

форма коливань в функції $\varphi(x)$ матиме вигляд, як на рис. 4, а. За частоти вимушених коливань $\omega = 3000$ рад/с форма коливань для РО матиме вигляд, як на рис. 4, б.

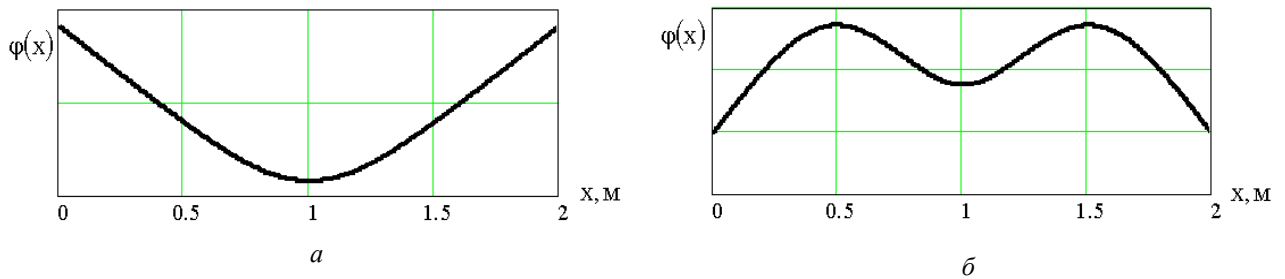


Рис. 4. Форми коливань РО для частоти примусових коливань $\omega = 157$ рад/с (а); $\omega = 3000$ рад/с (б)

Висновки. Вищеописана математична модель РО дає змогу проаналізувати форми коливань, а також їх амплітуди в кожній точці РО, а також виявити небезпечні частоти коливань РО. Отже, можна більш прогнозовано розробляти вібраційні конвеєри з довгомірними РО на пружній основі.

Ці дослідження, а також визначення найоптимальніших варіантів кріплення пружних елементів, заплановані на майбутнє.

1. *Вибрационный конвейер: А.с. №1433882 СССР, МКИ В 65 G 27/0 ./ В.А. Повидайло, В.С. Шенбор (СССР). – Оpubл. 1988, Бюл. № 40.* 2. *Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968.*

УДК 621.01:621-868

О.С. Ланець, В.С. Андреев*, Я.В. Шпак

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра автоматизації та комплексної механізації машинобудівної промисловості,
*кафедра технології машинобудування

РОЗРАХУНОК ТА ПЕРЕВАГИ ПЛОСКИХ РІВНОМІЦНИХ ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ПЕРЕДАВАННЯ ПРЯМОЛІНІЙНОГО РУХУ У РЕЗОНАНСНИХ ВІБРАЦІЙНИХ МАШИНАХ

© Ланець О.С., Андреев В.С., Шпак Я.В., 2005

Описано методику розрахунку рівноміцних плоских пружних елементів, які використовують у резонансних вібраційних машинах із прямолінійними коливаннями. Обґрунтовано переваги використання таких пружних елементів порівняно з класичними плоскими пружними елементами прямокутного профілю.

In the article the method of calculation equally strong flat spring elements, which are used in the resonance vibration machines with rectilinear oscillation, is described. Advantages of use of such spring elements on comparison with classic flat spring elements of a rectangular type are grounded.

Вступ. Найвідповідальнішими деталями в резонансних вібраційних машинах є пружні елементи. Від їх правильного розрахунку залежать надійність та ефективність (необхідна продуктивність та довговічність) роботи усієї конструкції машини.

Постановка проблеми. У сучасних резонансних вібраційних машинах для передавання прямолінійного руху найчастіше використовують плоскі пружні елементи, форма перерізу яких прямокутна і постійна за довжиною (такі пружні елементи називатимемо плоскими пружними

елементами прямокутного профілю). Це зумовлено тим, що у них порівняно з елементами з круглим поперечним перерізом напруження, що виникають в поверхневих шарах, за тих же моментів інерції поперечного перерізу, є меншими. Однак, за довжиною плоского пружного елемента напруження розподілені нерівномірно, зокрема поблизу місць кріплення вони є максимальними, а посередині мінімальними.

Огляд літератури. У роботах [1, 2] розглянуто проблему забезпечення рівномірного розподілу напружень за усією довжиною плоских пружних елементів, що використовують у резонансних вібраційних машинах для передавання прямолінійного руху.

Постановка задачі. Мета статті – доповнити методикау [1, 2] розрахунку плоских рівномірних пружних елементів (елементів з однаковим опором згинання за їх довжиною), які використовують в резонансних вібраційних машинах для передавання прямолінійного руху, та глибше їх проаналізувати порівняно з пружними елементами прямокутного профілю.

Виклад основного матеріалу. На рис.1 зображено плоский пружний елемент прямокутного профілю у здеформованому стані, кріплення якого зміщені одне відносно одного паралельно без повертання. За цією схемою згину найбільші напруження виникають у місцях кріплення його до коливальних мас, тобто на кінцях робочої ділянки пружного елемента. Центральна ділянка водночас залишається недовантаженою.

Знайдемо таку раціональну форму плоского пружного елемента, для якої напруження, що виникатимуть в ньому під час згину, будуть однакові, а розміри поперечних перерізів елемента неперервно змінюватимуться за усією його довжиною. З урахуванням цих умов формули пружної лінії, що виведені на підставі гіпотези плоских поперечних перерізів, є неправильними, а саму гіпотезу використовувати тут не можна. Проте розв'язки з використанням теорії пружності показують, що для випадку, коли кут нахилу твірної поверхні пластини до її осі досить малий, тобто не перевищує $15 - 20^\circ$ (як і в нашому випадку), з достатньою для інженерної практики точністю можна вважати розподіл нормальних напружень за висотою поперечного її перерізу прямолінійним. Тоді, як правило, можна користуватися звичайною умовою міцності та диференціальним рівнянням пружної лінії [3], тобто:

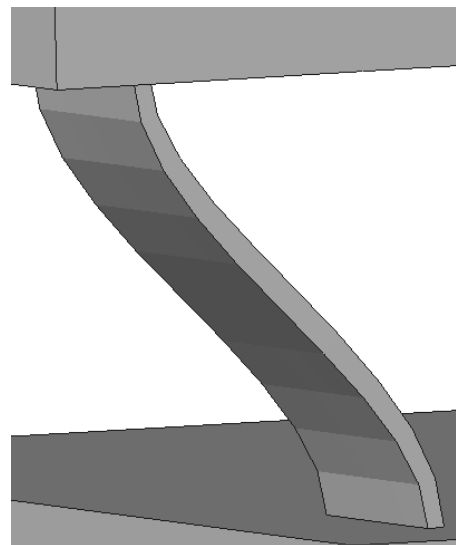


Рис. 1. Схема згину плоского пружного елемента

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W(x)} \leq [\sigma]; \quad (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ(x)}, \quad (2)$$

де $M(x)$ – зміна згинального моменту за довжиною x плоского пружного елемента; σ_{\max} , $[\sigma]$ – відповідно максимальне та допустиме напруження розтягу; E – модуль Пуассона; $W(x)$, $J(x)$ – відповідно зміна моменту опору та моменту інерції за довжиною x плоского пружного елемента.

У нашому випадку умовно розглядаємо плоский суцільний стрижень, розміри поперечних перерізів якого неперервно змінюються за довжиною. Це стрижень з однаковим опором згинання, в усіх поперечних перерізах якого максимальне напруження дорівнює припустимому, тобто:

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{|M(x)|}{W(x)} = [\sigma]. \quad (3)$$

Отже, рівняння для визначення поперечних розмірів стрижня однакового опору набуде вигляду:

$$W(x) = \frac{M(x)}{[\sigma]} \quad (4)$$

Знайдемо аналітичний вираз для визначення зміни ширини $b_p(x)$ прямокутного перерізу плоского пружного елемента за постійної його товщини a_p . Момент опору $W(x)$ запишемо у вигляді:

$$W(x) = \frac{a_p^2 \cdot b_p(x)}{6} \quad (5)$$

Прирівнявши праві частини виразів (4) і (5), отримаємо такий вираз для визначення закону зміни ширини $b_p(x)$:

$$b_p(x) = \frac{6 \cdot M(x)}{a_p^2 \cdot [\sigma]} \quad (6)$$

Аналізуючи вираз (6), визначаємо, що ширина $b_p(x)$ змінюється за лінійною залежністю. Плоский рівномічний пружний елемент матиме форму, як на рис. 2, де профіль пружини матиме вигляд двох рівнобедрених трикутників, ширина яких у місцях кріплення становитиме $b_p(x) = b_{\max} = b_p$, а посередені – 0. Звичайно, ширина пружного елемента не може дорівнювати нулю, а тому посередені його пропонують скруглювати радіусом R [1], де і вказані необхідні аналітичні формули для розрахунку.

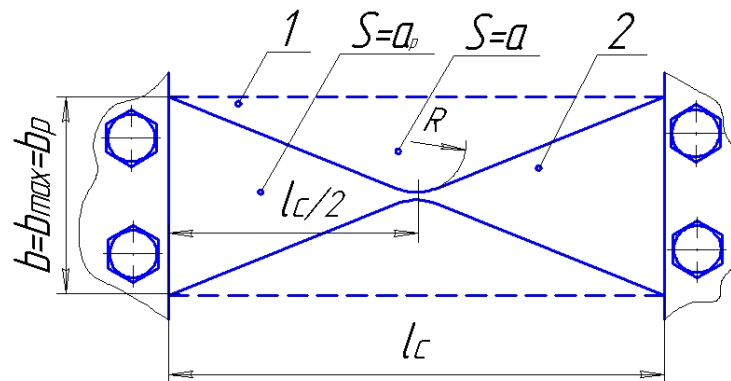


Рис. 2. Плоский пружний елемент прямокутного профілю (1) та рівномічний пружний елемент (2)

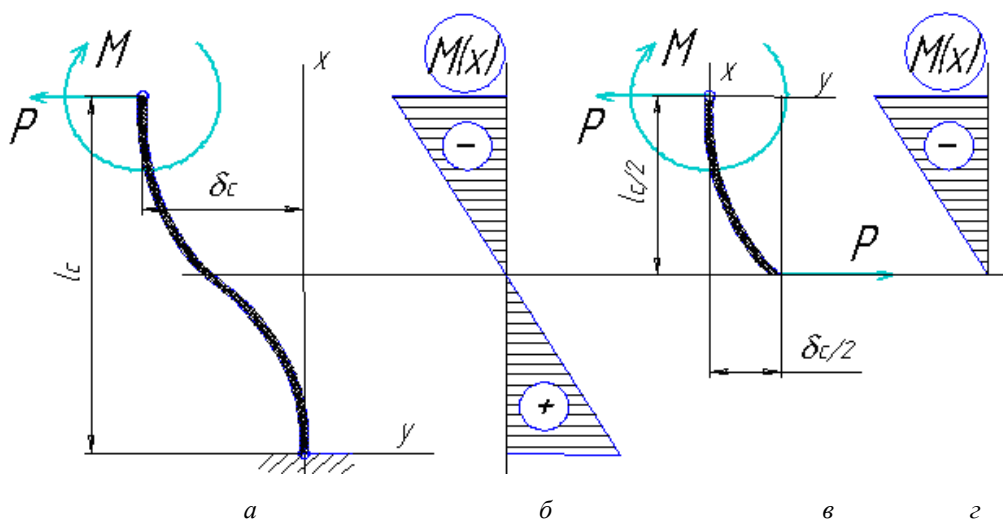


Рис. 3. Схеми навантажень пружного елемента та епюри моментів

Схему навантаження плоского пружного елемента показано на рис. 3, а, а відповідну епюру згинального моменту – на рис. 3, б. Для спрощення розрахунків розглянемо половину довжини пружного елемента, тобто ділянку від одного з його кінців до точки, де момент $M(x)$ змінює свій знак. Еквівалентну схему навантаження та відповідну епюру згинального моменту консолі пружного елемента зображено на рис. 3, в, г. Тоді формула (2) з урахуванням $M(x)$, визначеного з

(6), та для моменту інерції поперечного перерізу пружного елемента $J(x) = \frac{a_p^3 \cdot b_p(x)}{12}$ набуде вигляду:

$$\frac{d^2 y_p}{dx^2} = \frac{2 \cdot [\sigma]}{E \cdot a_p}, \quad (7)$$

де y_p – функція прогину рівномірного пружного елемента за довжиною x .

Двічі проінтегрувавши вираз (7) за змінною x (у межах від 0 до $l_c/2$) множимо на 2, враховуючи, що кінці пружного елемента жорстко защемлені, а отже, для визначення констант інтегрування в місцях защемлення $y_p = y_p' = y_p'' = 0$ отримаємо сумарний прогин плоского рівномірного пружного елемента, коли за його поперечним перерізом виникає однакове напруження $[\sigma]$:

$$\delta_p = y_p = 2 \cdot \int_0^{l_c/2} \int \frac{2 \cdot [\sigma]}{E \cdot a_p} \cdot dx = \frac{l_c^2 \cdot [\sigma]}{2 \cdot E \cdot a_p}. \quad (8)$$

Для плоского пружного елемента прямокутного профілю максимальний згинальний момент $M(x)$ становить [4]:

$$M = M_{\max} = \frac{6 \cdot E \cdot J}{l_c^2} \delta, \quad (9)$$

де δ , J – відповідно максимальний прогин та момент інерції поперечного перерізу зі сторонами a та b плоского пружного елемента прямокутного профілю:

$$J = \frac{a^3 \cdot b}{12}. \quad (10)$$

Своєю чергою, момент опору дорівнює:

$$W = \frac{a^2 \cdot b}{6}. \quad (11)$$

Підставляючи (10) у (9) та згодом (9) і (11) у формулу (3), знаходимо сумарний прогин δ плоских пружних елементів прямокутного профілю:

$$\delta = \frac{[\sigma] \cdot l^2}{3 \cdot E \cdot a}. \quad (12)$$

За умови, що $a = a_p$, прирівнявши вирази (8) та (12), отримаємо:

$$\frac{\delta_p}{\delta} = 1.5. \quad (13)$$

Цей самий результат можна отримати, коли вирази (8) та (12) записано через зусилля P , яке припадає на один пружний елемент. Для рівномірної пружини з формули (6) для $b_p(x) = b_{\max} = b_p$ визначаємо $[\sigma]$:

$$[\sigma] = \frac{6 \cdot M_{\max}}{a^2 \cdot b_p}. \quad (14)$$

Записавши M_{\max} як

$$M_{\max} = \frac{P \cdot l_c}{2}, \quad (15)$$

та підставивши (14) у (8), отримаємо сумарний прогин для рівномічного пружного елемента, який записаний через зусилля P :

$$\delta_p = \frac{3 \cdot P \cdot l_p^3}{2 \cdot a_p^3 \cdot E \cdot b_p}. \quad (16)$$

Вважаючи, що:

$$P = c_p \cdot \delta_p, \quad (17)$$

де c_p – жорсткість, що припадає на один пружний елемент, після підстановки (17) у (16), жорсткість рівномічного пружного елемента становитиме:

$$c_p = \frac{2 \cdot a_p^3 \cdot b_p \cdot E}{3 \cdot l_c^3}. \quad (18)$$

Аналогічні формули для плоского пружного елемента прямокутного профілю визначаємо так. Зусилля P згідно з [4] дорівнює:

$$P = \frac{12 \cdot E \cdot J}{l_c^3} \delta, \quad (19)$$

Тоді, враховуючи (10), сумарний прогин δ плоских пружних елементів прямокутного профілю визначатиметься з виразу:

$$\delta = \frac{P \cdot l_c^3}{a^3 \cdot b \cdot E}. \quad (20)$$

Записавши P як:

$$P = c \cdot \delta, \quad (21)$$

де c – жорсткість, що припадає на один плоский пружний елемент прямокутного профілю та підставивши (21) у (20), отримаємо:

$$c = \frac{a^3 \cdot b \cdot E}{l_c^3}, \quad (22)$$

Прирівнюючи параметри $a = a_p$, $b = b_p$, та розділивши відповідно (16) на (20), отримаємо такий самий результат, як і в (13). Своєю чергою, розділивши (22) на (18), отримаємо:

$$\frac{c}{c_p} = 1.5. \quad (23)$$

Аналізуючи (13) та (23), можна сказати, що *рівномічні пружини порівняно з плоскими пружними елементами прямокутного профілю за умови, що $a = a_p$ і $b = b_{\max} = b_p$ та однакових довжин l_c мають жорсткість в 1.5 рази меншу (див. (23)), а отже прогин в 1.5 рази більший (див. (13))*.

Розглянемо випадок, коли жорсткості рівномічного пружного елемента та елемента з прямокутним профілем, які мають однакову довжину l_c та ширину $b = b_{\max} = b_p$, однакові. Тоді товщину рівномічного пружного елемента можна визначити, прирівнявши (18) та (22) або (16) і (20):

$$a_p = a \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 1.145 \cdot a. \quad (24)$$

Максимальне напруження, що виникає в плоскому пружному елементі прямокутного профілю, згідно з (3) становить:

$$\sigma_{\max} = \frac{6 \cdot M_{\max}}{a^2 \cdot b}, \quad (25)$$

а для рівномічного пружного елемента:

$$\sigma_{p \max} = \frac{6 \cdot M_{\max}}{1.145^2 \cdot a^2 \cdot b}. \quad (26)$$

Поділивши (25) на (26), отримаємо :

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{p \max}} = 1.31. \quad (27)$$

Тобто, порівняно з плоским пружним елементом прямокутного профілю напруження, що виникають у рівномічному елементі за їх однакових параметрів ширини $b = b_{\max} = b_p$ та однакових довжин l_c , забезпечують таку саму жорсткість та прогин, менший на 31%. Це вказує на значну перевагу рівномічних пружних елементів.

Розглянемо випадок, коли жорсткості рівномічного пружного елемента та елемента прямокутного профілю, що мають однакову довжину l_c , ширину $b = b_{\max} = b_p$ та максимальні напруження, які виникають у них, однакові. Тоді, підставляючи (24) в (8) та згодом поділивши вираз (12) на (8), отримаємо співвідношення допустимих прогинів:

$$\frac{[\delta_p]}{[\delta]} = \frac{3a}{2a_p} = \frac{3a}{2 \cdot 1.145a} = 1.31. \quad (28)$$

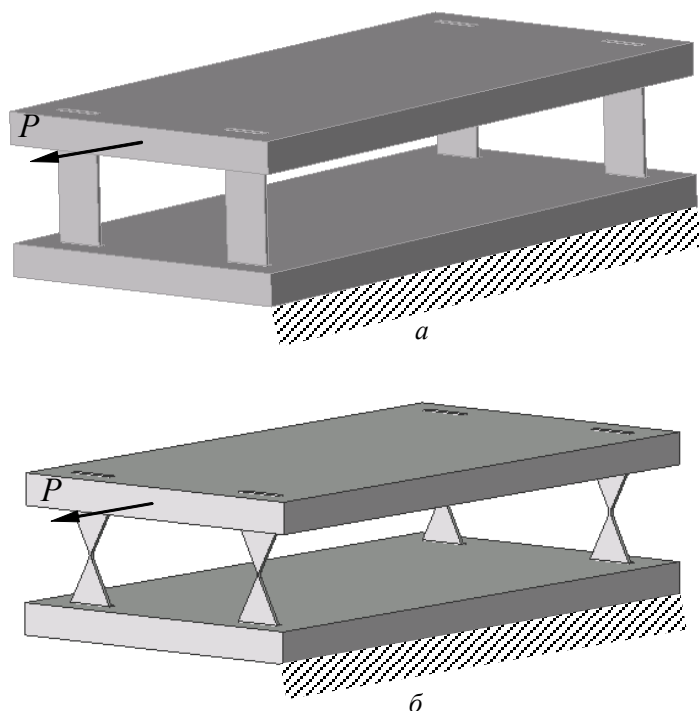


Рис. 4. Досліджувані моделі механічних коливальних систем з плоскими пружними елементами прямокутного профілю (а) та з рівномічними пружними елементами (б)

Отже, для рівномірного пружного елемента допустимий прогин порівняно з плоским пружним елементом прямокутного профілю, забезпечуючи однакові жорсткості та максимальні напруження в пружних елементах за їх однакових параметрів ширини $b = b_{\max} = b_p$ та однакових довжин l_c , більший на 31%. Це дозволяє забезпечувати на рівномірних пружних елементах вищі амплітуди коливань робочих органів вібраційних машин, а отже, пропорційно підвищити їх продуктивність. Такий же результат був отриманий в [1, 2].

Для підтвердження аналітичних розрахунків проведено комп'ютерне моделювання механічної коливальної системи методом скінченних елементів у програмному продукті Cosmos 6.0, що працює в оболонці програмного продукту SolidWorks 2000. За допомогою твердотільної просторової моделі механічної коливальної системи, статичним аналізом визначено напруження в пружних елементах та переміщення мас.

Досліджено моделі двох ідентичних одномасових механічних коливальних систем (рис. 4). Нижні плити у моделях механічної коливальної системи жорстко закріплені. Верхні плити, навантажені однаковим статичним зусиллям $P = 1000$ Н в горизонтальній площині, зсуваються відносно нижніх. Пружні елементи мають розміри $b = b_{\max} = b_p = 30$ мм, $l_c = 60$ мм, $a = a_p = 5$ мм.

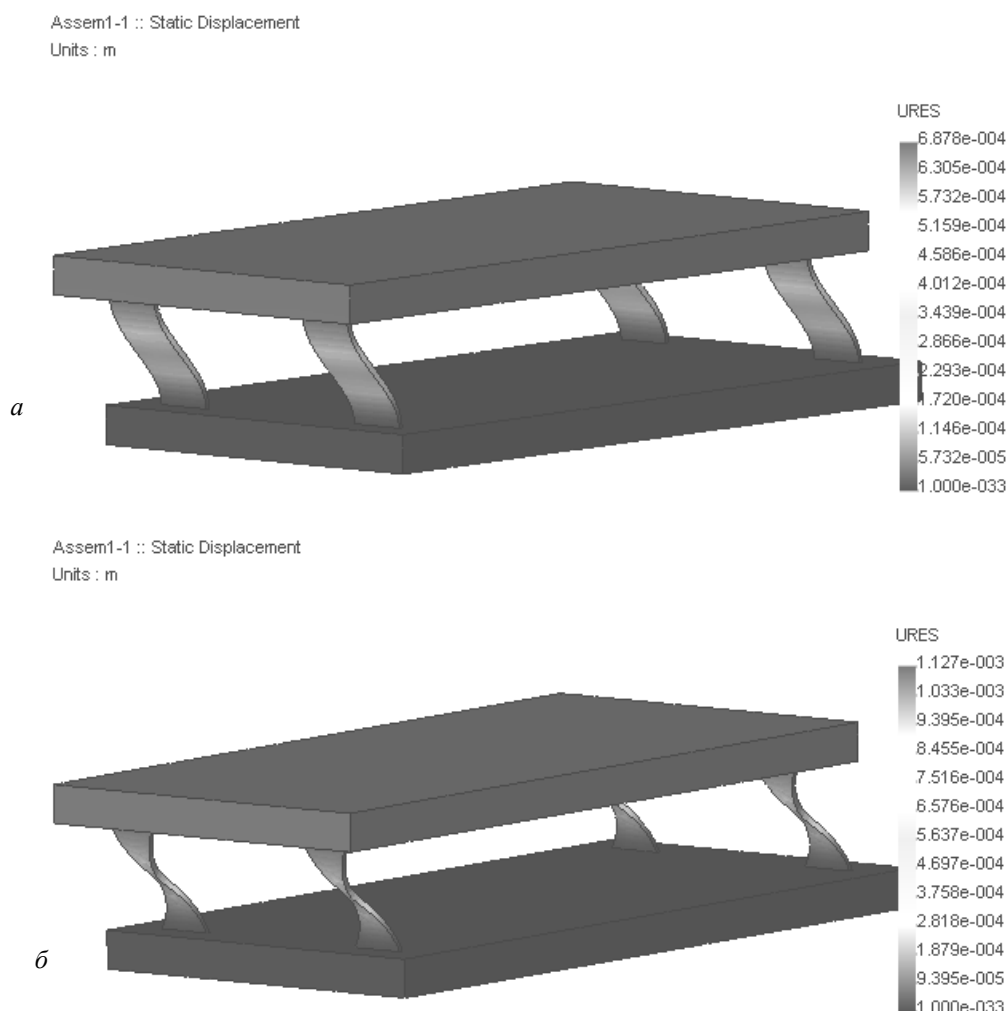


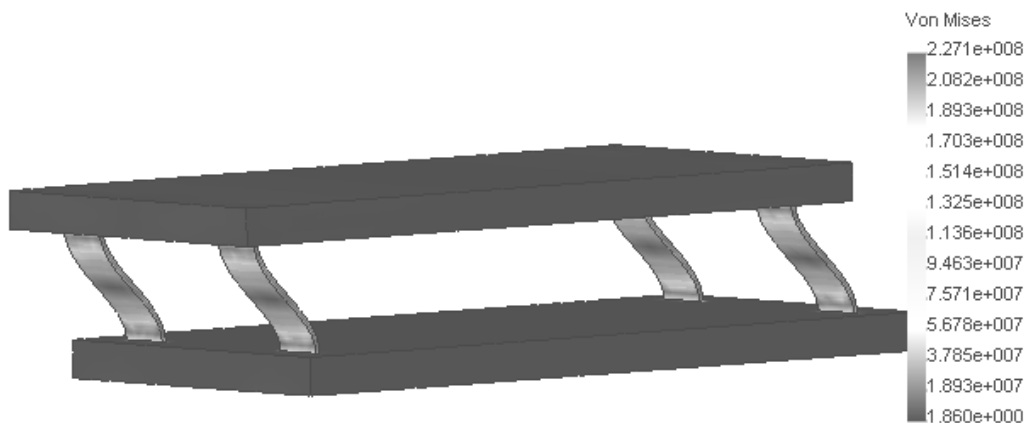
Рис. 5. Розрахунок переміщення верхньої маси механічної коливальної системи з плоскими пружними елементами прямокутного профілю (а) та з плоскими рівномірними пружними елементами (б)

Для параметрів механічної коливальної системи: модуль Пуассона матеріалу пружних елементів $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па; марка сталі Alloy з густиною $\rho = 7700$ кг/м³, та для схеми на рис. 4, а з такими параметрами розбиття на кінцеві елементи: Global Size=7.7446 мм; Tolerance=0.38723 мм; 47540 elements; 11405 corner nodes; 231168 D.O.F., отримано результат, показаний на рис. 5, а, де переміщення верхньої коливальної маси становить $\delta = 0.6878$ мм.

Для схеми рис. 4, б з такими параметрами розбиття на кінцеві елементи: Global Size=7.7512 мм; Tolerance=0.38756 мм; 48033 elements; 11529 corner nodes; 233679 D.O.F. отримано результат, показаний на рис. 5, б, де переміщення верхньої коливальної маси становить $\delta = 1.127$ мм.

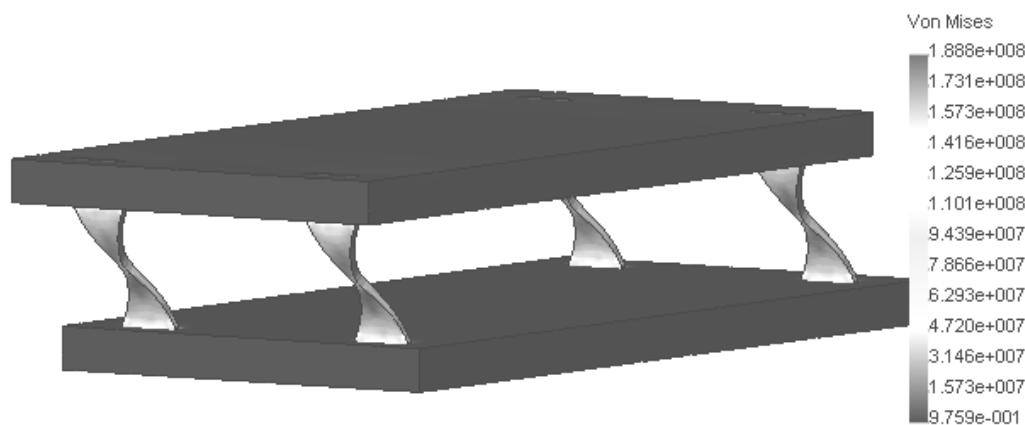
Отже, співвідношення прогинів рівномірної плоскої пружини порівняно з пружиною прямокутного профілю за умови, що $a = a_p$, $b = b_{\max} = b_p$ та однакових довжин l_c , для розрахунків за допомогою методу скінченних елементів статичним аналізом становить $\delta_p/\delta = 1.64$, де відносна похибка порівняно з результатом розрахунків за виразом (13) становить 8.5 %, що в основному пов'язано з неврахуванням поперечних сил під час розрахунку прогину пружного елемента за формулою (8).

Assem1-1 :: Static Nodal Stress
Units : N/m^2



а

Assem1-1 :: Static Nodal Stress
Units : N/m^2



б

Рис. 6. Розрахунок напруження в плоских пружних елементах прямокутного профілю (а) та в плоских рівномірних пружних елементах (б)

Вирівнявши жорсткості пружних елементів в обидвох коливальних системах та вважаючи, що $a_p = 1.145a = 5.725$ мм, обчислюємо напруження, що виникають в механічній коливальній системі з плоскими пружними елементами прямокутного профілю (рис. 6, а) та з рівномісними плоскими пружними елементами (рис. 6, б). Як видно, максимальні напруження в місцях кріплення пружних елементів відповідно становлять $\sigma = 227.1$ МПа та $\sigma_p = 188.8$ МПа, а їх співвідношення $\sigma/\sigma_p = 1.2$, де похибка результатів комп'ютерного моделювання і розрахунків за формулою (27) становить 8.4 %.

Висновок. Порівняльним аналізом плоских рівномісних пружних елементів та елементів прямокутного профілю встановлено:

– напруження, що виникають у пружних елементах за однакової їх ширини $b = b_{\max} = b_p$ та довжини l_c , забезпечуючи ту ж саму жорсткість та прогин, за аналітичними розрахунками (27) менші на 31% у рівномісних пружних елементах та на 20 % з використанням методу скінчених елементів в програмному продукті Cosmos 6.0;

– допустимий прогин, забезпечуючи однакові жорсткості та максимальні напруження в пружних елементах за однакової ширини $b = b_{\max} = b_p$ та однакових довжинах l_c , за аналітичними розрахунками (28) більший у рівномісних пружних елементах на 31%;

– за однакової товщини $a = a_p$, ширини $b = b_{\max} = b_p$ та довжинах l_c пружних елементів, за аналітичними розрахунками жорсткість в 1.5 рази менша (формула (23)), а отже прогин в 1.5 рази більший (13) у рівномісних пружних елементах та в 1.64 рази більший за розрахунками з використанням методу скінчених елементів.

Все це свідчить про безсумнівну перевагу плоских рівномісних пружних елементів порівняно з плоскими пружними елементами прямокутного профілю. Їх використання дасть приблизно на 31 % підвищити допустимі амплітуди прямолінійних коливань робочих органів вібраційних машин, збільшити їх продуктивність.

1. Щигель В.А. Врублевский И.И. Плоские равнопрочные пружины вибрационных машин // Автоматизация производственных процессов в машиностроении и приборостроении. – Львов. – 1990. – № 29. – С. 65–69. 2. Щигель В.А. Оптимізація форми та розрахунок пружних стержнів вібраційних машин // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – Львів. – 1992. – № 31. – С. 67–76. 3. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів / За ред. Г.С.Писаренко. – К.: Вища школа, 1993. 4. Гаврильченко О.В., Ланець О.С., Шпак Я.В. Методика розрахунку комбінованої вертикальної пружної системи резонансної вібраційної притиральної машини з кутовими коливаннями притиру // Машинознавство. – 2004. – №2(80). – С. 36–41.