

## РОЗРАХУНОК ХАРАКТЕРИСТИК ДВИГУНА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ НА ПІДСТАВІ ОБЧИСЛЕННЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

© Макарчук О.В., Попічко В.В., 2005

**На підставі обчислення магнітного поля двигуна постійного струму у двовимірній постановці здійснено розрахунок його робочих характеристик. Наведено порівняльний аналіз результатів.**

**The operating characteristics of direct current motor, based on computation of it 2D magnetic field have been calculated. The comparative analysis of results has been presented.**

**Аналіз останніх досліджень.** З розвитком обчислювальної техніки й прикладного програмного забезпечення з'являються нові можливості у підходах до методів проектування електромеханічних перетворювачів енергії. Вони полягають в обчисленні електромагнітних, температурних полів та полів механічних напружень у дво- або тривимірній постановці та подальшій обробці отриманих результатів з метою отримання робочих характеристик пристроїв, що проектуються.

**Постановка проблеми.** В наукових та науково-популярних виданнях інколи можна прочитати, що майбутнє належатиме саме таким методам, і зараз необхідно приділяти особливу увагу їх розвитку. З цими твердженнями важко не погодитись. Але чи такими вже недосконалими й неточними є традиційні методи розрахунку, що до нині використовуються в інженерній практиці?

**Задачі дослідження.** Мета дослідження, що пропонується, полягає у порівнянні результатів розрахунку характеристик загальнопромислового двигуна постійного струму на основі традиційної методики [1] з результатами, отриманими на підставі розрахунку двовимірного магнітного поля; в оцінці точності цих методів, а також у виробленні рекомендацій щодо галузей застосування обидвох підходів.

Як об'єкт дослідження вибрано двигун постійного струму змішаного збудження з такими технічними даними: номінальна потужність  $P_n = 12$  кВт; номінальна напруга живлення  $U_n = 220$  В; номінальна швидкість обертання  $n_n = 1000$  об/хв; номінальний струм якоря  $I_{an} = 63,3$  А; номінальний струм паралельної обмотки збудження  $I_{лшн} = 0,79$  А; осердя якоря виконано з електротехнічної сталі марки 2013, осердя головних та додаткових полюсів – 3411, станина – Ст.3, вал – Ст.45. Решта даних, необхідних для розрахунку характеристик, наведено в [1].

**Основний матеріал.** Розрахунок магнітного поля проводився з урахуванням загальноприйнятих допущень [2], тобто поле розглядається в квазістаціонарному наближенні.

Математичне формулювання цієї задачі магнітостатики (задаються густини струмів в струмопровідних областях) здійснено з використанням поняття векторного магнітного потенціалу. Поле потенціалу розраховується методом скінченних елементів, сутність якого, як відомо, полягає у знаходженні мінімуму деякого, пов'язаного з енергією функціонала, який дає наближений (з заданою точністю) розподіл поля цього потенціалу. Решта силових характеристик поля (індукція та напруженість) знаходять за формулами.

У цьому випадку розглядається такий функціонал [3]:

$$F(\bar{A}) = \int_S W(\bar{A}) d\bar{S} - \int_S \bar{J} \bar{A} d\bar{S}, \quad (1)$$

де  $\bar{A}$  – векторний магнітний потенціал;  $\bar{J}$  – вектор густини струму джерел, що належать області розрахунку  $S$ ;  $W(\bar{A})$  – густина енергії магнітного поля, що відповідає потенціалові  $\bar{A}$ . Загалом вона обчислюється так:

$$W = \int \bar{H}d\bar{B}, \quad (2)$$

де  $\bar{H}$ ,  $\bar{B}$  – вектори напруженості та індукції магнітного поля.

Зв'язок між потенціалом, напруженістю та індукцією магнітного поля встановлюється такими залежностями:

$$\bar{B} = \text{rot } \bar{A}; \quad (3)$$

$$\bar{H} = H[\bar{B}], \quad (4)$$

де (4) – характеристика намагнічування матеріалів (в загальному – нелінійна), що входять до області розрахунку поля  $S$  (рис. 1).

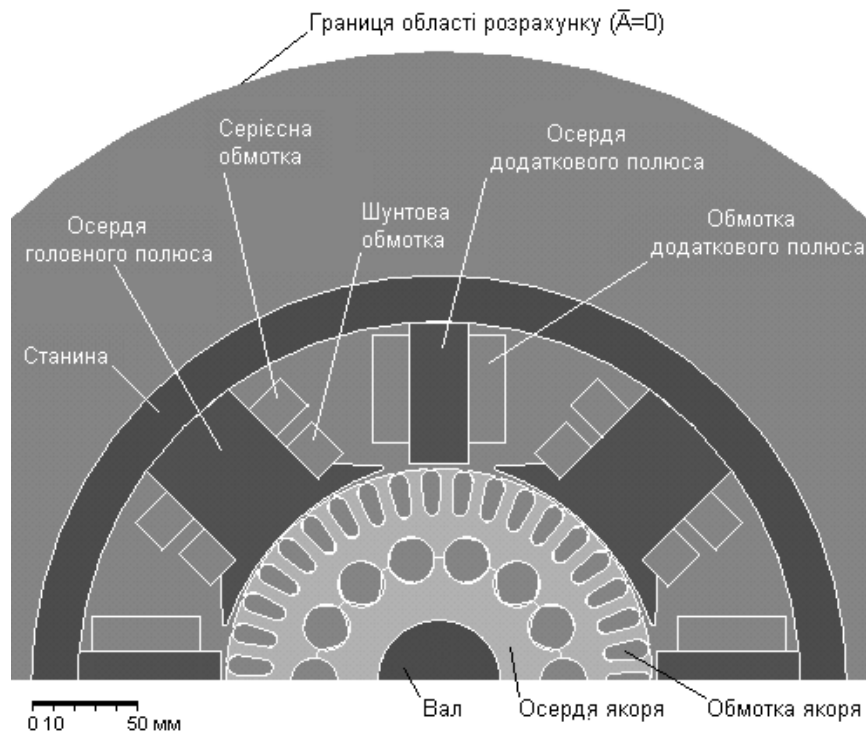


Рис. 1. Область розрахунку

Ця варіаційна задача еквівалентна розв'язуванню рівняння Пуассона  $\text{rot}(v \text{rot } \bar{A}) = \bar{J}$  для лінійної задачі, з тією лише різницею, що характеристики матеріалів ( $v$ ) залежатимуть від напруженості поля. Враховуючи, що векторні величини спрямовані тільки вздовж однієї осі (наприклад  $z$ ), це рівняння зводиться до двовимірного рівняння вигляду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -J_z.$$

Для дискретизації функціонала (1) область  $S$  розбивається на множину скінченних елементів (рис. 2).

Функція  $A$  в середині кожного елемента подається у вигляді інтерполяційної формули, наприклад, з використанням многочлена Тейлора [4]:

$$A = \bar{T}[x, y] \bar{c}, \quad (5)$$

де  $\bar{T}[x, y]$  – рядок Тейлора;  $\bar{c}$  – стовпець коефіцієнтів.

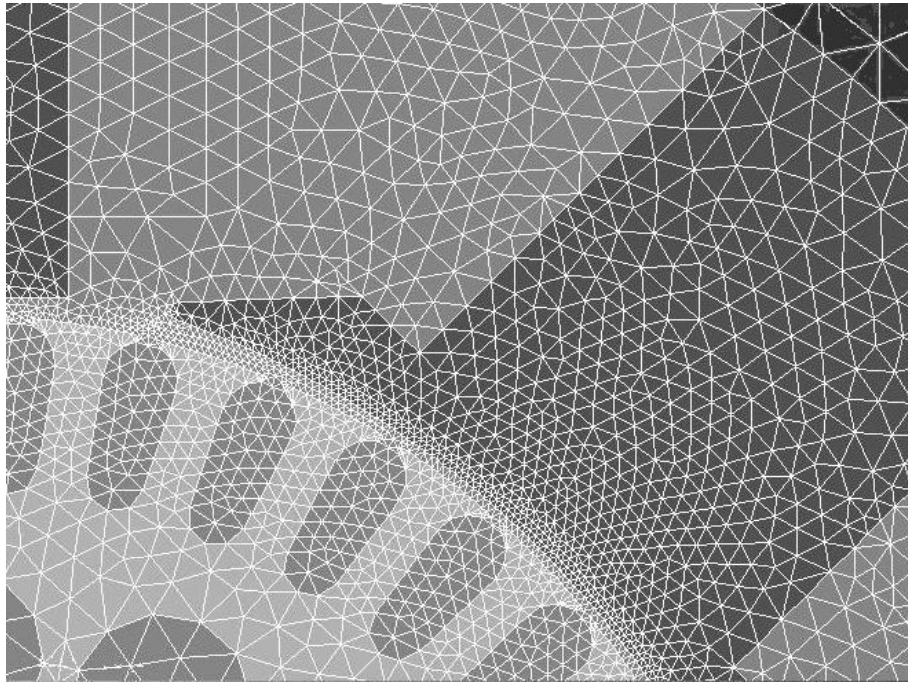


Рис. 2. Фрагмент сітки скінченних елементів

Функція  $A$  в середині кожного елемента подається у вигляді інтерполяційної формули, наприклад, з використанням многочлена Тейлора [4]:

$$A = \vec{T}[x, y] \vec{c}, \quad (5)$$

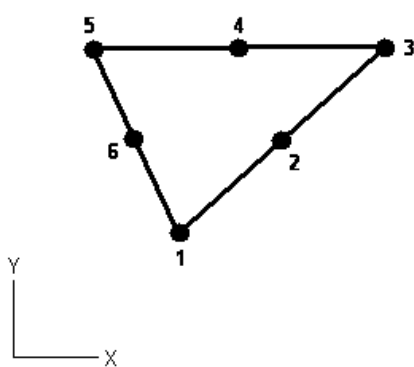


Рис. 3. Скінченний елемент

де  $\vec{T}[x, y]$  – рядок Тейлора;  $\vec{c}$  – стовпець коефіцієнтів.

Для розв'язання задачі використовуються трикутні скінченні елементи другого порядку, що мають 6 вузлів (рис. 3). Інтерполяційна формула в такому випадку набирає вигляду повного степеневого многочлена й у скалярах записується так:

$$A = c_0 + c_1x + c_2y + c_3 \frac{x^2}{2!} + c_4xy + c_5 \frac{y^2}{2!}. \quad (6)$$

При підстановці (5) або (6) у (1) функціонал  $F(\vec{A})$  стає звичайною функцією деякої кількості змінних, що відповідає кількості вузлів скінченних елементів. Процес його мінімізації зводиться до диференціювання

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = 0, \quad (7)$$

де  $A_i$  – значення потенціалу у вузлах сітки скінченних елементів.

Задача зводиться до розв'язання нелінійної системи алгебричних рівнянь щодо невідомих значень потенціалів у вузлах сітки скінченних елементів.

Вона була розв'язана з використанням пакета Ansys, причому загальна кількість вузлів становила 25661, а кількість елементів – 12766.

Результати розрахунку поля векторного потенціалу та магнітної індукції за неробочого ходу та номінального струму збудження зображені на рис. 4 та 5.

Для розрахунку характеристик машини постійного струму необхідно визначати середнє значення ЕРС обмотки якоря в різних режимах. Покажемо, що максимальне значення магнітного потоку  $\Phi_m$ , що зчеплюється з секцією якірної обмотки (при розташуванні площини секції

нормально до поздовжньої осі машини), обчислене на підставі розрахунку поля вектора магнітної індукції (або векторного магнітного потенціалу) за формулою

$$\Phi_m = \int_0^{\tau} \bar{A} d\bar{l} = \int_0^{\tau} \bar{B} \bar{n} d\bar{l}, \quad (8)$$

де  $\bar{n}$  – одиничний вектор (орт) нормалі до поверхні якоря;  $d\bar{l}$  – елементарна ділянка на полюсній поділці  $\tau$ ; може бути використане для досягнення цієї мети.

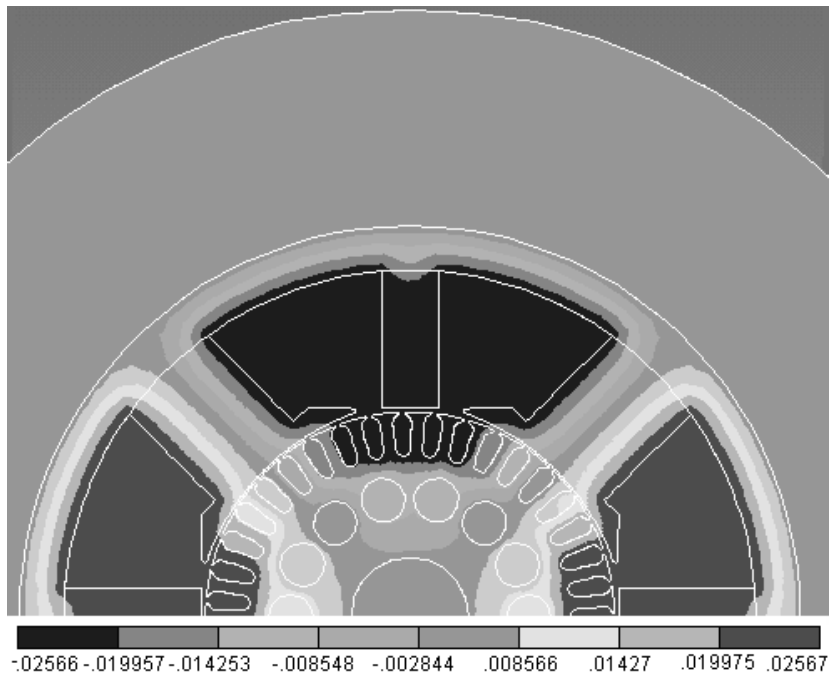


Рис. 4. Поле векторного магнітного потенціалу за неробочого ходу, Вс/м

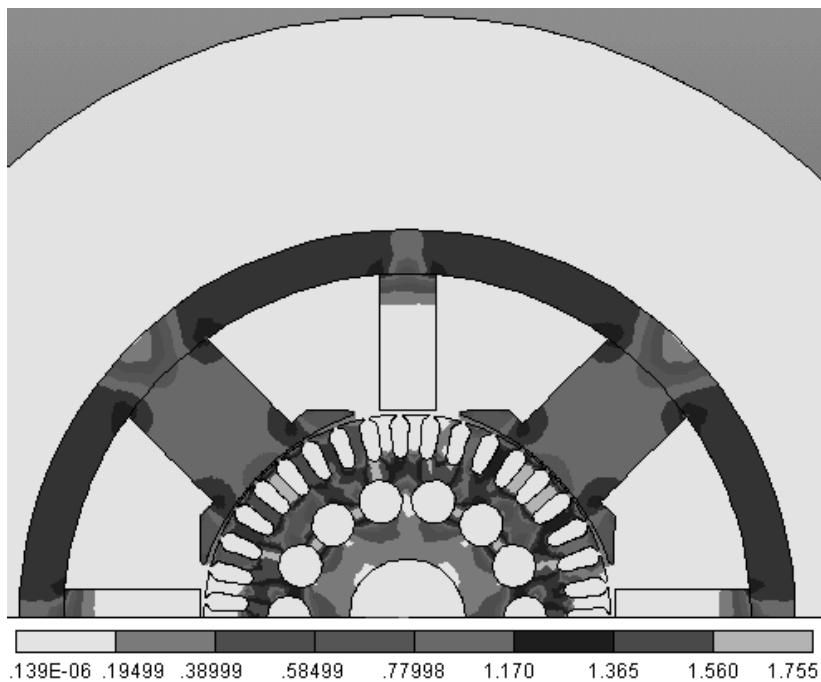


Рис. 5. Поле вектора індукції магнітного поля за неробочого ходу, Тл

Потік, що зчеплюється з однією секцією якірної обмотки, яка обертається зі швидкістю  $n$  (об/хв), можна визначити як

$$\Phi = \Phi_m \cos(\omega t), \quad (9)$$

де  $\omega = 2\pi \frac{pn}{60}$  – колова частота обертання, рад/с;  $p$  – кількість пар полюсів машини.

Потокозчеплення секції, що має  $w_c$  витків:

$$\psi = w_c \Phi = w_c \Phi_m \sin(\omega t). \quad (10)$$

Миттєве значення ЕРС, що індукується в цій секції:

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = \omega w_c \Phi_m \sin(\omega t). \quad (11)$$

Середнє значення цієї ЕРС за половину періоду обертання  $T$ :

$$e_c = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} e dt = \frac{4w_c \Phi_m}{T}, \quad (12)$$

де  $T = \frac{1}{f} = \frac{60}{pn}$  – період, с.

Враховуючи, що кількість послідовно з'єднаних витків якірної обмотки можна обчислити як  $w_c S / 2a$ , де  $S$  – кількість секцій якірної обмотки, а  $2a$  кількість паралельних гілок, отримаємо вираз для визначення середнього значення ЕРС обмотки якоря

$$E_a = \frac{S}{2a} e_c = \frac{2w_c}{aT} \Phi_m \quad (13)$$

або

$$E_a = \frac{pN}{60a} n \Phi_m. \quad (14)$$

Задаючись значеннями густини струму в шунтовій обмотці збудження, що відповідає діапазоні зміни струму збудження від  $0,4 I_{fшн}$  до  $3 I_{fшн}$ , розраховують характеристику неробочого ходу. Вона зображена на рис. 6 (крива 2), поряд зображена характеристика (крива 1), розрахована за традиційною методикою. Результати обчислень наведені у табл. 1.

Таблиця 1

### Характеристики неробочого ходу

$I_{fшн}$ , А	$J_{fшн}$ , А/мм <sup>2</sup>	$\Phi_m$ , мВб		$E_a$ , В		Похибка, %
		Традиц.	Польов.	Традиц.	Польов.	
0,401	1,00	4,29	5,25	66,9	81,9	-18,3
0,596	1,48	6,35	7,59	99,1	118,4	-16,3
0,899	2,24	9,52	10,00	148,5	156,0	-4,8
1,15	2,87	11,4	11,13	178,0	173,7	+2,9
1,44	3,59	12,7	11,97	198,0	186,7	+6,4
1,87	4,67	14,0	12,71	217,8	198,2	+9,9
2,25	5,61	14,6	13,16	227,7	205,2	+10,9

Розрахунок робочих характеристик проводився на підставі розрахунку магнітного поля машини під навантаженням. Результати розрахунку поля векторного потенціалу та магнітної індукції за номінальних навантаження та струму збудження зображені на рис. 7 та 8.

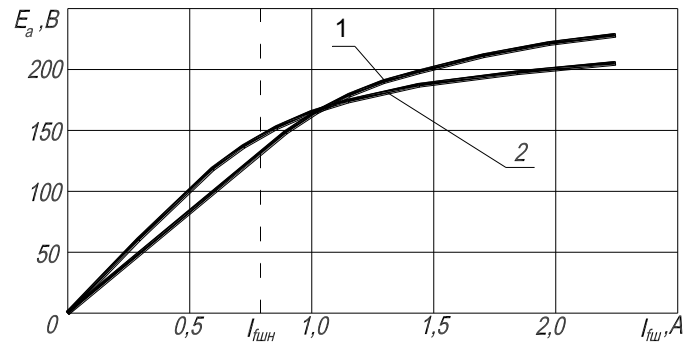


Рис. 6. Характеристики неробочого ходу:  
 1 – за традиційною методикою; 2 – на підставі розрахунку поля

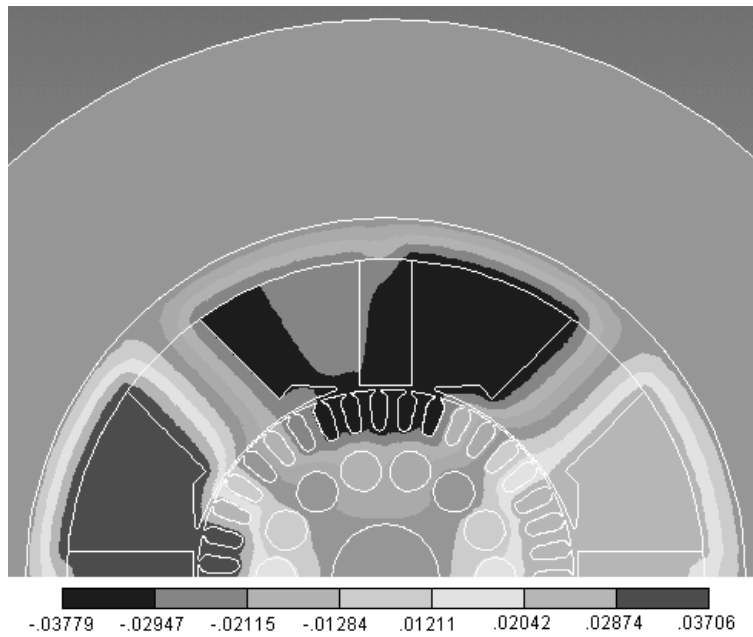


Рис. 7. Поле векторного магнітного потенціалу за номінального навантаження, Вс/м

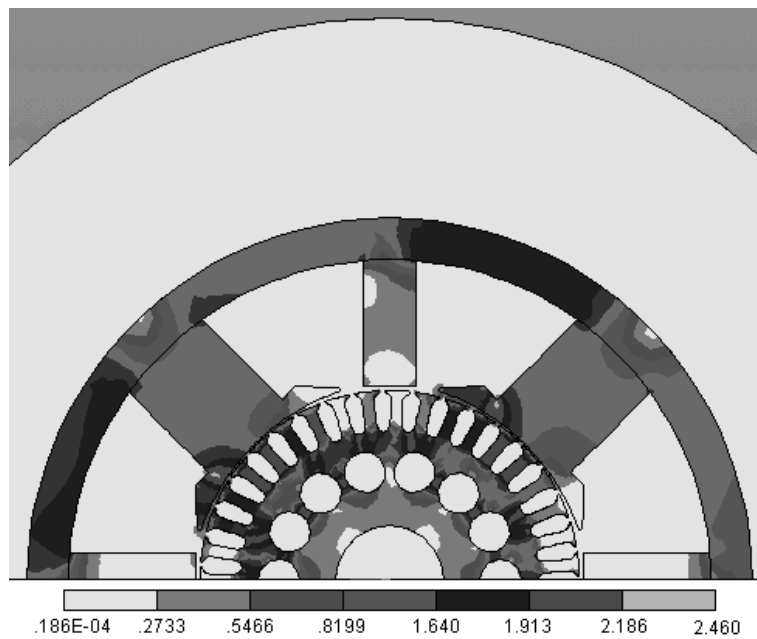


Рис. 8. Поле вектора індукції магнітного поля за номінального навантаження, Тл

Електромагнітний момент в цьому випадку обчислювався двома способами за формулою

$$M_{el} = \frac{pN}{2\pi a} I_a \Phi_m, \quad (15)$$

де  $I_a$  – струм якоря;  $\Phi_m$  – потік, обчислений за (8); та на підставі обчислення сили, що діє на якір, за допомогою тензора напружень Максвелла [5].

Вектор результуючої цієї сили обчислюється як

$$\vec{F}_m = \frac{1}{\mu_0} \int_l T_m \vec{n} d\vec{l}, \quad (16)$$

де  $T_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(B_x^2 - B_y^2) & B_x B_y \\ B_x B_y & \frac{1}{2}(-B_x^2 + B_y^2) \end{vmatrix}$  – тензор напружень Максвелла для ізотропного середови-

ща;  $B_x, B_y$  – проєкції вектора магнітної індукції ззовні поверхні якоря;  $\vec{n} = \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \end{vmatrix}$  – вектор-стовпець

проєкцій зовнішньої нормалі до поверхні якоря ( $l$ ).

На підставі (16) після нескладних перетворень електромагнітний момент, що діє на якір, визначається як

$$M_{el} = \vec{z} \cdot \frac{1}{\mu_0} \int_l \vec{r} \times \left[ (\vec{n} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} - \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{n} \right] d\vec{l}, \quad (17)$$

де  $\vec{z}$  – одиничний вектор вздовж осі +Z;  $\vec{r}$  – радіус-вектор, кінець якого належить зовнішній поверхні якоря;  $\vec{n}$  – нормаль до цієї поверхні.

Таблиця 2

### Робочі характеристики

I <sub>a</sub> , А	E <sub>a</sub> , В	Φ <sub>m</sub> , мВб		n, об/хв		M <sub>ел</sub> , Нм			P <sub>2</sub> , Вт	
		Традиц.	Польов.	Традиц.	Польов.	Традиц.	Поль.(15)	Поль.(17)	Традиц.	Польов.
6	215,9	9,6	10,16	1441	1362	8,510	9,081	10,02	781,0	886,9
19	211,3	10,8	11,24	1254	1205	30,57	31,81	37,50	3651	3673
32	206,8	11,2	11,75	1184	1128	53,52	56,01	66,27	6260	6283
48	201,1	11,6	12,11	1111	1065	82,95	86,59	101,8	9286	9299
63,3	195,7	12,3	12,35	1020	1016	115,9	116,5	134,6	11991	11990
79	190,2	12,2	12,53	999	973	143,6	147,5	167,5	14560	14560

Задаючись густиною струму в шунтовій обмотці, що відповідає номінальному струмові збудження  $I_{fшн} = 0,79A$ , та густинами струмів в якірній, серієсній обмотках та обмотці додаткових полюсів, що відповідають струмові якоря в діапазоні від  $0,1 I_{ан}$  до  $1,25 I_{ан}$ , визначено потік і розраховано ЕРС, швидкість обертання, електромагнітний момент та потужність на валу двигуна. Результати розрахунку за цією та традиційною методиками показано на рис. 9 та наведено у табл. 2.

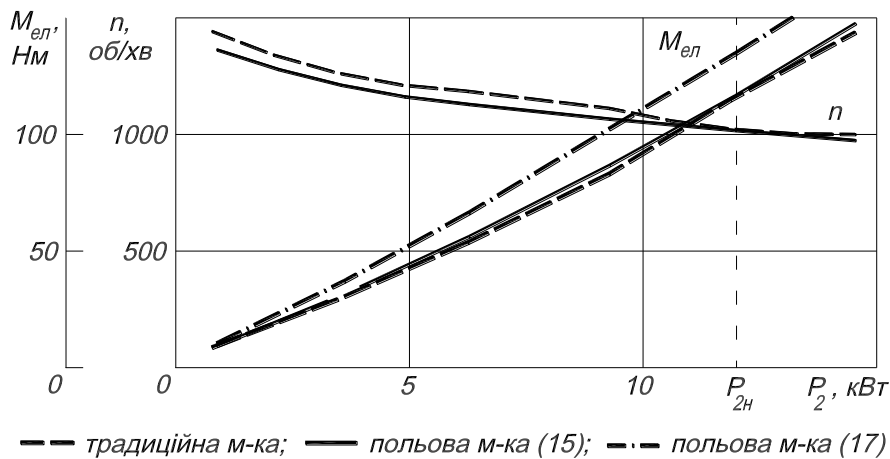


Рис. 9. Робочі характеристики

**Висновки.** Порівняння результатів розрахунку характеристик двигуна постійного струму за традиційною та запропонованою методиками показують, що традиційний підхід цілком задовольняє потребам проектування таких машин і є достатньо точним. Увібравши багаторічний досвід попередніх поколінь, традиційні методики проектування машин загальнопромислового призначення мало чим поступаються новітнім методам. Усі розрахункові залежності, графоаналітичні методи, коефіцієнти, апроксиманти тощо пройшли багаторазову перевірку й підтверджені на практиці. Тому беззаперечно відкидати їх, думаємо, не варто.

Найбільша різниця в результатах розрахунків спостерігається в околі неробочого ходу та за істотних перевантажень, що й окреслює коло задач проектування, де застосування польових методів для розрахунку характеристик себе виправдовує. Це – машини, що працюють зі значними перевантаженнями (тягові машини, двигуни для прокатних станів, гірниче обладнання), або машини, що працюють практично без навантажень (тахогенератори, різноманітні електромеханічні давачі тощо).

Це, звичайно, не зменшує цінність польового підходу і потреби в удосконаленні методів розрахунку електромагнітних полів. Сфера їх застосування – розрахунок унікальних, нових електромеханічних перетворювачів енергії, для яких не існує традиційних методик проектування, або вони є не настільки досконалими, як для машин загальнопромислового призначення.

1. Попічко В.В. *Проектування електричних машин постійного струму: Навч. посібник.* – Львів: Вид-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2004. – 583 с. 2. Иванов-Смоленский А.В. *Электромагнитные поля и процессы в электрических машинах и их физическое моделирование.* – М.: Энергия, 1969. – 304 с. 3. Сильвестер П., Феррари Р. *Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков: Пер. с англ.* – М.: Мир, 1986. – 229 с. 4. Фильц Р.В. *Дискретные аналоги дифференциальных операторов и их применение в задачах электромеханики // Изв. вузов. Электромеханика.* – 1990. – № 3. – С. 5–16. 5. Moon F. C., *Magneto-Solid Mechanics.* – New York: John Wiley and Sons, 1984.