

*Cryogenics*. – Seoul, Korea. – 2002. – p.15. 11. D. Agassi, D. K. Christen and S. J. Pennycook. Flux pinning and critical currents at low-angle grain boundaries in high-temperature superconductors// *Applied physics letters*.–October 2002. – vol. 81, number 15, p. 71. 12. J. Rymaszewski, R. Pawlak. Structural and electrical properties of metal–superconductor diffusion contact // *MIXDES*. – Wroclaw, Poland. – June 2002. – p. 283–286. 13. J. Rymaszewski. Numerical simulation of thermal phenomena in metal–superconductor junction // *MIXDES*. – Lodz, Poland. – June 2003. – p. 346–351. 14. J. Leszcynski, J. Rymaszewski, E. Korzeniewska. Thermal phenom in diffusion contact region of Au/bulk superconductor YBaCuO // *MIXDES*. – Zakopane, Poland. – June 2001. – p. 283–286. 15. H. R. Semerad, H. Kinder, J. Grundmann, H. Mosebach, and others. Current limiting properties of YBCO films on sapphire substrates // *EUCA 99*. – Barcelona, Spain. – 14. – 17.09 1999. p. 30–32. 16. S. Sugita, H. Ohsaki. FEM Analysis of Current Limiting Characteristics of Superconducting Thin Film Current Limiting Device by the Current Vector potential Method // *Applied Superconductivity, IEEE Transactions*. – June 2003. – Vol. 13, Issue: 2. – p. 2020 – 2023. 17. Kim, S.B., Ishiyama, A., Okada, H., and Nomura, S. Normal zone propagation properties in Bi–2223/Ag superconducting multifilament tapes // *Cryogenics*. – 1998. – 38 n. 8, – p. 823.

УДК 004.415.2 : 681.533

П.Ю. Денисюк, В.М. Теслюк, М.Є. Перейма  
Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра систем автоматизованого проектування

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БАЗОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ ГІДРАВЛІЧНОЇ МІКРОПОМПИ З П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМ ПРИВОДОМ ДЛЯ КОМПОНЕНТНОГО РІВНЯ ПРОЕКТУВАННЯ

© Денисюк П. Ю., Теслюк В. М., Перейма М. Є., 2005

**Запропоновано математичну модель базової конструкції гідравлічної мікропомпи з п'єзоелектричним приводом для проектування на компонентному рівні. Використано метод скінченних різниць для розв'язання задачі для визначення переміщень та напружень. Наведені результати залежностей вихідних характеристик від прикладеної електричної напруги.**

**In this paper mathematical model of basic constructions of hydraulic micropump with piezoelectric actuator for design on a component level. The method of eventual differences is used for the solve of task for determination of displacements and tensions. Resulted results of dependences of initial characteristics from the enclosed the voltage.**

**Вступ.** Третє тисячоліття пов'язане з бурхливим розвитком мікроелектромеханічних технологій. До цих пристроїв належать мікроелектромеханічні системи [1, 2].

Використання нових підходів під час проектування мікрогідравлічних пристроїв дає поштовх та прискорює розвиток гідравлічних МЕМС, як окремої науки. Завдяки використанню нових підходів у керуванні роботою мікропристроїв, які базуються на електромагнітній, термодинамічній, п'єзоелектричній та електростатичній природі, було створено низку пристроїв, які отримали назву гідравлічні мікроелектромеханічні системи (ГМЕМС).

До п'єзоелектричних пристроїв належать і мікропомпи з п'єзоелектричним приводом, які використовуються при побудові мікрогідравлічних систем та в промисловості (фармацевтичній, хімічній, військовій тощо).

Складність виготовлення та проектування таких пристроїв визначається їхніми малими розмірами. По-друге, складові елементи ГМЕМС виконують значні механічні переміщення в часі. По-третє фізичний принцип роботи цих пристроїв базується на стику таких наукових галузей: мікроелектроніки, електрики, мікрогідравліки, мікроелектроніки, біології тощо [3]. Це все накладає вимоги щодо конструктивного виконання та врахування параметрів зовнішнього середовища.

**Будова та принцип дії мікропомпи.** На рис. 1. зображена будова мікропомпи з п'єзоелектричним приводом. Мікропомпа складається з корпусу 1, мембрани 2 і п'єзоелектричного елемента 3. У корпусі знаходиться робоча камера помпи 8, вхідний канал клапана 9 і вихідний канал клапана 10. Для керування напрямком течії робочої рідини використовуються зворотні кулькові клапани: вхідний 4 і вихідний 5. Крім того мікропомпа з п'єзоелектричним приводом має вхідний 6 та вихідний 7 канали мікропомпи.

Коливання пружного елемента мікропомпи виникають завдяки використанню п'єзоелектричного елемента, який є жорстко з'єднаний з мембраною мікропомпи. Прикладання електричної напруги до п'єзоелектричного елемента, призводить до зміни його лінійних розмірів. Завдяки цьому пружний елемент вигинається до гори (рис. 1 а). Об'єм камери зростає і виникає різниця тисків. При цьому вхідний клапан відкривається, а рідина всмоктується до робочої камери мікропомпи. У цьому випадку мікропомпа знаходиться в фазі всмоктування. Зняття напруги з п'єзоелектричного елемента пов'язано з фазою виштовхування рідини. Мембрана помпи та п'єзоелектричний елемент повертаються в своє початкове положення, (рис. 1 б), а тиск, що виникає призводить до того, що вихідний клапан відкривається і робоча рідина виштовхується з робочої камери мікропомпи.

Для керування роботою мікропомпи використовуються імпульси напруги величиною в сотні вольт.

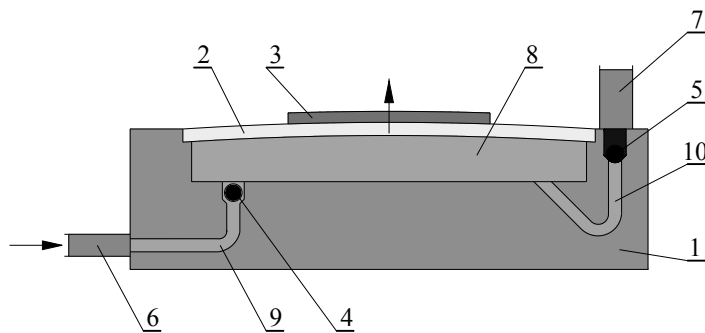
Генерація з відповідною частотою прикладання та зняття електричної напруги примушує до коливальних рухів мембрану, а частота роботи мікропомпи є керована прикладеною електричною напругою.

**Математична модель.** П'єзоелектричну силу, яка виникає в п'єзоелектричному елементі мікропомпи, можна описати рівнянням

$$F_z = \frac{V\varepsilon L}{dxz}, \quad F_y = \frac{V\varepsilon W}{dxz}, \quad F_x = \frac{V\varepsilon LW}{dxzt},$$

де  $V$  – прикладена напруга;  $t$  – висота п'єзопластини;  $W$  – ширина п'єзопластини;  $L$  – довжина п'єзопластини.

а)



б)

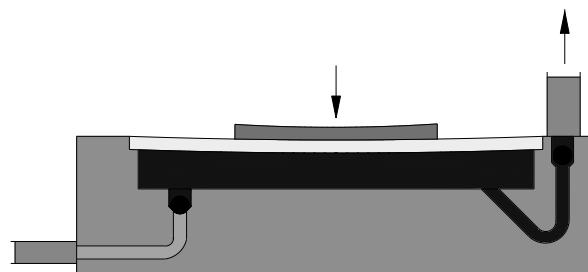


Рис. 1. Мікропомпа з п'єзоелектричним приводом:  
 а) – в фазі всмоктування, б) – в фазі виштовхування рідини,  
 1 – корпус, 2 – мембрана, 3 – п'єзоелектричний елемент,  
 4 – вхідний клапан, 5 – вихідний клапан, 6 – вхідний канал мікропомпи,  
 7 – вихідний канал мікропомпи, 8 – робоча камера помпи,  
 9 – вхідний канал клапана, 10 – вихідний канали клапана

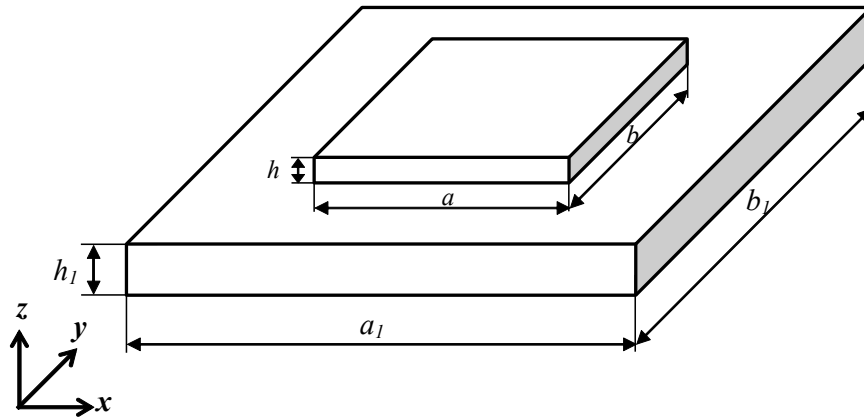


Рис. 2. Конструкція базового пружного елемента мікропомпи з п'єзоелектричним приводом

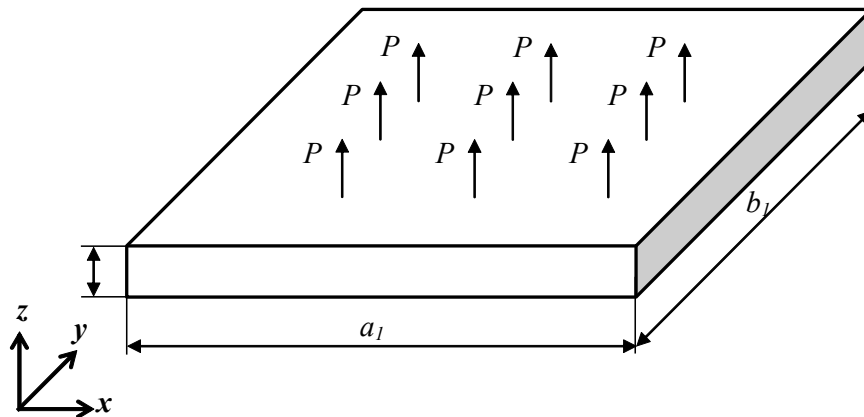


Рис. 3. Конструкція пластини та розподіл тиску

Оскільки товщина мембрани мікропомпи є набагато меншою за його лінійні розміри, то для опису поведінки мембрани використаємо теорію пластин [4], де її рух описується бігармонійним рівнянням Софі-Жармен [4]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 + \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \Delta \Delta w = \frac{p}{K}, \quad (1)$$

де  $K$  – жорсткість мембрани;  $p$  – прикладений тиск;  $w$  – прогин в точці з координатами  $(x, y)$ .

Жорсткість  $K$  залежить від матеріалу пластини, зокрема модуля Юнга  $E$  та коефіцієнта Пуассона  $\nu$ . Жорсткість  $K$  визначається як

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Разом з тим для остаточного формування задачі моделювання необхідно додати до рівняння в часткових похідних крайові умови. Будемо вважати, що мембрана мікропомпи жорстко закріплена на її краях, тобто

$$\omega|_{z_p} = \omega_0 = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial N}|_{z_p} = \frac{\partial \omega_0}{\partial N} = 0, \quad (2)$$

де  $N$  – нормаль до границі області моделювання,  $\omega_0$  – значення прогину на границі.

**Застосування методу скінченних різниць.** Для розв'язання диференціального рівняння (1) з крайовими умовами (2) використано метод скінченних границь [5], який передбачає використання тринадцятиточкової різницевої схеми (рис. 4)

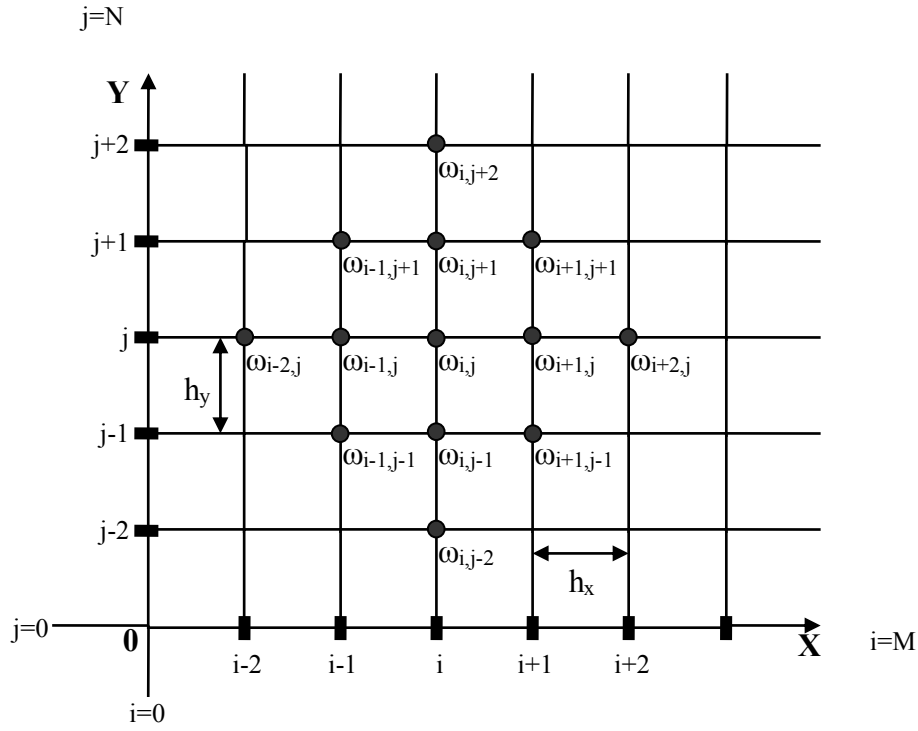


Рис. 4. Тринадцятиточкова різницева схема для розв'язання рівняння Софі-Жармен

Для апроксимації четвертої похідної від  $\omega$  по  $x$  та  $y$  використовуємо такі вирази:

$$\frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial x^4} = \frac{\omega_{i-2,j} - 4\omega_{i-1,j} + 6\omega_{i,j} - 4\omega_{i+1,j} + \omega_{i+2,j}}{h_x^4}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial y^4} = \frac{\omega_{i,j-2} - 4\omega_{i,j-1} + 6\omega_{i,j} - 4\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j+1}}{h_y^4}.$$

Апроксимацію змішаної четвертої похідної здійснюють за допомогою виразу

$$\frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial x^2 \partial^2} = \frac{\omega_{i-1,j+1} + \omega_{i+1,j+1} + \omega_{i+1,j-1} + \omega_{i-1,j-1} + 4\omega_{i,j}}{h_x^2 h_y^2} - \frac{2(\omega_{i-1,j} + \omega_{i+1,j} + \omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1})}{h_x^2 h_y^2}, \quad (5)$$

В остаточному випадку, після підстановок (4) і (5) в (1) та позначивши  $\frac{P}{D} = f$ , отримаємо

такий вираз для вузла з координатами  $(i, j)$ :

$$\frac{\omega_{i-2,j} + \omega_{i+2,j}}{h_x^4} + \frac{\omega_{i,j-2} + \omega_{i,j+2}}{h_y^4} - \frac{4(\omega_{i-1,j} + \omega_{i+1,j})}{h_x^4} - \frac{4(\omega_{i,j-1} + \omega_{i,j+1})}{h_y^4} - \frac{4(\omega_{i-1,j} + \omega_{i+1,j} + \omega_{i,j-1} + \omega_{i,j+1})}{h_x^2 h_y^2} + \frac{2(\omega_{i-1,j+1} + \omega_{i+1,j+1} + \omega_{i+1,j-1} + \omega_{i-1,j-1})}{h_x^2 h_y^2} + \frac{6\omega_{i,j}}{h_x^4} + \frac{6\omega_{i,j}}{h_y^4} + \frac{8\omega_{i,j}}{h_x^2 h_y^2} = f, \quad (6)$$

Варто зауважити таке: щоб отримати тридцятирядкову матрицю, необхідно певним чином провести обхід вузлів області моделювання. Його можна провести або по рядках, або по стовпцях (рис. 5).

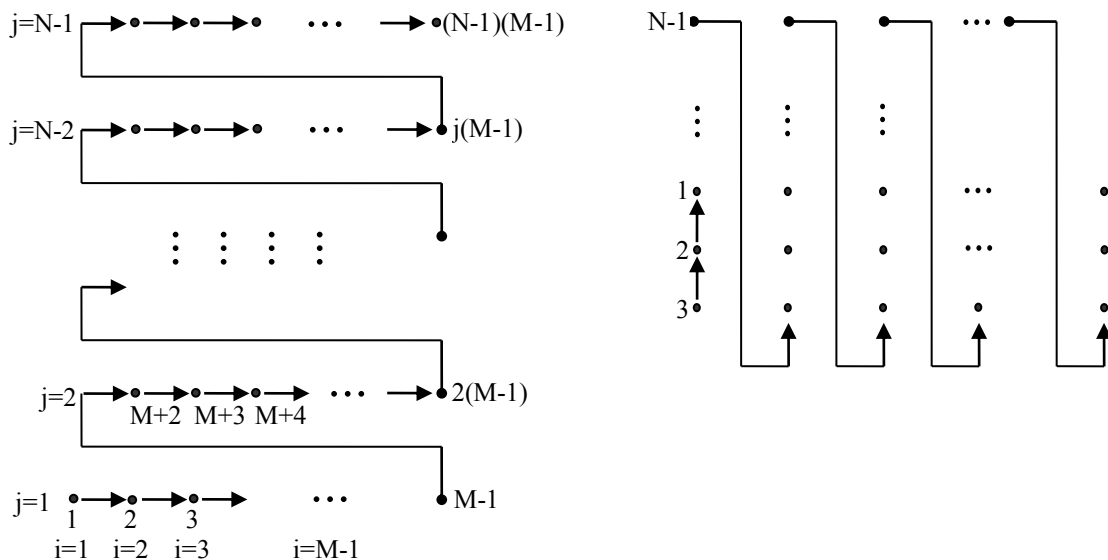


Рис. 5. Обхід вузлів області моделювання

$$[A] \times [W] = [F] \quad (7)$$

де  $[A]$  – матриця коефіцієнтів СЛАР при невідомих;  $[W]$  – вектор-стовпець невідомих;  $[F]$  – вектор-стовпець вільних членів.

Для розв’язання системи рівнянь можна використовувати як прямі, так і ітераційні методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) [6].

**Результати моделювання.** Під час розв’язання задачі було використано метод скінченних різниць.

Для розв’язання отриманої системи рівнянь (7) було використано метод Зейделя.

На рис. 6 показано залежність механічних напружень, що виникають у пружному елементі від прикладеної електричної напруги. На рис. 7 зображено залежність максимальних переміщень пружного елемента від прикладеної електричної напруги. Результати зміни продуктивності роботи мікропомпи від прикладеної напруги показано на рис. 8.

Робочою рідиною було обрано воду. Розміри п’єзоелектричного елемента мікропомпи (пластина)  $a = 0.5$  мм,  $b = 0.5$  мм,  $h = \text{---}$  мм, розміри мембрани мікропомпи (пластина)  $a_1 = 1$  мм,  $b_1 = 1$  мм,  $h_1 = \text{---}$  мм, матеріалом мембрани вибрано кремній (Si), частота роботи 5 Гц.

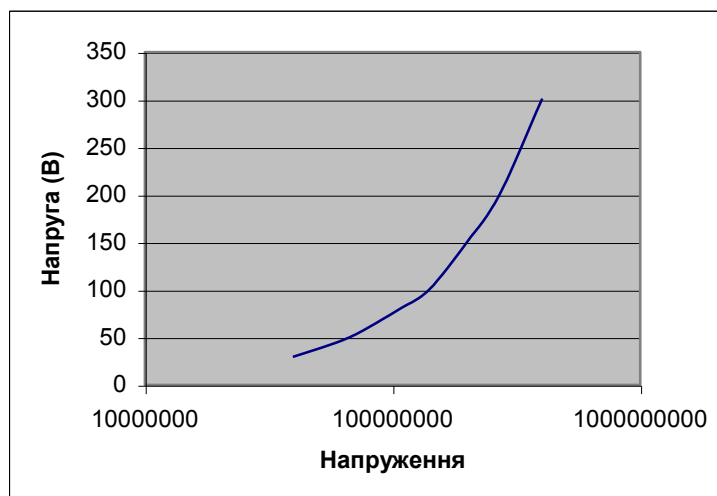


Рис. 6. Зміна механічних напружень у пружному елементі від прикладеної електричної напруги

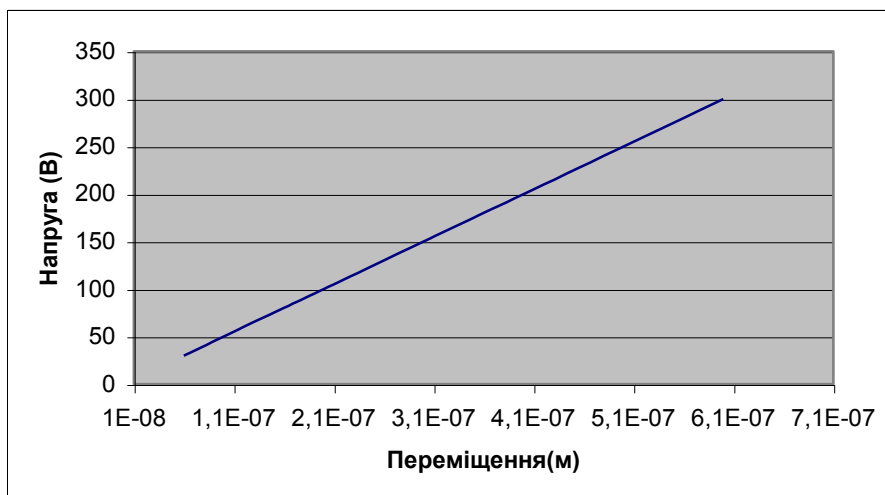


Рис. 7. Зміна максимальних переміщень пружного елемента від прикладеної електричної напруги

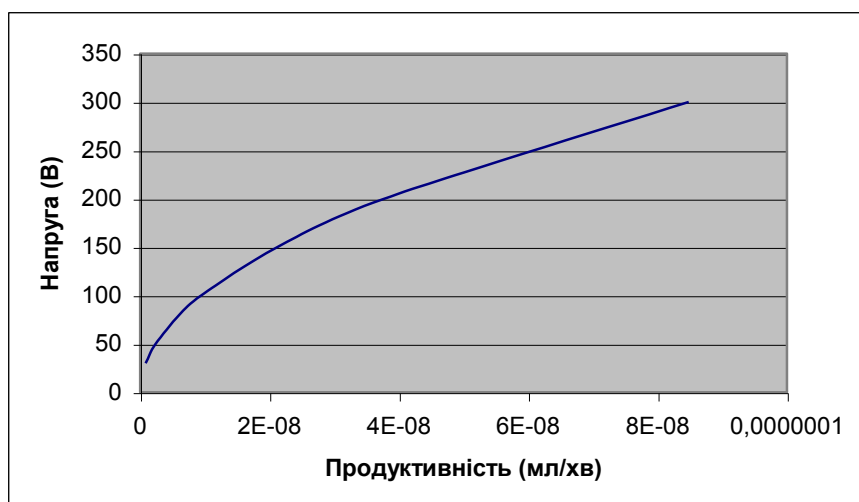


Рис. 8. Зміна продуктивності роботи мікропомпи від прикладеної електричної напруги

**Висновки.** У роботі розроблена математична модель для п'єзоелектричної мікропомпи. Одержано вихідні характеристики п'єзоелектричної мікропомпи (максимальні механічні напруження, максимальні переміщення пружного елемента, продуктивність роботи).

1. Maluf, Nadim *An introduction to microelectromechanical system engineering* // *Library of Congress Cataloging-in-Publication Data*. 2. Muller, R. S. and K. Y. Lau, "Surface-Micromachined Microoptical Elements and Systems," in *Integrated Sensors, Microactuators, Microsystems (MEMS)*, Vol.86, No. 8, Aug. 1998. 3. Rogers, C, "Intelligent Materials", *Scientific American*, Vol 273, No 3, Sept. 1995. 4. Подгорный А. М., Марченко Г. А., Пустынников В. И. *Основы и методы прикладной теории упругости: Учебник.* – К.: Вища школа. 1981. – 328 с. 5. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1966. – 724с. 6. Вробьева Г. Н., Данилова А. Н. *Практикум по вычислительной математике: Учебник.* – М.: Высш. школа, 1990. – 208 с.