УДК 517.912

Д.М. Марченко, О.О. Вєтров, В.М. Гелетій*
Східноукраїнський національний університет імені Володимира Даля,
*Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра деталей машин

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ОБВІДНИХ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЩО ОПИСУЮТЬ ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ

Розгрянуто методику побудови наближеного розв'язку стохастичного диференціального рівняння першого порядку, у коефіцієнти якого входять випадкові величини. Побудовано довірчий інтервал, верхню і нижню обвідні всіх можливих розв'язків цього рівняння, наведено результати числових експериментів.

In given article for building approximate decisions of stochastic differential first-order equation, in factors which enter the random quantities, is built confidential interval, upper and lower bending around all possible decisions of this equation. Happen To the results of counted experiments.

Необхідність дослідження диференціальних рівнянь з випадковими функціями зумовлена вимогами адекватного моделювання динамічних процесів механічних та електромеханічних систем та систем їх керування. На жаль, теорію класичних диференціальних рівнянь з її розвинутим аналітичним апаратом у цій ситуації не застосовують, оскільки частина коефіцієнтів диференціального рівняння є функціями випадкових величин.

У роботі [1] досліджено стохастичне диференціальне рівняння першого порядку:

$$d\xi\ (t)=a(t,\ \xi\ (t))\ dt+\sigma\ (t,\ \xi\ (t))\ d\omega\ (t) \tag{1}$$

з початковою умовою $\xi\ (0)=\xi_0$, розв'язком якого є дифузійний марківський процес. Наведено узагальнене визначення таких рівнянь, основане на понятті криволінійного інтеграла уздовж випадкової кривої, що дозволяє аналізувати проблематику розв'язання різних видів стохастичних диференціальних рівнянь.

Однак проблеми практичної спрямованості застосування стохастичних диференціальних рівнянь для опису конкретних перехідних динамічних процесів потребують свого розв'язання і більш чітких практичних рекомендацій. Зокрема дуже корисним і наочним є графічне подання розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.

Класична статистика випадкових процесів спирається на строгий математичний апарат і вимагає як вихідні дані те, що практика дати не в змозі. Неможливо, наприклад, повторити експеримент за абсолютно тих самих початкових умов, одержати безліч реалізацій того самого процесу. Тобто, статистика випадкових процесів, маючи могутній апарат, не має необхідної бази для проведення числових експериментів.

Однак якщо вважати, що динамічний процес в системі описано диференціальними рівняннями (звичайними чи в частинних похідних), то можна використати налагоджений апарат числових методів розв'язання цих рівнянь, навіть коли невідомі функції мають імовірнісний характер. Кожна оцінка може мати точковий чи інтервальний характер. Для точкової оцінки достатньо розглядати рівняння без випадкових складових, а за їх наявності необхідна побудова інтервальних характеристик, які визначають границі довірчої зони для імовірнісного розв'язання рівняння, тобто "коридор", який містить можливі розв'язки. Це особливо важливо під час фазових переходів динамічної системи, коли малі впливи на вході системи приводять до суттєвої невизначеності подальшого її поводження.

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{du}{dt}+\left(\frac{R+R_M}{R_M C_M R}\right)\ u=\frac{E_0}{RC_M}\sin\left(\omega t+\psi\right)\ ,$$

де $u(t)$ – невідома функція; R, E_0, ω, ψ – деякі константи (вхідні дані), характерні для модельованого процесу; R_M, C_M – випадкові величини з певними законами розподілу.

Для кожної із стохастичних складових може бути свій закон розподілу. Моделювання випадкових чисел з довільним заданим розподілом важливе для задач, які розв'язують за допомогою числових експериментів, оскільки дозволяє імітувати різні процеси без сумнівних допущень про вид розподілу. На практиці використовують як специфічні для заданого розподілу, так і загальні методи генерації випадкових чисел на основі базової випадкової величини (БВВ), рівномірно розподіленої на інтервалі $(0,1)$.

Найпоширенішим видом розподілу є нормальний розподіл. У зв'язку з цим під час моделювання різних явищ виникає потреба оперувати послідовністю випадкових чисел з нормальним законом розподілу. Відомий метод реалізації нормального розподілу оснований на центральній граничній теоремі, яка стверджує, що розподіл суми незалежних випадкових величин $\xi_i, i=1,\dots,n$ наближається до нормального за необмеженого збільшення n.

$$Norm(\xi,m,D)=m+\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{n}{2}\right)\ ,$$

де $Norm(\xi,m,D)$ – нормально розподілена випадкова величина з параметрами m і $D>0$, а ξ_i – чергова БВВ. Розглянемо випадок, коли $n=12$. Тоді

$$Norm(\xi,m,D)=m+\sqrt{D}\left(\sum_{i=1}^{12}\xi_i-6\right)\ .$$

У числовому алгоритмі на кожному кроці інтегрування під час обчислення чергової ітерації відбувається "розігрування" значень випадкових процесів. При цьому вибудовуються випадкові траєкторії розв'язків. Усереднення ансамблю цих траєкторій дає математичне сподівання стохастичного інтеграла, а сукупність можливих розв'язків дає змогу побудувати верхню і нижню обвідні розв'язків і *P*-відсоткову довірчу зону всіх можливих розв'язків. Область між верхньою і нижньою обвідними визначає так званий "коридор", що містить можливі реалізації стохастичного диференціального рівняння.

У числовому експерименті для побудови наближеного розв'язку стохастичного диференціального рівняння було обрано метод Рунге–Кутта 4-го порядку. Цей метод має достатню точність і є найпоширенішим на практиці. Для початку розрахунку досить вибрати сітку і задати початкові умови, потім обчислення ведуть за однотипними формулами.

Побудовою верхньої і нижньої обвідних одержуємо "грубу оцінку" можливих розв'язків стохастичного диференціального рівняння. Для уточнення цього "коридору" розв'язків будуємо *P*-відсоткову довірчу зону можливих розв'язків. Цей "коридор" (оскільки процес не стаціонарний) може як розширюватися, так і звужуватися протягом усього часу *t*.

Алгоритм одержання "коридору" і довірчої зони розв'язків стохастичного диференціального рівняння (1) розглянемо на прикладі дослідження функціонування електричної схеми (коливальний контур), що моделює роботу деякої механічної системи.

1. Задають початкове і кінцеве значення інтервалу і крок *h* часу та інші вихідні параметри модельованого процесу. Наприклад , границі інтервалу часу:

$$t_п = 0,\ t_к = 0{,}05.$$

Початкове значення $u_0=u(t=0)$ розглядають у двох варіантах:

a) $u_0=u(t=0)=0$;

b) $u=u(t=0)=60\div 100мВ$;

Для спрощення відпрацьовування алгоритму прийнято $u = u(t=0) = 80 \ мВ$.

Вважатимемо, що величина ψ дорівнює нулю, а ω змінюємо, визначаючи її за формулою $\omega = 2\pi F$ і приймаючи значення F з інтервалу $200-1000$ Гц. Так, для $F = 200$ Гц знаходимо

$$\omega = 2\pi F = 200 \cdot 2\pi = 1256{,}63 \text{ Гц.}$$

Задаємо також вхідні дані:
$R = 500 \cdot 10^3$ Ом, $R_M = 1 \cdot 10^6$ Ом, $C_M = 15 \cdot 10^{-9}$ Ф. ($\boldsymbol{R}$ можна варіювати від $50 \cdot 10^3$ Ом до $500 \cdot 10^3$ Ом).

Будуємо числовий розв'язок звичайного диференціального рівняння (без врахування стохастичних складових).

2. Проводимо задану кількість випадкових числових реалізацій ($n = 50$). Для кожної i-ї реалізації на кожному етапі інтегрування йде звертання до функції, що містить коефіцієнти з випадковими складовими C_M і R_M. Вибірки $\left\{C_M^j\right\}$ і $\left\{R_M^j\right\}$ генеруємо запропонованим вище способом. Спочатку одержуємо $\omega = \sum_{i=1}^{12} \xi_i - 6$. Потім

$$C_M = m_C + s_C \cdot \omega \ ;$$
$$R_M = m_R + s_R \cdot \omega \ ,$$

де s_C і s_R – середньоквадратичні відхилення відповідних параметрів, а m_C і m_R – їх математичні сподівання .

Для кожного проміжку часу t *о*бчислюємо математичне сподівання і дисперсію згідно з формулами:

$$m(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i(t) \ , \ \sigma^2(t) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(u_i - \left[m(t)\right]\right)^2 ,$$

а також максимальне і мінімальне значення u_i ;

3. За максимальними і мінімальними значеннями u_i, одержаними на попередньому кроці, для кожного t будуємо верхню і нижню обвідні і P-відсоткову довірчу зону

$$m(t) \pm \frac{\sigma(t)}{\sqrt{n}} \cdot t_p \ ,$$

де t_p – квантіль. Для $P = 0{,}95$ – $t_p = 1{,}94$.

У випадку одержання коефіцієнтів, які істотно відрізняються за величиною (на кілька порядків), масштабують і розподіляють досліджувані розв'язки диференціального рівняння на "зручні" інтервали.

На основі розробленої комп'ютерної програми для заданих вище вхідних даних було одержано розв'язки досліджуваного стохастичного диференціального рівняння (рис. 1). На рис. 1 показано одержаний "коридор" усіх можливих реалізацій стохастичного диференціального рівняння, а також математичне очікування. На рис. 2 під час збільшення масштабу помітна довірча зона.

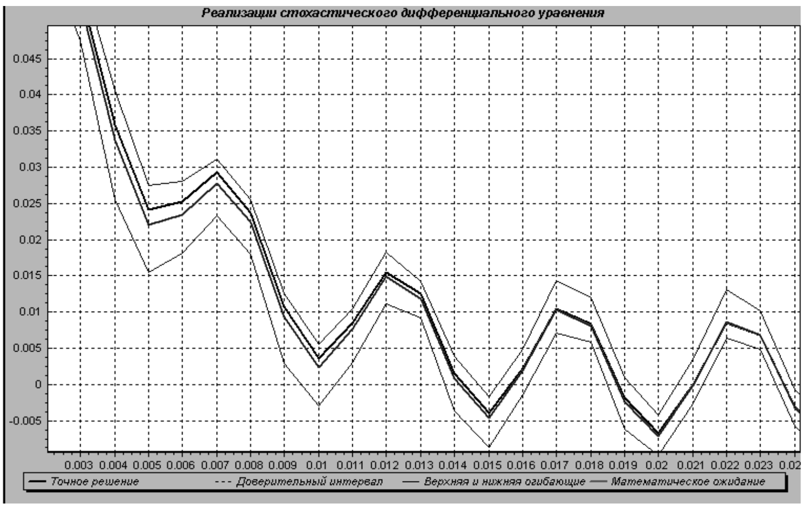

Рис. 1. Точний розв'язок, верхня і нижня обвідні, математичне очікування

Програмне забезпечення дозволяє зручно коректувати значення параметрів модельованого процесу і одержувати інформативні зображення його можливих реалізацій.

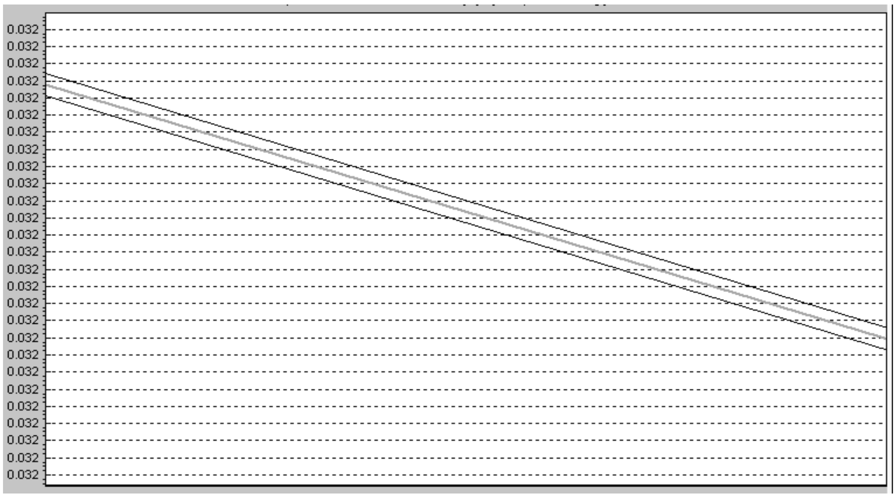

Рис. 2. Математичне очікування можливих розв'язків стохастичного диференціального рівняння і довірча зона в збільшеному масштабі

На практиці не завжди можливо порівняти аналітичний та числовий варіанти розв'язку хоча б тому, що можливість одержання аналітичного розв'язку в явному вигляді обмежена невеликим класом диференціальних рівнянь. Для розглянутої схеми існувала можливість такого порівняння. Отримані реалізації випадкового процесу були практично нерозрізнені, що означає, що обидві схеми розв'язання стохастичного диференціального рівняння еквівалентні. Адекватність запропонованої методики числового моделювання та її розширені можливості порівняно з аналітичними методами дає змогу рекомендувати її для розв'язання задач моделювання стохастичних динамічних процесів.

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастичні диференціальні рівняння. – К.: Наукова думка., 1968. – 354 с. 2. Пожидаев В.Ф. Прикладні задачі математичної статистики. – Луганськ: Видавництво ВУГУ, 1998. – 153 с. 3. Айвазян С.А. і ін. Прикладна статистика: Основи моделювання і первинна обробка даних: Довідковий посібник. – М.: Фінанси і статистика, 1983. – 471 с. 4. Калиткин Н.Н. Числовые методы. – М.: Наука, 1978. – 322 с.