

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДВОВУЗЛОВОЇ ЕЛЕКТРОМАШИННОЇ СИСТЕМИ

© Чабан А.В., 2005

Створено математичну модель двовузлової електромашинної системи. Моделі електричних машин та апаратів побудовані на основі фундаментальних законів електродинаміки та представлені системою нелінійних електромагнітних кіл. Рівняння стану системи записані в нормальній формі Коші. Запропоновано ефективний метод аналізу струмів елементів вузлів та напруг вузлів навантаження.

In the paper is proposed the mathematical modeling of multimachines two-nods energetic system. The mathematical models of electric machines and another devices are described on base of electromagnetic circuit theory and are written down in normal Cauchy form. The results of computation are given.

**Постановка проблеми.** Електричний вузол навантаження є одним з основних елементів електромашинної системи. Цілком очевидно, що процеси, які відбуваються у вузлах (особливо в перехідних процесах), хвилюють як енергетиків, так і електромеханіків, зокрема. У цій роботі пропонується математична модель багатомашинної двовузлової системи. Елементи вузла описуються на основі електромагнітної колової моделі трансформаторів та індукційних машин. Модель машин побудовано у фазних координатах, що дає змогу аналізувати в системі механічні крутні коливання валопроводів, включаючи й індуктори самих машин. Отже, в рівняння стану моторів входить явно кут повороту  $\gamma$  магнітної осі фази  $A$  статора відносно уявної магнітної осі фази  $A$  ротора.

**Аналіз результатів останніх досліджень.** Методи, побудовані на основі заступних колових електричних схем (трансформаторів, індукційних машин, синхронних машин тощо), на сьогодні не дають змоги отримати з достатньою точністю інформацію про струми та напруги вузлів навантаження. А якщо розглядати перехідні процеси у вузлі навантаження, то ці методи взагалі позбавлені фізичних засад електродинаміки, оскільки заступні схеми елементів будуються для усталених режимів. Для реальної фізичної картини необхідно будувати моделі елементів на основі фундаментальних законів електродинаміки та об'єднувати ці моделі в єдину математичну модель вузла навантаження, сумісно інтегруючи рівняння стану вузла навантаження синхронно в часовій області.

**Задачі досліджень.** Метою цієї роботи є побудова ефективної математичної моделі двовузлової електромашинної системи. Для прикладу розглянемо електропостачальну систему, яка складається з двох вузлів навантаження (рис. 1). Напряга першого вузла становить 6 кВ, напруга другого – 0,4 кВ.  $M_1, M_2$  – машини першого вузла навантаження, а  $M_3, M_4$  – другого (рис. 1). Причому у вузол вищої напруги входить конденсаторна батарея, що дає змогу підвищувати напругу цього вузла (залежно від ємності) при активно-індуктивному навантаженні. Якщо ввести поняття розрахункової величини – реактивної потужності (лише для усталених процесів), то батарея компенсуватиме цю величину. Щодо другого вузла, то при пуску моторів напруга їх живлення буде істотно падати із-за великого спаду напруги на другому трансформаторі. Тому постає проблема побудови математичної моделі системи, адже лише за допомогою моделі можна правильно вибрати ємність батареї для пуску машин та ємність батареї для усталеного режиму роботи моторів; а також в'яснити, з яким сумарним максимальним моментом навантаження на валу роторів машин можливі пуски й самозапуски машин, особливо в другому вузлі навантаження, де немає батареї статичних конденсаторів.

Очевидно, що математична модель конкретної системи дає змогу точніше підійти до критерію вибору силових трансформаторів (особливо в перехідних процесах), на відміну від традиційно існуючих інженерних методів.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо структурну схему двовузлової системи (рис. 1).

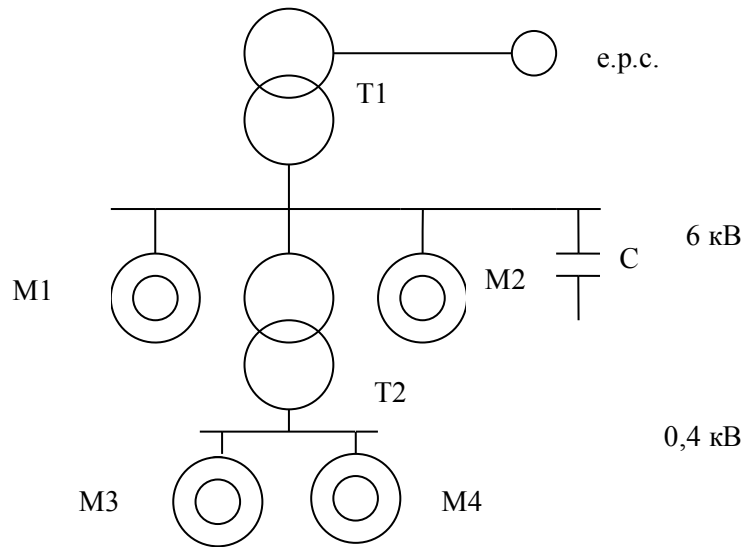


Рис. 1. Структурна схема двовузлової системи

Для цього типу моделі приведемо за кількістю витків величини та параметри трансформаторів T1, T2 до величин та параметрів першого вузла.

У цій задачі застосуємо найпростішу A-модель трансформаторів [1]:

$$\frac{di_{1,n}}{dt} = A_{11,n}(u_{1,n} - R_{1,n}i_{1,n}) + A_{12,n}(u_{2,n} - R_{2,n}i); \quad (1)$$

$$\frac{di_{2,n}}{dt} = A_{21,n}(u_{1,n} - R_{1,n}i_{1,n}) + A_{22,n}(u_{2,n} - R_{2,n}i); \quad (2)$$

$$A_{11,n} = at_{1,n}(1 - at_{1,n}T_{T,n}); \quad A_{12,n} = A_{21,n} = -at_{1,n}at_{2,n}T_{T,n}; \quad A_{22,n} = at_{2,n}(1 - at_{2,n}T_{T,n}); \quad (3)$$

$$T_{T,n} = at_{1,n} + at_{2,n} + \tau_n; \quad \tau_n = 1/L_{m,n}, \quad (4)$$

де  $n = 1, 2$  – кількість трансформаторів в електромашинній системі;  $L_{m,n}$  – індуктивність намагнічування кожного з трансформаторів;  $i_{1,n}, i_{2,n}$  – вектор-стовпці струмів фаз первинних і вторинних обмоток відповідно;  $u_{1,n}, u_{2,n}$  – вектор-стовпці напруг фаз первинних і вторинних обмоток відповідно;  $R_{1,n}, R_{2,n}$  – матриці опорів первинних і вторинних обмоток відповідно;  $at_{1,n}, at_{2,n}$  – матриці обернених індуктивностей розсіювання первинних і вторинних обмоток відповідно.

Запишемо математичні моделі асинхронних моторів у фазних координатах [2]:

$$\frac{di_{S,k}}{dt} = A_{S,k}(u_{S,k} - R_{S,k}i_{S,k}) + A_{SR,k}\Pi_k(-\Omega_k\Psi_k - R_{R,k}i_{R,k}); \quad (5)$$

$$\frac{di_{R,k}}{dt} = \Pi_k^{-1}A_{RS,k}(u_{S,k} - R_{S,k}i_{S,k}) + \Pi_k^{-1}A_{R,k}\Pi_k(-\Omega_k\Psi_k - R_{R,k}i_{R,k}) + \Omega_k i_{R,k}, \quad (6)$$

де  $R_{S,k}$  – матриця опорів обмоток фаз роторів (для симетричних режимів матриця вироджується у скаляр).

$$A_{S,k} = \alpha_{S,k}(1 - \alpha_{S,k}G_k); \quad A_{SR,k} = A_{RS,k} = \alpha_{S,k}\alpha_{R,k}G_k; \quad A_{R,k} = \alpha_{R,k}(1 - \alpha_{R,k}G_k), \quad (7)$$

де  $\alpha_{R,k}$  – обернена індуктивність дисипації обмоток фаз ротора.

$$i_k = i_{S,k} + \Pi_k i_{R,k}; \quad R_k = 1/(\alpha_{S,k} + \alpha_{R,k} + \rho_k); \quad T_k = 1/(\alpha_{S,k} + \alpha_{R,k} + \tau_{S,k}); \quad (8)$$

$$b_k = \frac{2}{3} \frac{R_k - T_k}{i_{m,k}^2}; \quad b_{A,k} = b_k(2i_{A,k} + i_{B,k}); \quad b_{B,k} = b_k(2i_{B,k} + i_{A,k}); \quad (9)$$

$$\Psi_{S,k} = \Psi_k = \Pi_k \Psi_{R,k}; \quad \Psi_{R,k} = \Pi_k^{-1} \Psi_{S,k}; \quad \Psi_k = \tau_k(i_{S,k} + \Pi_k i_{R,k}); \quad (10)$$

$$\Pi_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{array}{|c|c|} \hline \sin(\gamma_k + 2\pi/3) & -\sin \gamma_k \\ \hline \sin \gamma_k & -\sin(\gamma_k - 2\pi/3) \\ \hline \end{array}; \quad \Pi_k^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{array}{|c|c|} \hline -\sin(\gamma_k - 2\pi/3) & \sin \gamma_k \\ \hline -\sin \gamma_k & \sin(\gamma_k + 2\pi/3) \\ \hline \end{array}; \quad (11)$$

$$G_k = \begin{array}{|c|c|} \hline T_k + b_{A,k} i_{A,k} & b_{B,k} i_{A,k} \\ \hline b_{A,k} i_{B,k} & T_k + b_{B,k} i_{B,k} \\ \hline \end{array}; \quad \Omega_k = \Pi_k \frac{d\Pi_k^{-1}}{dt} = -\Pi_k^{-1} \frac{d\Pi_k}{dt} = \frac{\omega_k}{\sqrt{3}} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline -2 & -1 \\ \hline \end{array}, \quad (12)$$

де  $R_{R,k}$  – опір фази ротора кожного з моторів;  $\alpha_{S,k}$  – матриця обернених індуктивностей дисипації (для симетричного режиму матриця вироджується в скаляр) кожного з моторів;  $\tau_{S,k} = \tau_{S,k}(\Psi_{S,k})$  – обернена індуктивність намагнічування кожного з моторів;  $\rho_k$  – диференціальна обернена індуктивність намагнічування кожного з моторів;  $u_{S,1,2}, u_{S,3,4}$  – вектор-стовпець напруг першого та другого вузлів відповідно;  $i_{S,k}, i_{R,k}$  – вектор-стовпець струмів статорів і роторів машин відповідно;  $\Psi_{S,k}, \Psi_{R,k}$  – вектор-стовпець основних потокозчеплень статорів та роторів відповідно;  $\omega_k$  – кутові швидкості обертання роторів кожної з машин;  $\gamma_k$  – кути повороту магнітних осей фази  $A$  роторів відносно магнітних осей фази  $A$  статорів;  $k = 1-4$  – кількість машин в системі.

Доповнимо систему рівнянь електромагнітного стану рівняннями руху електроприводу, записаними на основі рівнянь Лагранжа другого роду. Причому ротори машин вважалися абсолютно жорсткими тілами:

$$\frac{d\omega_k}{dt} = \frac{p_{0,k}}{J_k} (M_{E,k} - M_k(\omega_k)) \quad ; \quad \frac{d\gamma_k}{dt} = \omega_k(t) \quad ; \quad M_{E,k} = \sqrt{3} p_{0,k} (i_{RA,k}^\Pi i_{SB,k} - i_{RB,k}^\Pi i_{SA,k}) / \tau_k; \quad (13)$$

$$i_{RA,k}^\Pi = \frac{2}{\sqrt{3}} (i_{RA,k} \sin(\gamma_k - 2\pi/3) - i_{RB,k} \sin \gamma_k); \quad i_{RB,k}^\Pi = \frac{2}{\sqrt{3}} (i_{RA,k} \sin \gamma_k - i_{RB,k} \sin(\gamma_k + 2\pi/3)), \quad (14)$$

де  $p_{0,k}$  – кількість пар магнітних полюсів кожної з машин відповідно;  $A, B$  – індекси фаз живлення системи;  $J_k$  – моменти інерції електроприводу для кожної з машин відповідно.

Запишемо рівняння на основі першого та другого законів Кірхгофа для першого вузла навантаження:

$$i_{2,1} + i_{S,1} + i_{S,2} + i_{1,2} + i_C = 0 \quad ; \quad u_{2,1} = u_{S,1} = u_{S,2} = u_{1,2} = u_C = U_1,$$

звідки

$$i_C = C \frac{dU_1}{dt}, \quad (15)$$

де  $i_C, u_C$  – вектор-стовпець струмів та напруг батареї відповідно.

Запишемо рівняння на основі першого та другого законів Кірхгофа для другого вузла:

$$i_{S,3} + i_{S,4} + k_{T2} i_{2,2} = 0; \quad u_{S,3} = u_{S,4} = u_{2,2} / k_{T2} = U_2, \quad (16)$$

де  $U_1, U_2$  – напруги першого та другого вузлів відповідно.

Продиференціюємо по часу рівняння струмів другого вузла (15) та розв'яжемо сумісно з (1), (2), (5), після чого отримаємо

$$\frac{d}{dt} i_{S,3} + \frac{d}{dt} i_{S,4} + k_{T2} \frac{d}{dt} i_{2,2} = A_{S,3} (u_{S,3} - R_{S,3} i_{S,3}) + A_{SR,3} \Pi_3 (-u_{R,3} - \Omega_3 \Psi_3 - R_{RI,3} i_{R,3}) + A_{S,4} (u_{S,4} -$$

$$-R_{S,4}i_{S,4}) + A_{SR,4}\Pi_4(-u_{R,4} - \Omega_4\Psi_4 - R_{RL,4}i_{R,4}) + k_{T2}(A_{21,2}(u_{1,2} - R_{1,2}i_{1,2}) + A_{22,2}(u_{2,2} - R_{2,2}i_{2,2})) = 0. \quad (17)$$

Причому

$$k_{T2} = U_{H1} / U_{H2}, \quad (18)$$

де  $U_{H1}, U_{H2}$  – номінальні напруги первинної та вторинної обмоток другого трансформатора відповідно.

Розв'язуючи сумісно (16), (17), отримаємо шукані вектор-стовпці напруг першого і другого вузлів навантаження відповідно:

$$\frac{d}{dt} U_1 = \frac{-i_{S,1} - i_{S,2} - i_{1,2} - i_{2,1}}{C}; \quad (19)$$

$$U_2 = (A_{S,3} + A_{S,4} + k_{T2}^2 A_{2,2})^{-1} \cdot (A_{S,3}(R_{S,3}i_{S,3}) + (A_{S,4}(R_{S,4}i_{S,4}) + k_{T2}A_{2,2}(R_{2,2}i_{2,2}) - A_{SR,3}\Pi_3(-u_{R,3} - \Omega_3\Psi_3 - R_{RL,3}i_{R,3}) - A_{SR,4}\Pi_4(-u_{R,4} - \Omega_4\Psi_4 - R_{RL,4}i_{R,4}) - k_{T2}A_{21,2}(u_{1,2} - R_{1,2}i_{1,2})). \quad (20)$$

Сумісному інтегруванню підлягає система диференціальних рівнянь (1)–(14), (19). Інтегрування рівнянь стану проводилось явними методами, а саме: методом Рунге–Кутти четвертого порядку на алгоритмічній мові Visual FORTRAN. Причому для знаходження напруги другого вузла необхідно на кожному часовому кроці додатково обирати матрицю коефіцієнтів (20). Цю операцію здійснюємо за допомогою методу Гаусса.

Для аналізу системи електропостачання використовувались два трансформатори: перший – ТМ,  $S_H = 1,6 \text{ МВ} \cdot \text{А}$ ; другий – ТЗС-400/10;  $S_H = 0,4 \text{ МВ} \cdot \text{А}$ ; а також чотири машини. Два однакові мотори вищої напруги – А 12-52-8А,  $P_H = 320 \text{ кВт}$ ,  $U_H = 6 \text{ кВ}$ ,  $I_H = 39 \text{ А}$  з різними моментами навантаження на валах роторів та два однакові мотори нижчої напруги – А 92-2,  $P_H = 125 \text{ кВт}$ ,  $U_H = 380 \text{ В}$ ,  $I_H = 225 \text{ А}$  також з різними моментами навантаження на валах роторів.

Результати комп'ютерної симуляції наочно показані на рис. 1 та 2.

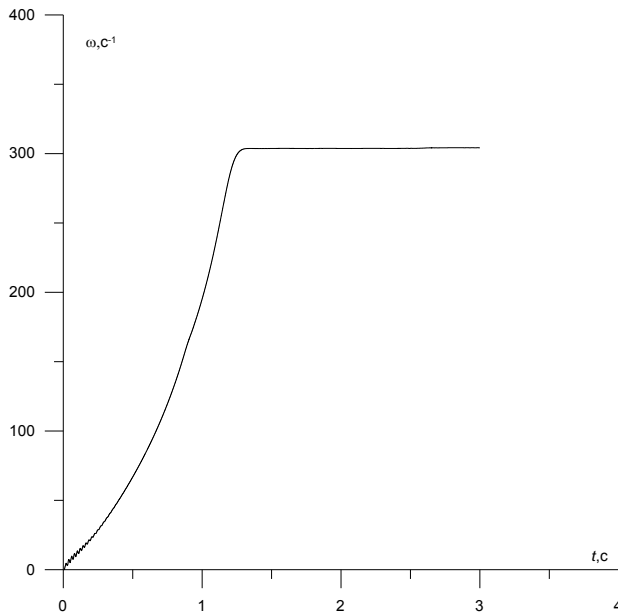


Рис. 1. Швидкість обертання першого мотора

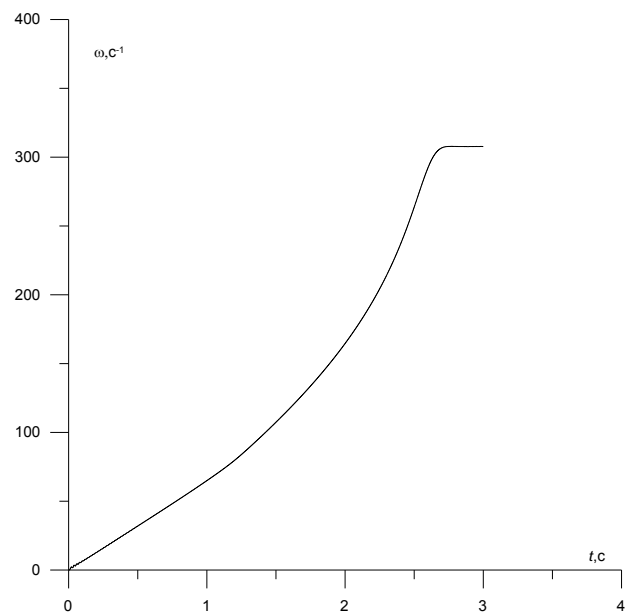


Рис. 2. Швидкість обертання третього мотора

**Висновки.** Аналізуючи рівняння стану математичної моделі та графіки (рис. 1–6), можна стверджувати: швидкість обертання першого мотора досягнула номінального значення набагато швидше від третього; струм першого мотора теж досягнув номінального значення швидше від третього; і напруга першого вузла навантаження досягнула номінального значення швидше ніж

другого, що пояснюється наявністю батареї статичних конденсаторів у першому вузлі навантаження та відсутністю її в другому. Залежно від еквівалентної ємності батареї конденсаторів час перехідного процесу буде змінюватись. Тому правильний вибір батареї дасть змогу оптимального вибору силових трансформаторів, що істотно вплине на економічні показники підприємства, де знаходиться ця електромашинна система.

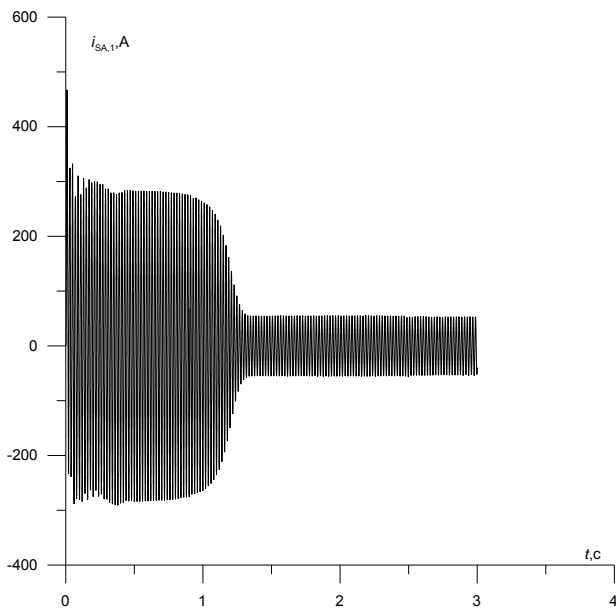


Рис. 3. Струм якоря першого мотора

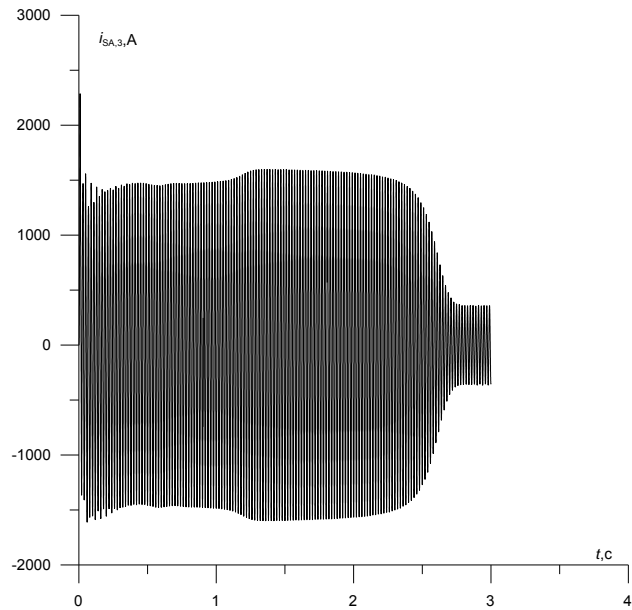


Рис. 4. Струм якоря третього мотора

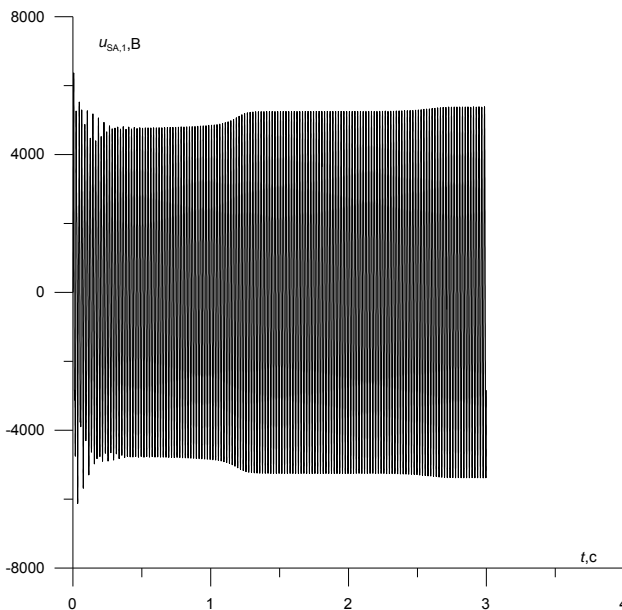


Рис. 5. Напруга першого вузла

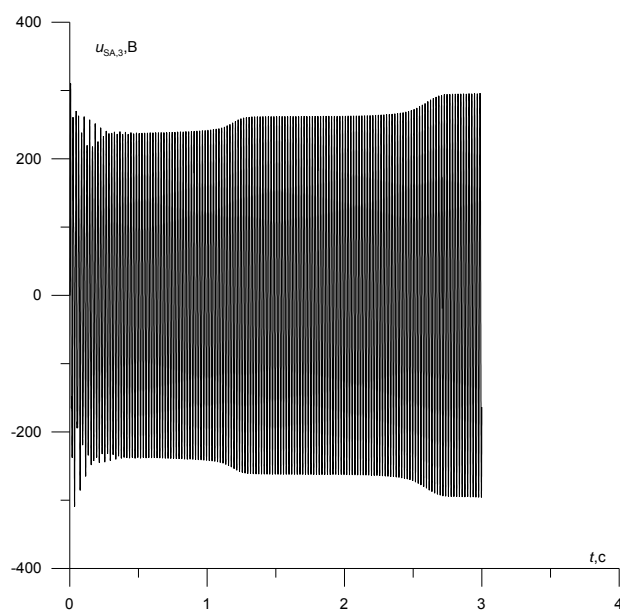


Рис. 6. Напруга другого вузла

Аналізуючи рівняння (19), (20), можемо зробити висновок, що за наявності у вузлі навантаження компенсуючої батареї, напруга вузла обчислюється досить просто, інтегруючи диференціальне рівняння (19) у єдиній системі диференціальних рівнянь стану. Натомість знаходження напруги другого вузла, без наявності батареї, приводить до обергання матриці коефіцієнтів на кожному часовому ітераційному кроці та добутку цієї матриці на досить складний вираз (20).

Як зрозуміло з запропонованих графіків, батарею статичних конденсаторів доцільно використовувати як в момент пуску або самозапуску (пускову батарею), так і в усталеному процесі,

лише в усталеному процесі ємність батареї слід зменшити до досягнення номінальної напруги вузла навантаження. В усталеному процесі батарея компенсуватиме реактивну потужність цього вузла навантаження. Методика вибору конденсаторних батарей ґрунтується на підтриманні певного значення напруги вузла навантаження як в перехідному, так і в усталеному процесі. У реальних електроенергетичних системах не завжди доцільно підключати паралельно до вузла батарею статичних конденсаторів, особливо, за малої кількості машин, що живляться від цього вузла. Тоді постає проблема частих пусків, самозапущів (усі мотори розганяються одночасно з деякої початкової швидкості), а, особливо, реверсу моторів, Тому, на сьогоднішній день повну та вичерпну інформацію про процеси, які проходять у вузлі навантаження можна отримати лише за допомогою математичної моделі, побудованої стосовно конкретного типу електротехнічної задачі.

1. Чабан В. *Математичне моделювання електромеханічних процесів*. – Львів, 1997. – 344 с.
2. Чабан А. *Симуляція комутаційних перенапруг глибокопазного асинхронного мотора, що живиться через кабель // Електротехніка і електромеханіка*. – 2004. – Вип. 3. – С. 61–64.

УДК 62-83:621.313.2

І.З. Щур, В.М. Журкіна, З.Л. Паранчук  
Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра ЕАП

## ОПТИМАЛЬНЕ ЗА НАГРІВАННЯМ КЕРУВАННЯ ПОЗИЦІЙНИМ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ ОПТИЧНОГО ТЕЛЕСКОПА З ОБМЕЖЕННЯМ ПРИСКОРЕННЯ І РИВКА

© Щур І.З., Журкіна В.М., Паранчук З.Л., 2005

**Розв’язано задачу оптимального за нагріванням керування позиційним електроприводом оптичного телескопа з урахуванням обмеження координат прискорення і ривка. Отримано залежності параметрів діаграм координат ривка, прискорення, струму, швидкості від величини кута позиціонування, а також проаналізовано вплив зміни часу позиціонування на діаграми координат керування і кількість теплоти, яка виділяється в обмотках якірного кола.**

**The task of optimal for heating control of optical telescope position electric drive with taking into account limitation of acceleration and jerk coordinates is resolved. Dependences of diagrams parameters of jerk, acceleration, current, speed coordinates from magnitude of positioning angle is obtained, and influence of positioning time change on the diagrams of control coordinates and quantity of heat, which is selected in the armature winding, is analyzed also.**

**Постановка проблеми.** Оптичні телескопи (ОТ) [1] займають провідне місце серед оптико-електронних пристроїв для спостереження за об’єктами, що віддалені від земної поверхні. Одним із основних режимів роботи таких телескопів є режим позиціонування (так зване переключення), коли електропривід (ЕП) повинен перемістити трубу телескопа на заданий кут без статичної похибки під час дії жорстких обмежень щодо швидкості та прискорення, а також нагрівання обмоток якірного кола виконавчого двигуна (допустиме перегрівання обмоток обмежується величиною 10 °С). З метою отримання прецизійності позиціонування труби телескопа використано безредукторний ЕП, побудований на базі тихохідних моментних двигунів зі збудженням від постійних магнітів. Обґрунтування доцільності застосування оптимального за нагріванням керування із розв’язанням задачі оптимального за нагріванням керування позиційним ЕП наведення труби ОТ за умови накладання обмежень на координати струму, швидкості, прискорення виконавчого двигуна наведено в [2].