УДК 624.075: 539.3

Р.М. Тацій , Т.І. Ушак
Національний університет “ Львівська політехніка”,
кафедра мостів та будівельної механіки

МЕТОД ДИСКРЕТИЗАЦІЇ В ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ СТРИЖНІВ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ

Наведено розв’язання задачі на стійкість для стрижнів змінної жорсткості методом “дискретизації навантаження”. Отримано числове значення критичної сили для деяких видів закріплення. Зроблено порівняльну характеристику одержаних результатів з відомими класичними результатами.

The solution of the problem on resistance for rods of change stiffness is found with the help of the method of digitization of load. Numerical value of critical power for all kinds of attaching is obtained. Comparative characteristic with known classical results is made.

Постановка проблеми. Для дослідження стійкості стрижнів змінної жорсткості використовують, як правило, наближені методи [1, 2]. Точні розв’язки можливі лише, за невеликими винятками, для диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Проте при кусково-неперервних розподілах параметрів моделі інтегрування диференціальних рівнянь класичними підходами пов’язане із значними труднощами або з появою складних фундаментальних функцій. Тому розвиток різних варіантів числово-аналітичних методів для розрахунку стрижневих систем, зокрема із змінною жорсткістю, є актуальною науковою проблемою. Дослідження задач на вільні коливання рам із розподіленою і зосередженою масами були зроблені в [7].

Метою роботи є розроблення нового методу розв’язання задач стійкості способом “дискретизації навантаження”, що ґрунтується на концепції квазіпохідних для диференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами та на апроксимації розв’язків відповідних їм систем лінійних диференціальних рівнянь з мірами [3].

1. Узагальнене квазідиференціальне рівняння 4-го порядку

На відкритому інтервалі I дійсної осі розглядається рівняння:

$$\left(a_0 y''\right)'' + \left(a_1 y'\right)' = 0, \tag{1}$$

де $a_0(x)$– локально-вимірна і обмежена на I, $a_1(x)$– міра на I: $a_1(x)=b_1'(x)$, де $b_1(x)$ – неперервна праворуч функція локально обмеженої на I варіації (клас $BV^{+}_{loc}(I)$ [4]), а “штрих” означає узагальнене диференціювання. Для рівняння (1) вводять квазіпохідні:

$$y^{[0]} = y\,,\ y^{[1]} = y'\,,\ y^{[2]} = a_0 y''\,,\ y^{[3]} = a_1 y' + \left(a_0 y''\right)''. \tag{2}$$

За допомогою квазіпохідних (2) і вектора $\bar{y} = \left(y, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]}\right)$ рівняння (1) зводиться до системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\overline{y'} = C' \cdot \bar{y}\,, \tag{3}$$

де

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & -a_1(x) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Система (3) коректна [4], оскільки виконується необхідна й достатня умова коректності:

$$\left(\Delta C(x)\right)^2 = 0\ \forall\, x \in I \quad ,$$

де

$$\Delta C(x) = C(x) - C(x-0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta b(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

– матриця стрибків цієї системи.

Через B ($x,\ s$) позначимо фундаментальну матрицю системи (3), структура якої добре вивчена в [4, 5], з такими властивостями:

1. $B(s,s) = E$, де E – одинична матриця.
2. $B(x,s) = (E + \Delta C(x)) \cdot B(x-0,s)$.
3. $\forall x_1, x_2, x_3 \in I\ \ B(x_3,x_2) \cdot B(x_2,x_1) = B(x_3,x_1)$.

За допомогою цієї матриці для довільного початкового вектора $\overline{y_0} = \overline{y}(x_0),\ x_0 \in I$, розв'язок системи (3) записується у вигляді

$$\overline{y}(x) = B(x,x_0) \cdot \overline{y_0}\ . \tag{6}$$

Зауважимо, що властивість 3 дає змогу "продовжувати" розв'язок $\overline{y}(x)$ при переході через точку $x = x_2$.

2. Задача про стійкість стрижня змінної жорсткості та її апроксимація

Така задача зводиться до розв'язування квазідиференціального рівняння на проміжку [0, l]

$$(\alpha y'')'' + p y'' = 0\,, \tag{7}$$

де $\alpha(x) = EI(x)$, E – модуль Юнга, $I(x)$ – момент інерції в перетині x стрижня, p – параметр поздовжнього навантаження. До рівняння (7) додаються однорідні крайові умови (умови закріплення),

$$\begin{gathered} U_s(y) = 0 \\ s = 1,2,3,4, \end{gathered} \tag{8}$$

що разом з рівнянням (7) утворюють задачу на власні значення.

Найменше власне значення p_1, задачі (7), (8) і є критичним навантаженням ($p_1 = p_{кр}$), для якого стрижень втрачає стійкість (за Ейлером [2]).

Для конкретності будемо в цій роботі розглядати такі умови закріплення на кінцях стрижня:

1) шарнірне: $y = 0$ і $y^{[2]} = 0$;

2) жорстке: $y = 0$, $y' = 0$;

3) вільний край: $y^{[2]} = 0$ і $y^{[3]} = 0$.

Цим трьом видам закріплень умовно присвоїмо індекси 0, 1, 2 відповідно і розглядатимемо задачі типів (ij), $i,\ j$=0, 1, 2. Так, наприклад, задача типу (01) означає, що на лівому кінці (x=0) стрижень закріплений шарнірно, а на правому ($x = l$) – жорстко.

Відрізок [0, l] точками x_0=0, x_1, x_2,…, $x_n = l$ ділимо на n однакових частин, довжина кожної з яких дорівнює $\frac{l}{n} = h$ (крок розбиття) і замість рівняння (7) розглянемо квазідиференціальне рівняння n-го наближення (метод дискретизації)

$$(a_0 y_n'')'' + p \cdot h\left(\sum_{k=1}^{n} \delta(x - x_k) \cdot y_n'\right)' = 0\,, \tag{9}$$

де $\delta(x - x_k)$ – δ – функція Дірака з носієм в точці $x = x_k$.

Як відомо [3], якщо $n \to \infty$, всі розв'язки цього рівняння разом із своїми квазіпохідними $y^{[1]}$, $y^{[2]}$ і $y^{[3]}$ рівномірно прямують до відповідних розв'язків і квазіпохідних рівняння (7):

$$\lim_{n\to\infty} \left| y_n^{[i]}(x) - y(x)^{[i]} \right| = 0,\ \ i = \overline{0,3}\ .$$

Побудуємо фундаментальну матрицю $B_n(l,0)$, системи першого порядку, що відповідає квазідиференціальному рівнянню (7) [4]:

$$B_n(l,0)=(E+\Delta C(x_n))B(x_n,x_{n-1})(E+\Delta C(x_{n-1}))\times$$
$$\times B(x_{n-1},x_{n-2})\times\ldots\times\cdot(E+\Delta C(x_1))\cdot B(x_1,0)$$

де

$$B(x_k;x_{k-1})=\begin{pmatrix} 0 & x_k - x_{k-1} & f_1 & f_2 \\ 0 & 1 & f_3 & f_4 \\ 0 & 0 & 1 & x_k - x_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1=\int_{x_{k-1}}^{x_k} a_0^{-1}(t)(x_k-t)dt \ ;f_2=\int_{x_{k-1}}^{x_k} a_0^{-1}(t)(t-x_{k-1})(x_k-t)dt\ ;$$

$$f_3=\int_{x_{k-1}}^{x_k} a_0^{-1}(t)dt \quad ;f_4=\int_{x_{k-1}}^{x_k} a_0^{-1}(t)(t-x_{k-1})dt\ .$$

Позначимо через Y_0 початкову матрицю, що враховує умови закріплення в точці x=0. Для шарнірного та жорсткого закріплення і вільного кінця відповідно:

$$Y_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ Y_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};Y_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

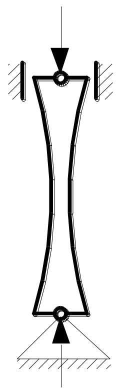
Позначимо:

$$B_n(l,0)\cdot Y_0=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}.$$

Тоді, залежно від умов закріплення на правому кінці (x=l), отримуємо характеристичне рівняння для визначення критичного навантаження.

Для шарнірного, жорсткого закріплення та для вільного кінця відповідно:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=0;\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=0;\ \det\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}=0.$$



3. Приклад реалізації методу дискретизації

Розглядається задача про обчислення критичного навантаження для стрижня змінної жорсткості.

$$\alpha(x)=\frac{1}{1+\sin x}$$

на проміжку $[0;\pi]$ див. рисунок, яка в роботі [2] розв'язана різними наближеними методами при шарнірному закріпленні обидвох кінців і тому може вважатися модельною.

У наведеній нижче таблиці результати для $p_{кр}$ за цієї точності обчислень для $n=2000$ і $n=4000$ не відрізняються (незаповнені клітинки означають відсутність числових результатів у відповідній літературі).

Висновки. У статті запропоновано новий наближений метод обчислення критичного навантаження при ейлеровій втраті стійкості стрижнем, в основу якого покладено апроксимацію коефіцієнтів відповідних диференціальних рівнянь узагальненими функціями.

Тип	Метод обчислення		
	Метод Кіссілінга [2]	Метод Шварта [2]	Авторський
00	$0,5359 \le P_l \le 0,5673$	$0,53880 \le P_l \le 0,54088$	0,540826375
01	-	-	1,24306
10	-	-	1,24306
11	-	-	2,57912
12	-	-	1,39466
21	-	-	1,39466

Отримані числові результати добре узгоджуються з відомими в літературі .

Зауважимо, що метод відзначається простотою і універсальністю алгоритму та швидкістю збіжності.

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М., 1967. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. – М., 1968.. Тацій Р.М., Іщук В.В., Кісілевич В.В. Про апроксимацію розв'язків диференціальних рівнянь з мірами // Вісн. Київ. ун-ту: Математика і механіка. – К., 1990. – № 32. – С.128–131. Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння // Препр. АН України ІППММ. – 1994. – № 2-94. – С.1–54. Тацій Р.М., Пахолок Б.Б. Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння // Доп. АН УРСР. – сер. А. – 1989. – № 4. – С.25–28. Гащук П., Зорій Л. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів, 1999. 7. Давидчак О.Р., Тацій Р.М., Ушак Т.І. Розв'язок задач динаміки дискретно-неперервних стержневих систем методом граничних елементів із апроксимацією коєфіцієнтів диференціальних рівнянь // Вісник НУ "Львівська політехніка" . – 2004.

УДК 624.012.3.075.23

П.Ф. Холод, Г.М. Олексин
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра будівельних конструкцій та мостів

МІЦНІСТЬ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КОЛОН ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ВИСОКОМІЦНИХ МАТЕРІАЛІВ

Розглянуто матеріали дослідження коротких залізобетонних елементів із застосуванням попередньо стиснутої високоміцної арматури та високоміцних бетонів з метою повного використанням характеристик міцності попередньо розтягнутої арматури класу А-ІІ, високоміцної арматури класу Ат-V і бетону.

This article focuses on the experimental and theoretical study of the reinforced concrete compressed members reinforced by spatial cage with pre-compressed high strength reinforcement.

Постановка проблеми. Однією з важливих проблем будівництва на цьому етапі є проектування ефективних конструкцій з мінімальною затратою будівельних матеріалів. Цьому сприяє застосування у будівництві залізобетонних конструкцій з високоміцною арматурою та використання високоміцних бетонів. Однак обмежена деформативність бетону не дає змоги ефективно використовувати таку арматуру в стиснутих елементах.

Аналіз останніх досліджень. Традиційні методи проектування колон для каркасних будинків під навантаженням 9...15 МН є неефективними, тому що потребують значної витрати металу та підвищення відсотка армування. У результаті експериментальних досліджень розроблено