamma}{k^2 \pi^2}}$.

Розв'язок у формі (3) можна інтерпретувати як накладання двох хвиль (прямої і відбитої, адже середовище має обмежену протяжність) косинусоїдальної форми однакової частоти, причому довжини хвиль є різними:

$$\lambda_1 = \frac{2l}{k} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \lambda_2 = \frac{2l}{k} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (5)$$

Треба зазначити:

а) отримати вказаний розв'язок шляхом прямого перенесення відомих класичних методів на незбурену крайову задачу (1)–(2) не вдається;

б) питання побудови одночастотних наближень як для незбуреної, так і для збуреної задач має сенс тільки тоді, коли початковий стан системи збігається або є близьким до однієї із форм нормальних коливань незбуреної системи, тобто до

$$u(x, 0) = \frac{a}{2} \left(\cos \left(\left(\frac{k\pi}{2l} + \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2 k^2 \pi^2 - \gamma}{\alpha^2 + \beta^2}} \right) x + \varphi \right) - \cos \left(\left(\frac{k\pi}{2l} - \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2 k^2 \pi^2 - \gamma}{\alpha^2 + \beta^2}} \right) x - \varphi \right) \right).$$

Якщо ж вказане не виконується, то тоді у системі відбуватиметься багаточастотний процес. Останній, з математичного погляду, набагато складніший для описання і може бути предметом окремих досліджень;

в) враховуючи лінійність незбуреної системи, без особливих труднощів можна також побудувати її багаточастотний розв'язок;

г) вважаючи, що в (3) і (4) $\beta = 0$, отримуємо розв'язок незбуреного рівняння, яке описує динаміку нерухомого середовища. Останній, як і треба було очікувати, легко перетворюється у відомий класичний розв'язок [6] лінійного хвильового рівняння.

Маючи опис одночастотного процесу для незбуреного випадку, перейдемо до дослідження впливу малого збурення (нелінійних сил) на розв'язок збуреного рівняння. Ефективними методами аналітичного дослідження впливу малих нелінійних сил на коливні системи є методи, основою яких є основна ідея методу збурень [7]. Існує декілька підходів до їх узагальнення чи використання для того чи іншого класу задач. Для крайової задачі, яка розглядається, узагальнено метод Ван-дер-Поля. Він, на наш погляд, більш простий і зручніший для розв'язування прикладних задач. Згідно із останнім, вираз (3) можна також вважати і розв'язком збуреного рівняння (1), тільки для вказаного випадку параметри a і φ будуть вже деякими невідомими функціями незалежних змінних x і t . З метою використання і узагальнення основної ідеї методу Ван-дер-Поля для рівняння (1) розв'язок у вигляді (3) подамо у вигляді

$$u(x,t) = -a \sin \psi_1 \sin \psi_2, \quad (6)$$

$$\text{де } \psi_1 = \frac{\kappa + \chi}{2} x, \quad \psi_2 = \frac{\kappa - \chi}{2} x - \omega t - \varphi.$$

Шляхом диференціювання (4) за незалежними змінними для збуреного рівняння (1) отримуємо:

$$u_t(x,t) = -a\omega \sin \psi_1 \cos \psi_2 - \sin \psi_1 (a_t \sin \psi_2 + a\varphi_t \cos \psi_2). \quad (7)$$

З урахуванням того, що для незбуреного випадку $u_t(x,t) = -a\omega \sin \psi_1 \cos \psi_2$, знаходимо

$$\sin \psi_1 (a_t \sin \psi_2 + a\varphi_t \cos \psi_2) = 0. \quad (8)$$

Аналогічно, диференціюванням за лінійною змінною, отримуємо

$$\sin \psi_1 (a_x \sin \psi_2 + a\varphi_x \cos \psi_2) = 0, \quad (9)$$

Подальшим диференціюванням за незалежними змінними отримуємо:

$$u_{xx}(x,t) = a \left[\frac{\kappa^2 + \chi^2}{2} \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \frac{\kappa^2 - \chi^2}{2} \cos \psi_1 \cos \psi_2 \right] -$$

$$a_x \left[\frac{\kappa + \chi}{2} \cos \psi_1 \sin \psi_2 + \frac{\kappa - \chi}{2} \sin \psi_1 \cos \psi_2 \right] - a\varphi_x \left[\frac{\kappa + \chi}{2} \cos \psi_1 \cos \psi_2 - \frac{\kappa - \chi}{2} \sin \psi_1 \sin \psi_2 \right],$$

$$u_{tt}(x,t) = a\omega^2 \sin \psi_1 \sin \psi_2 - a_t \omega \sin \psi_1 \cos \psi_2 + \varphi_t a \omega \sin \psi_1 \sin \psi_2,$$

$$u_{tx}(x,t) = -a\omega \left[\frac{\kappa + \chi}{2} \cos \psi_1 \cos \psi_2 - \frac{\kappa - \chi}{2} \sin \psi_1 \sin \psi_2 \right] - a_x \omega \sin \psi_1 \cos \psi_2 + a\omega \varphi_x \sin \psi_1 \sin \psi_2,$$

$$u_{tx}(x,t) = -a\omega \left[\frac{\kappa + \chi}{2} \cos \psi_1 \cos \psi_2 - \frac{\kappa - \chi}{2} \sin \psi_1 \sin \psi_2 \right] - a_t \left(\frac{\kappa + \chi}{2} \cos \psi_1 \sin \psi_2 + \frac{\kappa - \chi}{2} \sin \psi_1 \cos \psi_2 \right) -$$

$$- a\varphi_t \left(\frac{\kappa + \chi}{2} \cos \psi_1 \cos \psi_2 - \frac{\kappa - \chi}{2} \sin \psi_1 \sin \psi_2 \right).$$

Із останніх двох співвідношень за умови сумісності $u_{xt}(x,t) = u_{tx}(x,t)$ отримуємо додаткове диференціальне рівняння, яке зв'язує невідомі параметри a і φ

$$\omega(a_x \cos \psi_2 - a\varphi_x \sin \psi_2) = \frac{\kappa - \chi}{2} (a_t \cos \psi_2 - a\varphi_t \sin \psi_2). \quad (10)$$

Формально вважаючи a і φ функціями нової змінної $\theta = \frac{\kappa - \chi}{2} x + \omega t$, знаходимо

$$a_x = \frac{\kappa - \chi}{2} a_\theta, \quad a_t = \omega a_\theta,$$

$$\varphi_x = \frac{\kappa - \chi}{2} \varphi_\theta, \quad \varphi_t = \omega \varphi_\theta. \quad (11)$$

Якщо вказані вирази підставити на місце $a_t, a_x, \varphi_t, \varphi_x$ у співвідношення (10), то переконуємося, що воно перетворюється у тотожність, а отже, умови сумісності для функції $u(x, t)$ виконуються. Аналогічна процедура перетворює диференціальні залежності (8), (9) до вигляду

$$a_\theta \cos \psi_2 - a \varphi_\theta \sin \psi_2 = 0. \quad (12)$$

Роблячи наведені вище заміни змінних також в частинних похідних $u_{xx}(x, t), u_{tt}(x, t), u_{xt}(x, t)$, отримуємо

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= a \left[\frac{\kappa^2 + \chi^2}{2} \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \frac{\kappa^2 - \chi^2}{2} \cos \psi_1 \cos \psi_2 \right] - \\ & a_\theta \frac{\kappa - \chi}{2} \left[\frac{\kappa + \chi}{2} \cos \psi_1 \sin \psi_2 + \frac{\kappa - \chi}{2} \sin \psi_1 \cos \psi_2 \right] - \\ & - a \varphi_\theta \frac{\kappa - \chi}{2} \left[\frac{\kappa + \chi}{2} \cos \psi_1 \cos \psi_2 - \frac{\kappa - \chi}{2} \sin \psi_1 \sin \psi_2 \right], \\ u_{tt}(x, t) &= a \omega^2 \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \omega^2 \sin \psi_1 (a_\theta \cos \psi_2 - \varphi_\theta a \sin \psi_2), \\ u_{tx}(x, t) = u_{xt}(x, t) &= -a \omega \left[\frac{\kappa + \chi}{2} \cos \psi_1 \cos \psi_2 - \frac{\kappa - \chi}{2} \sin \psi_1 \sin \psi_2 \right] - \omega \frac{\kappa - \chi}{2} \sin \psi_1 (a_\theta \cos \psi_2 - a \varphi_\theta \sin \psi_2). \quad (13) \end{aligned}$$

З врахуванням наведеного вище, із (1) отримуємо диференціальне рівняння, яке зв'язує a_θ і φ_θ

$$\begin{aligned} & a_\theta (\sin \psi_1 \cos \psi_2 (-\omega^2 - \alpha^2 \left(\frac{\kappa - \chi}{2} \right)^2 - 2\beta \omega \frac{\kappa - \chi}{2})) + \alpha^2 \frac{\kappa^2 - \chi^2}{4} \cos \psi_1 \sin \psi_2 + \\ & + \varphi_\theta a \left(\sin \psi_1 \sin \psi_2 \left(\omega^2 + \beta \omega (\kappa - \chi) - \alpha^2 \frac{(\kappa - \chi)^2}{4} \right) + \alpha^2 \frac{\kappa^2 - \chi^2}{4} \cos \psi_1 \cos \psi_2 \right) = \mathcal{F}_1(a, \psi_1, \psi_2), \quad (14) \end{aligned}$$

$$\text{де } f_1(a, \psi_1, \psi_2) = f(u, u_x, u_t) \left. \begin{array}{l} u(x, t) = \frac{a}{2} \sin \psi_1 \sin \psi_2, \\ u_x(x, t) = \frac{a}{2} \left(\frac{\kappa + \chi}{2} \cos \psi_1 \sin \psi_2 - \frac{\kappa - \chi}{2} \sin \psi_1 \cos \psi_2 \right), \\ u_t(x, t) = \frac{a}{2} \omega \cos \psi_1 \cos \psi_2 \end{array} \right\}.$$

Система диференціальних рівнянь (12) і (14) визначає a_θ і φ_θ у вигляді

$$\begin{aligned} a_\theta &= \frac{-4\varepsilon \sin \psi_2 f_1(a, \psi_1, \psi_2)}{\Delta \sin \psi_1}, \\ \varphi_\theta &= \frac{-4\varepsilon \cos \psi_2 f_1(a, \psi_1, \psi_2)}{\Delta a \sin \psi_1}, \quad (15) \end{aligned}$$

де $\Delta = 4\omega^2 + 4\beta\omega(\kappa - \chi) - \alpha^2(\kappa - \chi)^2$.

Співвідношення (15) можна дещо спростити: параметри, які визначають закони зміни основних характеристик хвильового процесу, є повільно змінними величинами (амплітуда і частота хвильового процесу за один період змінюються на величину порядку ε). Отже, точність отриманих

виразів не зміниться, якщо у них допустити відхилення порядку вищого ніж \mathcal{E} . Останнє дозволяє для системи рівнянь (15) застосувати апарат теорії усереднень [8] і замінити її більш простою

$$\begin{aligned} a_\theta &= \frac{-4\mathcal{E}}{\Delta\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \psi_1, \psi_2) \sin \psi_2 \sin \psi_1 d\psi_1 d\psi_2, \\ \varphi_\theta &= \frac{-4\mathcal{E}}{\Delta\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \psi_1, \psi_2) \cos \psi_2 \sin \psi_1 d\psi_1 d\psi_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Треба зауважити, що усереднення за змінною ψ_1 еквівалентне усередненню відповідних виразів на інтервалі $[0, l]$ за лінійною змінною x , а це дозволяє систему диференціальних рівнянь (16) замінити такою:

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{-4\mathcal{E}\omega}{\Delta\pi l} \int_0^l \int_0^{2\pi} f_1\left(a, \frac{k\pi x}{l}, \psi_2\right) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \psi_2 dx d\psi_2, \\ a_x &= \frac{-2\mathcal{E}(\kappa + \chi)}{\Delta\pi l} \int_0^l \int_0^{2\pi} f_1\left(a, \frac{k\pi x}{l}, \psi_2\right) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \psi_2 dx d\psi_2, \\ \varphi_t &= \frac{-4\mathcal{E}\omega}{\Delta\pi l} \int_0^l \int_0^{2\pi} f_1\left(a, \frac{k\pi x}{l}, \psi_2\right) \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \psi_2 dx d\psi_2, \\ \varphi_x &= \frac{-2\mathcal{E}(\kappa + \chi)}{\Delta\pi l} \int_0^l \int_0^{2\pi} f_1\left(a, \frac{k\pi x}{l}, \psi_2\right) \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \psi_2 dx d\psi_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Останні два диференціальні рівняння системи (17) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \psi_{2t} &= \omega - \frac{4\mathcal{E}\omega}{\Delta\pi l} \int_0^l \int_0^{2\pi} f_1\left(a, \frac{k\pi x}{l}, \psi_2\right) \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \psi_2 dx d\psi_2, \\ \psi_{2x} &= \frac{\kappa + \chi}{2} - \frac{2\mathcal{E}(\kappa + \chi)}{\Delta\pi l} \int_0^l \int_0^{2\pi} f_1\left(a, \frac{k\pi x}{l}, \psi_2\right) \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \psi_2 dx d\psi_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Отже, коливний процес рухомих одновимірних систем, рух яких описано однорідною крайовою задачею (1), (2), описують залежністю (3) або (4), в якій параметри a, ψ_1, ψ_2 визначені диференціальними рівняннями (17), (18).

Загальні висновки. На основі отриманих у роботі результатів можна описати динамічні процеси широкого спектра рухомих одновимірних систем. Вони, зокрема, дають змогу оцінити вплив як кінематичних параметрів, так і нелінійних сил на динаміку процесу; показують, що стала швидкість руху середовища приводить до зменшення частоти його коливань, нелінійні ж сили впливають на форму хвиль і швидкість поширення. Крім того, треба зазначити: а) із отриманого граничним переходом при $\beta \rightarrow 0$ отримано результати щодо нерухомого середовища; б) запропоновану методику дослідження хвильових процесів рухомих нелінійно пружних систем можна поширити на деякі інші крайові умови, а також і на неавтономний випадок.

1. Доценко П.Д. Колебание и устойчивость движущейся полосы // *Машиноведение*. – 1969. – № 5. – С. 18–24. 2. Митропольский Ю.А. О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Клейна – Гордона // *Укр. мат. журн.* – 1995. – 47, № 9. – С. 209–216. 3. Митропольский Ю.А., Лимарченко О.С. К вопросу об асимптотических приближениях для медленных волновых процессов в нелинейных диспергирующих средах // *Укр. мат. журн.* – 1998. – 50, № 3. – С. 3573–71. 4. Мартинців М.П., Сокіл Б.І., Сокіл М.Б. Хвильові процеси в однорідних нелінійно пружних системах і методи їх дослідження // Зб. “Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість”. – Львів: УкрДЛТУ – 2003. – Вип. 28. – С. 81–89. 5. Мартинців М.П., Сокіл М.Б. Одне узагальнення методу

д'Аламбера для систем, які характеризуються позовжнім рухом // Зб. науково-технічних праць: УкрДЛТУ – 2003. – Вип. 13.4. – С. 64–67. 6. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа. – 712 с. 7. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. – 456 с. 8. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наукова думка, 1972. – 440 с.

УДК 621.825.5

Я.М. Новіцький, В.В. Ступницький*, О.Й. Коцюмбас**
Національний Університет “Львівська політехніка”,
кафедра деталей машин,
*кафедра технології машинобудування,
**кафедра експлуатації та ремонту автомобільної техніки

РОЗРАХУНОК ТА КОНСТРУЮВАННЯ ПРОРІЗНОЇ КОМПЕНСАЦІЙНОЇ МУФТИ

© Новіцький Я.М., Ступницький В.В., Коцюмбас О.Й., 2005

Розглянуто основи розрахунку та конструювання пружної компенсаційної муфти. Наведено основні залежності та методи їх встановлення, критерії оптимізації та способи вдосконалення конструкції. Перелічуються переваги та недоліки конструкції та можливі галузі її використання.

Bases of calculation and designing of resilient compensative muff are examined. The main dependences and methods of their mounting, criteria of optimization and methods of perfection of the unit are given here. Advantages and lacks of the unit and possible spheres of its use are counted.

Один із найпоширеніших способів з'єднання неспіввісних валів – використання пружних компенсаційних муфт, характерною деталлю яких є еластичний компенсаційний елемент, що деформується в процесі експлуатації муфти.

Еластичні компенсаційні елементи таких муфт зазвичай виготовляють із гумових (рідше поліуретанових) матеріалів [1], які не витримують підвищених температур, що нерідко трапляється під час гасіння пожеж. Інший різновид компенсаційних елементів – металеві пружини та мембрани [3] – стійкі до високих температур, але мають деякі недоліки, а саме – високу вартість, низьку надійність, великі габаритні радіальні розміри.

Метою статті є розробка і дослідження нової конструкції компенсаційної муфти з меншими вартістю та габаритами і підвищеною надійністю завдяки двом особливостям: по-перше, муфта виготовлена з металу; по-друге – вона є суцільною, тобто не має складальних одиниць.

Конструкцію такої муфти наведено на рис. 1. Як видно із рисунка, основою муфти є труба із пружинної сталі, в якій з допомогою електроерозійного верстата виконано дуже вузькі ($0,25 \pm 0,75$ мм) меандроподібні прорізи, що надають муфті високої податливості, і, як наслідок, компенсації неспіввісності валів.

Особливістю електроерозійної обробки [4] є висока точність ($\pm 0,01 \pm 0,02$ мм) отриманих пазів, а також те, що пази можна виконувати після термообробки заготовки, що виключає короблення деталі. Для знімання дефектного шару металу з поверхні пазів та покращання параметрів шорсткості ($Ra1 \pm 2,5 \rightarrow Ra0,16 \pm 0,25$), а також для підвищення корозійної стійкості застосовують [4] електрохімічне полірування виробу.

Принцип дії муфти такий. Муфта в ненавантаженому стані має високу податливість (рис. 2, область 1), що дозволяє легко з'єднати вали між собою. Під час навантаження муфти (передача моменту) вузькі пази змикаються, і жорсткість муфти різко зростає (область 3).