УДК 621.3.078

Б.Г. Бойчук
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра ЕАП

ВИКОРИСТАННЯ СТРУКТУРОВАНИХ ПЕРЕДАТНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЯКОСТІ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Для дослідження динамічних властивостей систем автоматичного керування пропонується використовувати відношення коефіцієнтів їх характеристичних поліномів. Розроблено спосіб подання характеристичних поліномів через ці відношення. На їх основі для систем до 6-го порядку виведені умови стійкості, а для систем 3-го порядку розроблено діаграму для оцінки якості їх поведінки.

It is proposed to carry out research of dynamic properties of the automatic control systems after ratios of coefficients of their characteristic polynomials. An approach to represent characteristic polynomials using those ratios is proposed. On the basis of these ratios for the systems to the 6th order the inclusive conditions of stability are derived and for the systems of 3th order the diagram for quality attribute estimation is calculated.

Постановка проблеми. Математичні моделі систем автоматичного керування (САК), які використовуються для аналізу та синтезу конкретних систем, містять певний набір досліджуваних варійованих параметрів, кількість яких під час досліджень намагаються зменшити до можливого мінімуму без втрати загальності рішень. Для цього часто переходять до відносних одиниць, використовуючи масштабування за координатами амплітуди та часу або частоти. Отримувані при цьому результати справедливі для багатьох часткових варіантів. Але поведінка САК визначається не так самими коефіцієнтами їх характеристичних поліномів, як співвідношеннями між ними. Тому видається доцільним дослідження поведінки САК вести не за самими коефіцієнтами (в абсолютних чи відносних одиницях) характеристичних поліномів, а за відношеннями цих коефіцієнтів. Для цього доцільно було б подавати характеристичні поліноми через згадані відношення.

Аналіз останніх досліджень. Відомим в теорії керування є зведення характеристичних рівнянь і поліномів до форми Вишнеградського (нормоване рівняння), в результаті якого коефіцієнти доданків найвищого та найнижчого (нульового) степенів перетвореного рівняння стають такими, що дорівнюють одиниці. Це робиться масштабуванням за амплітудою та за часом (частотою) з відповідним вибором базових величин цих координат. Аналогічно в математиці досліджуване рівняння подають в нормальній формі. Інші форми універсалізації рішень не пропонуються. Результати досліджень подаються через коефіцієнти характеристичних рівнянь.

Задачі досліджень. Пропонується перейти на вищий рівень узагальнення і оцінювати поведінку САК не через коефіцієнти, а через відношення коефіцієнтів характеристичних рівнянь, розглядаючи ці відношення як нові, самостійні параметри. На основі цих нових параметрів потрібно вивести вирази для оцінки якості поведінки САК.

Виклад основного матеріалу. Нехай характеристичний поліном системи n-го порядку після масштабування за амплітудою має вигляд

$$N(s) = A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \ldots + A_1 s + 1 . \qquad (1)$$

Цей поліном можна записати у такій формі:

$$N(s) = A_1 s\left(\frac{A_2}{A_1}s\ldots\left(\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}s\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}s+1\right)+1\right)\ldots+1\right)+1. \qquad (2)$$

Введемо позначення: $\frac{A_n}{A_{n-1}} = T_0$; $\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}} = T_1$; … $A_1 = T_{n-1}$. Тоді поліном (2) запишеться так:

$$N(s) = T_{n-1}s\left(T_{n-2}s\ldots\left(T_1 s\left(T_0 s+1\right)+1\right)+\ldots+1\right)+1. \qquad (3)$$

Позначимо $\frac{T_i}{T_{i-1}} = a_i$, $\frac{T_i}{T_0} = b_i$, де i =1, 2, 3, …, n-1. Тоді вираз (2) може бути записаний у такому вигляді:

$$N(s) = b_{n-1}T_0 s\left(b_{n-2}T_0 s\ldots\left(b_1 T_0 s\left(T_0 s+1\right)+1\right)+\ldots+1\right)+1 \qquad (4)$$

або

$$N(s) = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1 T_0 s\left(a_{n-2}\ldots a_1 T_0 s\ldots\left(a_1 T_0 s\left(T_0 s+1\right)+1\right)\ldots+1\right)+1. \qquad (5)$$

Розкриваючи дужки в поліномі (4), отримаємо

$$N(s) = b_1 b_2 \ldots b_{n-1}T_0^n s^n + b_1 b_2 \ldots b_{n-1}T_0^{n-1}s^{n-1} + b_2 b_3 \ldots b_{n-1}T_0^{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_{n-1}T_0 s + 1. \qquad (6)$$

Так само може бути розкритий і вираз (5), але загальна формула для його коефіцієнтів є досить громіздкою, тому на проміжних етапах досліджень без втрати загальності зручніше використувати коефіцієнти b_i. Згодом, під час аналізу кінцевих результатів, від них можна перейти до коефіцієнтів a_i, відповідно до співвідношення $b_i = a_1 a_2 \ldots a_i$. Отриманий у вигляді (6) характеристичний поліном, як і для форми Вишнеградського, містить *n-1* незалежних досліджуваних параметрів. В кожний коефіцієнт вихідного характеристичного полінома (1) входять всі коефіцієнти a_i, але в різних степенях. Переваги пропонованого подання проілюструємо на прикладі дослідження стійкості системи за критерієм Гурвіца. Розглянемо приклад системи 6-го порядку. Умова додатності її головного детермінанта може бути записана через умову додатності найстаршого мінора. Матимемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 T_0^5 & b_3 b_4 b_5 T_0^3 & b_5 T_0 & 0 & 0 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 T_0^6 & b_2 b_3 b_4 b_5 T_0^4 & b_4 b_5 T_0^2 & 1 & 0 \\ 0 & b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 T_0^5 & b_3 b_4 b_5 T_0^3 & b_5 T_0 & 0 \\ 0 & b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 T_0^6 & b_2 b_3 b_4 b_5 T_0^4 & b_4 b_5 T_0^2 & 1 \\ 0 & 0 & b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 T_0^5 & b_3 b_4 b_5 T_0^3 & b_5 T_0 \end{vmatrix} > 0.$$

Легко зауважити, що ця нерівність може бути скорочена на ряд спільних множників, які є у стовпцях та рядках детермінанта. Зрозуміло, що $b_i > 0$. Після розкриття детермінанта та його мінорів стала часу T_0 також скоротиться і не входитиме у вирази умов стійкості. Тобто перехід у виразі (6) до відносного часу не є обов'язковим. За необхідності це легко зробити, взявши базовою величиною часу сталу $T_0 = \frac{A_n}{A_{n-1}}$. Таке рішення принципово відрізняється від застосовуваного в практиці нормованих рівнянь, у яких базову величину часу приймають лише за одним – найстаршим коефіцієнтом характеристичного полінома, беручи такою, що дорівнює $\sqrt[n]{A_n}$ (при A_0 =1).

Після розкриття детермінантів Гурвіца та проведення відповідних скорочень були отримані умови стійкості для систем від 2-го до 6-го порядків. Вони мають такий вигляд:

система 2-го порядку

$$b_1 > 0;$$

система 3-го порядку

$$b_1 > 0, \qquad b_2 > 1;$$

система 4-го порядку

$$b_1 > 0; \qquad b_2 > 1; \qquad b_3 > \frac{b_1 b_2}{b_2 - 1};$$

система 5-го порядку

$$b_1 > 0; \qquad b_2 > 1; \qquad b_4 > b_2; \qquad b_3 b_4 > \frac{b_1 b_2 (b_4 - 1)^2}{(b_2 - 1)(b_4 - b_2)};$$

система 6-го порядку

$$b_1 > 0; \qquad b_2 > 1; \qquad b_3 > \frac{b_1 b_2 (b_4 - 1)}{b_2 - 1};$$

$$b_3 b_4 (b_2 - 1)(b_5 (b_4 - b_2) + b_1 b_2) - b_1 b_2 b_5 (b_4 - 1)^2 > 0;$$

$$b_3 b_4 b_5 (b_2 - 1)(b_5 (b_4 - b_2) + 2 b_1 b_2 - b_3 b_4) - b_1 b_2 b_5 (b_4 - 1)(b_5 (b_4 - 1) - b_3 b_4) - b_1^2 b_2^2 b_3 b_4 > 0.$$

Отримані вирази не складніші, ніж ті, які записуються через абсолютні величини коефіцієнтів характеристичного полінома. Проте вони мають деякі особливості. Наприклад, це є наявність в системах усіх порядків умови $b_2 > 1$, яка означає, що стала часу T_2 їх характеристичних поліномів вигляду (3) повинна бути більшою від сталої часу T_0. Отримані умови стійкості мають загальний характер, вони справедливі для цілої множини часткових варіантів. Ці вирази можуть стати підставою для формулювання певних узагальнень та висновків. З метою більшої деталізації перейдемо до коефіцієнтів a_i і дослідимо, які числові значення вони можуть приймати та в яких межах змінюватися. Для цього були обчислені величини коефіцієнтів a_i в таких видах характеристичних поліномів: біноміальний ряд [1], ряд Батерворта [2] (коефіцієнти останнього збігаються з налаштуванням на модульний оптимум), пропонований у [3] ряд поліномів, які забезпечують максимальну швидкодію за астатичного процесу з перерегулюванням. Результати розрахунків для систем до 8-го порядку включно наведені в таблиці.

Були також розраховані коефіцієнти a_i для запропонованого у [4] ряду поліномів, які забезпечують максимальну швидкодію під час перерегулювання у 5 %. Тут для порядків від 2-го до 10-го загальна картина не має принципових відмінностей від даних таблиці – числові значення коефіцієнтів a_i лежать в межах від 1,36 до 2,14. До наведених прикладів можна долучити ще варіант поліномів, у яких всі коефіцієнти a_i=2. Він виокремлюється в німецькій технічній літературі як самостійний, на відміну від модульного оптимуму, і називається методом подвійних пропорцій *(Methode der Doppelverhältnisse)* [5].

Наведені результати свідчать про те, що числові значення коефіцієнтів a_i для передатних функцій, отриманих за різними критеріями і для різних порядків цих функцій, лежать в досить вузьких межах. Це дає підставу зробити висновок, що згадані коефіцієнти мають універсальний характер. У зв'язку з цим, параметри a_i пропонується назвати *первісними або елементарними коефіцієнтами* характеристичних рівнянь та поліномів. Процес зведення характеристичних рівнянь і поліномів до вигляду (2) називатимемо їх *структуруванням*, а відповідну передатну функцію – *структурованою.*

Взагалі кажучи, характеристичний поліном у вигляді виразів (1) або (2) відповідає багатьом різноманітним варіантам структурних схем САК. Однією з них може бути певна регулярна структура, яка відома в автоматизованому електроприводі як система підпорядкованого регулювання. Вона складається з *n* вкладених один в одного контурів, характеристичні поліноми кожного з яких відповідають частинам виразу (2), відділеним відповідними парами дужок. Коефіцієнти a_i є відношеннями сталих часу інтегрувальних ланок сусідніх контурів (старшої до молодшої) цієї структури, а коефіцієнти b_i – відношеннями кожної з цих сталих часу до сталої часу T_0 початкового контуру.

Числові значення коефіцієнтів a_i для різних характеристичних поліномів

Вид полінома	Порядок системи	Значення коефіцієнтів						
		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Біноміальний ряд	2	4						
	3	3	3					
	4	2,67	2,25	2,67				
	5	2,50	2,00	2,00	2,50			
	6	2,40	1,88	1,78	1,88	2,40		
	7	2,33	1,80	1,67	1,67	1,80	2,33	
	8	2,29	1,75	1,60	1,56	1,60	1,75	2,29
Форма Батерворта (ідентичний з модульним оптимумом)	2	1,96						
	3	2,00	2,00					
	4	2,00	1,70	2,00				
	5	2,00	1,62	1,62	2,00			
	6	2,00	1,58	1,50	1,58	2,00		
	7	2,01	1,55	1,45	1,45	1,55	2,01	
	8	2,04	1,57	1,38	1,42	1,42	1,55	2,00
Оптимальний за швидкодією аперіодичний процес з пере-регулюванням	2	1,904						
	3	1,758	2,786					
	4	1,777	1,984	2,063				
	5	1,180	2,057	1,545	2,427			
	6	1,739	1,667	1,548	1,702	2,04		
	7	0,939	2,035	1,182	1,526	1,896	2,054	
	8	2,298	0,840	1,925	1,463	1,386	1,699	1,980

Розглянемо САК 3-го порядку. Її характеристичні рівняння, записані у звичайній формі, та через первісні коефіцієнти матимуть вигляд:

$$A_3 s^3 + A_2 s^2 + A_1 s + 1 = 0\,; \tag{7}$$

$$a_1^2 a_2 T_0^3 s^3 + a_1^2 a_2 T_0^2 s^2 + a_1 a_2 T_0 s + 1 = 0\,. \tag{8}$$

За традиційного підходу для зменшення кількості досліджуваних параметрів рівняння (6) зводять до нормованої форми (рівняння Вишнеградського):

$$S^3 + AS^2 + BS + 1 = 0\,, \tag{9}$$

де $A = A_2 / \sqrt[3]{A_3^2}$, $B = A_1 / \sqrt[3]{A_3}$, $S = s\sqrt[3]{A_3}$.

Поведінку такої системи для будь-яких значень параметрів *A* і *B* визначають за допомогою діаграми Вишнеградського, яка будується в координатах коефіцієнтів (*A, B*) рівняння (8). Використовуючи наведені в [6] залежності, перерахуємо її в діаграму, координатами якої є первісні коефіцієнти (a_1, a_2) рівняння (7). На підставі еквівалентності рівнянь (7) і (8) отримаємо співвідношення між їх коефіцієнтами:

$$A = \sqrt[3]{a_1^2 a_2}\,; \quad B = \sqrt[3]{a_1 a_2^2}\,; \quad a_1 = A^2 \big/ B\,; \quad a_2 = B^2 \big/ A\,. \tag{10}$$

Трансформована згідно з виразами (10) діаграма в координатах (a_1, a_2) показана на рис. 1. З виразів (9) зрозуміло, що проведене перетворення не є простим масштабуванням, і тому діаграма на рис. 1 відрізняється від діаграми Вишнеградського не тільки кількісно, але і якісно. Так, лінії DE і DF (рис. 1) мають асимптоти $a_1 = 4$ і $a_2 = 4$ відповідно, тоді як на діаграмі Вишнеградського відповідні їм лінії монотонно зростають на обох осях. Тому на підставі рис. 1 можна стверджувати, що при $a_1 > 4, a_2 > 4$ всі рішення знаходяться в області II, тоді як на основі діаграми Вишнеградського зробити подібний висновок про коефіцієнти *A* і *B* неможливо. Далі, величини a_i мають конкретний сенс – це відношення сталих часу сусідніх контурів. І якщо стала часу наступного контуру в кілька разів більша від сталої часу попереднього, то меншою можна знехтувати, і відповідно знизити порядок САК. Очевидно, що стандартні характеристичні поліноми, дані яких наведені в таблиці, вже добре вивчені та досліджені, і ресурс зниження порядку в них вже вичерпаний, а тому їх коефіцієнти переважно не перевищують 2–3. Але для недосліджених характеристичних поліномів цього може і не бути, і отримані в результаті структурування величини їх первісних коефіцієтів дадуть змогу говорити про можливість зниження порядку САК. Коефіцієнти *A* і *B* рівняння Вишнеградського подібного конкретного змісту не мають, і говорити про те, чи якийсь із них завеликий, чи ні, важко.

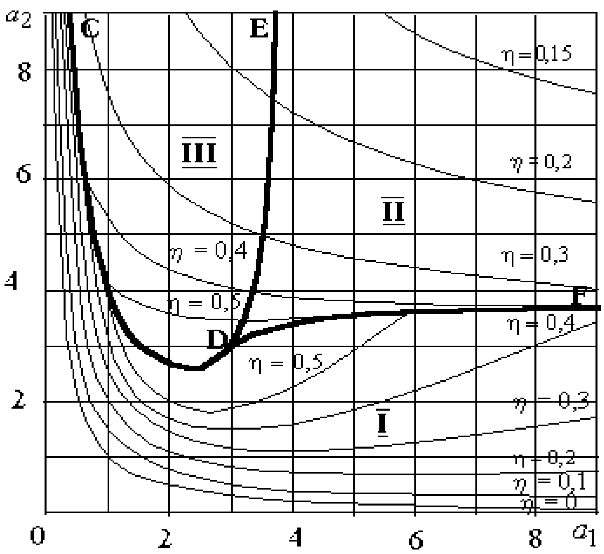


Рис. 1. Трансформована діаграма Вишнеградського з лініями однакових ступенів стійкості η

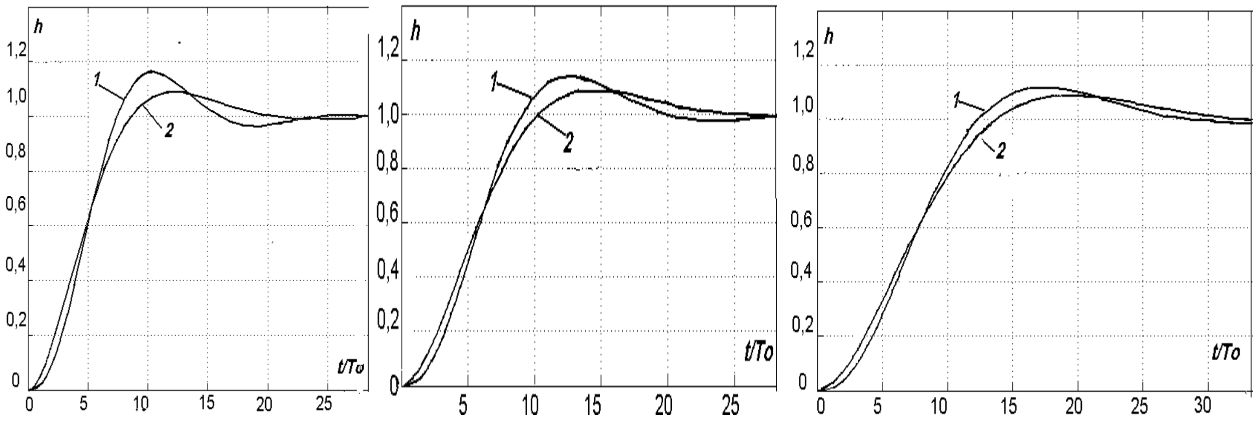
Отже, структурування передатних функцій може бути використане для зниження порядку системи. Таку можливість дослідимо на прикладі трьох передатних функцій з одиничним коефіцієнтом підсилення, характеристичні рівняння яких мають такий вигляд:

$$0{,}075s^3 + 0{,}375s^2 + 0{,}75s + 1 = 0,$$

$$0{,}108s^3 + 0{,}540s^2 + 0{,}90s + 1 = 0,$$

$$0{,}192s^3 + 0{,}960s^2 + 1{,}20s + 1 = 0.$$

На перший погляд, ці рівняння зовсім різні. Але після їх структурування та переходу до первісних коефіцієнтів виявляється, що вони мають два параметри однакові: $T_0 = 0{,}2c$, $a_2 = 1{,}5$, а відрізняються лише одним – коефіцієнтом a_1, який для кожного з них дорівнює відповідно 2,5; 3,0 і 4,0. Усі три значення свідчать про можливість зниження порядку САК від 3-го до 2-го, нехтуючи інерційністю нульового контуру. Нові характеристичні рівняння відрізнятимуться від наведених вище відсутністю доданків з s^3. На рис. 2 показано перехідні функції $h(t/T_0)$ передавальних функцій усіх трьох наведених вище рівнянь у точному (3-й порядок) варіанті – криві 1, та наближеному (2-й порядок) варіанті – криві 2.



а *б* *в*

Рис. 2. Перехідні функції трьох досліджуваних випадків для варіантів:
а – a_1 *=2,5; б –* a_1 *=3; в –* $a_1 = 4$

Як бачимо з отриманих графіків, зниження порядку системи є тим точнішим, чим більшою є величина первісного коефіцієнта a_1. Зрозуміло, що можливість зниження порядку системи повинна вирішуватися з урахуванням вимоги потрібної точності апроксимації.

Висновки. Отже, запропонована методика структурування дає змогу розкласти коефіцієнти характеристичних поліномів чи рівнянь на n-1 первісних (елеметарних) коефіцієнтів, використання яких уможливить розширити загальність досліджень якості поведінки САК. Той факт, що величини первісних коефіцієнтів змінюються в дуже вузькому діапазоні, дає змогу прорахувати (через певний крок) всі реально можливі варіанти рішень. Вони можуть бути подані у вигляді діаграм, таблиць, графіків.

1. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные автоматические системы. – М.: Машиностроение, 1982. – 504 с. 2. Башарин А.В., Новиков В.А., Соколовский Г.Г. Управление электроприводами. – Л.: Энергоиздат, 1982. – 392 с. 3. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. – Л.: Энергия, 1969. – 375 с. 4. Толочко О.И., Коцегуб П.Х., Розкаряка П.И. Конструирование передаточных функций линейных САУ по заданному перерегулированию // Вісн. Нац. техн. ун-ту "Харківський політехн. інститут": Зб. наук. праць. Темат. вип. 10. – 2001. – С. 95–98. 5. Vogel J. Elektrische Antriebstechnik / von Vogel J. u.a. – Heidelberg: Hüthig Buch Verlag, 1991. – 415 s. 6. Воронов А.А., Титов В.К., Новогранов Б.Н. Основы теории автоматического управления. – М.: Высш. шк., 1977. – 519 с.