

1. Wiener N. *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series*. J. Wiley, New York, 1949. 2. Марпл С.Л. *Цифровой спектральный анализ и его приложения*. М., 1990. 3. Daubechies I. *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis*. IEEE Trans. on Information Theory, 1990, v. 36, № 5. 4. Masjukov A.V., Slyonkin V.I. *Time-varying time shifts correction by quasi-elastic deformation of seismic traces // Geophysical prospecting*, 2000, V.48, № 2. 5. Хэннан Э. *Многомерные временные ряды*. М., 1974. 6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М., 1987. 7. Дьяконов В.П. *Вейвлеты. От теории к практике. Изд.2-е, перераб. и доп.* - М., 2004. 8. Малла С. *Вейвлеты в обработке сигналов*. М., 2005.

УДК 004.942, 004.852

П.О. Кравець

Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра інформаційних систем та мереж

ІГРОВІ МЕТОДИ КЕРУВАННЯ ВИПАДКОВИМИ ПРОЦЕСАМИ В УМОВАХ ВІДНОСНИХ ЗАВАД

© Кравець П.О., 2005

Досліджується проблема керування випадковими процесами за допомогою адаптивних ігрових методів в умовах відносних завад, які є функцією поточної відстані між фронтами випадкових процесів. Розглянуто варіанти з лінійно зростаючою та спадною функціями інтенсивностей завад. Розроблено ігровий алгоритм та виконано програмне моделювання наближення керованого випадкового процесу до некерованого у дискретному просторі з евклідовою метрикою.

The problem of stochastic processes control by means of adaptive game methods in conditions of relative noises is investigated. The noises are function of line distance between fronts of stochastic processes. Is considered variants with linearly increasing and decreasing of noise intensity functions. The game algorithm is developed and the simulation program of approach of controlled stochastic process to uncontrolled process in discrete space with the Euclidean metrics is executed.

Вступ. Задачі багатокритеріальної оптимізації при дії випадкових завад з апіорі невідомими стохастичними характеристиками є актуальними для багатьох галузей практичних застосувань – автоматизованого проектування, радіотехніки, керування системами, ідентифікації, прийняття рішень тощо. Для їхнього розв'язування широко застосовують різноманітні пошукові методи [1, 2].

Для низки таких задач є характерним вплив відносних завад, які функціонально залежать від координат пошукового простору. Наприклад, при наближенні до оптимальних значень цільової функції інтенсивність завад може зростати або зменшуватися [3, 4].

Ефективність пошукових методів визначається середньою кількістю кроків, необхідних для розв'язання задачі. У класі пошукових методів найефективнішими є адаптивні методи, які виконують планування пошукових стратегій на основі інформації про передісторію [1, 5, 6]. Якщо кількість пошукових стратегій є скінченною, то для пошуку оптимальних розв'язків багатокритеріальних задач доцільно використати адаптивні ігрові методи [7–10].

У цій роботі вивчається ефективність адаптивних ігрових методів пошуку оптимальних розв'язків в умовах дії відносних завад. Метою роботи є дослідження впливу інтенсивності відносної завади та розмірності пошукового простору на швидкість збіжності ігрових методів.

Для практичної інтерпретації проблеми сформулюємо задачу наближення керованого випадкового процесу до некерованого у дискретному просторі.

Формулювання задачі. Розглянемо керований випадковий процес $x \in X$, заданий у дискретному обмеженому просторі $X = \bigotimes_{i=1, m} X^i \subset R_+^m$ системою умовних розподілів

$$p_n^i(\omega) = P(x_n^i(\omega) \in X^i \mid x_t^i, \xi_t^i, t = \overline{1, n-1}), \quad (1)$$

де P – умовна імовірність реалізації події, n – момент часу, ω – випадкове випробування, $X^i = \{x^i(1), x^i(2), \dots, x^i(N_i)\}$ – множина дискретних значень станів випадкового процесу x_n^i по i -му координатному напрямку, $i = \overline{1, m}$, ξ_n^i – випадкова величина, що визначає поточну ефективність керування по i -му координатному напрямку.

Значення поточної ефективності ξ_n^i впливає із загальної мети керування, яка полягає у наближенні траєкторії випадкового процесу x_n до некерованого випадкового процесу y_n . Для простору з евклідовою метрикою поточну відстань між процесами обчислюють так:

$$\xi_n = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_n^i - y_n^i)^2} \leq r, \quad (2)$$

де $r \geq 0$ – мінімально необхідна відстань наближення.

Нехай некерований процес задано нормальним розподілом $y_n \sim N(m_y, d_y)$ з математичним сподіванням $m_y \in X = const$ та дисперсією $d_y = const < \infty$, $d_y \in X$. Будемо вважати, що некерований процес є незалежним від керованого процесу.

Керований процес повинен адаптуватися до некерованого процесу у тому розумінні, що з плином часу мода його випадкового розподілу відповідатиме математичному сподіванню координат некерованого процесу.

Розглянемо незалежне паралельне керування випадковим процесом x_n по кожному координатному напрямку. Ефективність керування по i -му координатному напрямку визначається поточною відстанню між траєкторіями випадкових процесів у момент часу n :

$$\xi_n^i = |x_n^i - y_n^i|, i = \overline{1, m}. \quad (3)$$

У разі дії завад вимірювана поточна відстань між процесами ξ_n^i спотворюється випадковою завадою μ_n^i , в результаті чого набуває значення

$$\zeta_n^i = \xi_n^i + \mu_n^i. \quad (4)$$

Відносні завади функціонально залежать від поточної відстані між випадковими процесами:

$$\mu_n^i = \psi_n^i h(\xi_n^i), \quad (5)$$

де $\psi_n^i \sim Normal(0, \sigma^2)$ – нормально розподілена випадкова величина з нульовим математичним сподіванням та дисперсією $\sigma^2 = const$, h – детермінована функція випадкової величини ξ_n^i , яка визначає амплітудну інтенсивність завади.

Розглянемо два варіанти лінійної залежності інтенсивності завади від поточної відстані між фронтами випадкових процесів. Із зменшенням відстані інтенсивність завади

1) зростає за законом

$$h(\xi_n^i) = k(\xi_{max}^i - \xi_n^i), \quad (6)$$

де $k = const > 0$ – коефіцієнт підсилення; $\xi_{max}^i < \infty$ – максимально можлива відстань між процесами або діаметр пошукового простору по i -му координатному напрямку; ξ_n^i – поточна відстань між траєкторіями випадкових процесів по i -му координатному напрямку;

2) зменшується за законом

$$h(\xi_n^i) = k\xi_n^i. \quad (7)$$

Для керування випадковим процесом x_n введемо m гравців, кожен із яких у дискретні моменти часу $n=1,2,\dots$ здійснює незалежний вибір однієї із N_i чистих стратегій $X^i = \{x^i(1), x^i(2), \dots, x^i(N_i)\}$ по i -му координатному напрямку ($i = \overline{1, m}$). Вибір чистих стратегій здійснюється на основі динамічних векторів змішаних стратегій $p_n^i = (p_n^i(1), p_n^i(2), \dots, p_n^i(N_i))$, елементи яких є умовними імовірностями виду (1).

Динамічні вектори p_n^i використовують для реалізації адаптивного керування випадковим процесом на основі передісторії станів випадкових процесів $x_t^i, \xi_t^i, t = \overline{1, n-1}$. У початковий момент часу $n=1$ інформація про передісторію відсутня, тому можна прийняти, що $p_1^i = 1/N_i$.

Для збирання повних статистичних даних про ефективність усіх чистих стратегій вектори p_n^i набувають значення на одиничних ε -симплексах:

$$S_\varepsilon^{N_i} = \{p^i \mid p^i \in S^{N_i}; p^i(j) \geq \varepsilon \ (j = \overline{1, N_i})\}, \ \varepsilon \in (0, \min_i N_i^{-1}). \quad (8)$$

Після вибору чистих стратегій усіма гравцями кожен з них вимірює відстань до поточного значення некерованого випадкового процесу y_n^i по контрольованому координатному напрямку. Значення відстаней визначає поточні втрати гравців ξ_n^i , які обчислюють згідно із (3). Некерований процес може ставити завади керованому процесу для вимірювання відстані, тому гравцям доступні поточні втрати ζ_n^i виду (4), модифіковані адитивною завадою μ_n^i (5). Отримані поточні втрати ζ_n^i використовує кожен гравець для наступного вибору чистої стратегії.

Поточна оцінка ефективності керування випадковим процесом визначається функцією середніх втрат i -го гравця

$$\Phi_n^i(\{x_n\}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \zeta_t^i, \ i = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Теоретичною метою гравців є реалізація такої послідовності чистих стратегій, яка в асимптотиці часу забезпечує мінімізацію функцій середніх втрат:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Phi}_n^i \rightarrow \min. \quad (10)$$

Ігрова задача наближення керованого випадкового процесу до некерованого на практиці може мати момент зупинки $n < \infty$, наприклад, такий, що визначається умовою (2).

Ігрові адаптивні методи розв'язування задачі. Для досягнення сформульованої мети необхідно розробити метод зміни векторів змішаних стратегій $p_n^i, i = \overline{1, m}$ у часі.

Метод зміни елементів вектора змішаних стратегій побудуємо так, що при виборі стратегії $x_n^i(j)$ елемент $p_n^i(j)$ змінюється на значення, пропорційне до поточного програшу ζ_n^i . Для забезпечення належності модифікованого вектора p_n^i одиничному ε -симплексу (8) виконується відповідне нормування його елементів.

Тоді загальне рекурентне перетворення векторів змішаних стратегій матиме вигляд:

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i} \left\{ p_n^i - \gamma_n R(p_n^i, x_n^i, \zeta_n^i) \right\}, \quad (11)$$

де $\pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}$ – проектор на одиничний симплекс, що забезпечує виконання умови $p_{n+1}^i \in S_{\varepsilon}^{N_i}$; γ_n – монотонно спадна послідовність невід’ємних величин, яка регулює крок методу; R – крок методу; ε_n – монотонно спадна послідовність невід’ємних величин, яка регулює швидкість розширення ε -симплексу.

Для виконання мети (10) необхідно накласти обмеження на можливі зміни векторів змішаних стратегій p_n^i . Рациональне переміщення на одиничному симплексі визначається умовою псевдоградієнтності відносно функції Ляпунова $\Delta(p)$:

$$\rho_n(p^i) = \left\langle M\{R(p_n^i, x_n^i, \zeta_n^i) | p_n^i = p^i\}, \nabla_{p^i} \Delta(p) \right\rangle \geq 0, \quad (12)$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток векторів у евклідовому просторі; $p^i \in S_0^{N_i}$; $p \in S$; $S = \prod_{i=1}^m S_0^{N_i}$.

Функція Ляпунова задовольняє такі умови: 1) $\Delta(p)$ – диференційована на симплексі S ; 2) $\Delta(p) > 0$ для всіх точок симплексу S , крім точок оптимального розв’язку $p^* \in S$; 3) $\Delta(p^*) = 0$ у точках оптимального розв’язку. Загалом цим умовам відповідає функція

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^m \Delta_n^i = \sum_{i=1}^m \|p_n^i - p^{i*}\|^2, \quad (13)$$

де p^{i*} – оптимальна стратегія i -го гравця. Інакше, умова псевдоградієнтності означає таке. Для досягнення мети вектор руху методу повинен у середньому утворювати гострий кут з напрямком на оптимальний розв’язок ігрової задачі.

Умова псевдоградієнтності може бути забезпечена цілим класом рекурентних методів виду (11). Для синтезу рекурентних методів використаємо метод стохастичної апроксимації [11]. Для цього допустимо, що математичні сподівання випадкових величин відомі $M\{\zeta_n^i(x)\} = v^i(x)$ для всіх $x \in X$. Тоді функцію середніх виграшів обчислюють так:

$$V^i(p) = \sum_{x \in X} v^i(x) \prod_{j=1}^m p^j(x^j), \quad (14)$$

де $p \in S$, $x^j \in X$, $i = \overline{1, m}$.

Враховуючи специфіку організації пошукового простору, яка проявляється у тому, що втрати i -го гравця не залежать від стратегій усіх інших гравців, функції (14) запишемо так:

$$V^i(p^i) = \sum_{x^i \in X^i} v^i(x^i) p^i(x^i). \quad (15)$$

Мета матричної гри полягає у мінімізації функцій середніх виграшів (15):

$$V^i(p^i) \rightarrow \min_{p^i} , p^i \in S_{\varepsilon}^{N_i}, i = \overline{1, m}. \quad (16)$$

З класу можливих методів досягнення мети (16) використаємо градієнтний метод. Нехай $M\{R_n | p_n^i = p^i\} = \nabla_{p^i} V^i$. Тоді умова псевдоградієнтності (12) для функції Ляпунова (13) матиме вигляд

$$V^i(p^i) - V^i(p^{i*}) \geq 0. \quad (17)$$

Оскільки $V^i(p^{i*}) = \min_{p^i} V^i(p^i)$, то умова (17) виконується для всіх $p^i \in S^{N_i}$.

Враховуючи, що $\nabla_{p^i} V^i = M \left\{ \frac{\zeta_n^i}{e^{N_i(x_n^i)} p_n^i} e(x_n^i) \mid p_n^i = p^i \right\}$, де $e(x_n^i)$ – одиничний вектор-

індикатор вибору чистої стратегії $x_n^i = x^i \in X$ у момент часу n , на основі методу стохастичної апроксимації [11] отримаємо рекурентний ігровий метод [7, 8]:

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i} \left\{ p_n^i - \gamma_n \frac{\zeta_n^i}{e^{N_i(x_n^i)} p_n^i} e(x_n^i) \right\}. \quad (18)$$

Інші ігрові методи, побудовані на основі умови доповняльної нежорсткості, одержано в [9, 10].

Для дослідження збіжності ігрового методу можна прийняти, що

$$\gamma_n = \gamma_0 n^{-\alpha}, \quad \varepsilon_n = \varepsilon_0 n^{-\beta}, \quad (19)$$

де $\gamma_0, \alpha, \beta > 0$, $\varepsilon_0 \in (0, \min_i N_i^{-1})$.

Метод (18) забезпечує з імовірністю 1 виконання умови асимптотичної збіжності:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\Phi_n^i(\tilde{x}_n^i) - \Phi_n^i(x_n^i)) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (V^i(\tilde{p}_n^i) - V^i(p_n^i)) \geq 0,$$

де $\tilde{x}_n^i \in X^i$, $\tilde{p}_n^i \in S^{N_i}$. Доведення збіжності виконано у [7] на основі оцінювання рекурентних числових послідовностей [12].

У класі послідовностей величин (19) збіжність методу (18) відзначається у разі виконання умови $0 < \beta < \alpha < 1$. Максимальний порядок швидкості збіжності становить $\theta = 1/3$, що спостерігається при $\alpha = 2/3$, $\beta = 1/3$. Можливість досягнення максимального порядку визначається належним підбором початкових значень параметрів методів γ_0 та ε_0 .

Ігровий алгоритм випадкового пошуку. Ігровий алгоритм керування випадковим процесом в умовах дії відносних завад складається з таких кроків.

Крок 1. Ініціалізація методу. Задати кількість гравців m , початкові значення параметрів ігрового методу $\gamma_0, \alpha, \varepsilon_0, \beta$, які задовольняють умови асимптотичної збіжності, та початкові значення векторів змішаних стратегій p_0^i , $i = \overline{1, m}$. Вектори змішаних стратегій можуть набувати довільні значення на одиничному ε -симплексі ($\varepsilon > 0$). В початковий момент часу доцільно задати $p_0^i(j) = 1/N_i$; $j = \overline{1, N_i}$; $i = \overline{1, m}$. Задати момент часу $n = 1$.

Крок 2. Вибір чистих стратегій гравців та визначення координат керованого процесу. Для кожного гравця $i = \overline{1, m}$ згенерувати випадкове число ω , розподілене за рівномірним законом на відрізку $[0, 1)$, та визначити номер k чистої стратегії з виконання умови

$$\min_k \sum_{j=1}^k p_n^i(j) \geq \omega, \quad k = \overline{1, N_i}.$$

За номером чистої стратегії визначити i -ту координату випадкового процесу. Якщо ширина простору по i -му координатному напрямку визначена у діапазоні $[a^i, b^i]$, то для рівномірного кроку $h^i = (b^i - a^i)/N_i$ значення координати визначається так: $x^i = a^i + (k-1)h^i$. Для нерівномірного кроку значення x^i можна прочитати з допоміжного масиву координат.

Крок 3. Визначення координат некерованого процесу. Координати некерованого процесу y^i визначають як випадкові величини, розподілені за нормальним законом з математичним

сподіванням m_y^i та дисперсією d_y^i . Нормально розподілені випадкові величини можна обчислити як суму дванадцяти рівномірно розподілених величин:

$$y^i = m_y^i + \sqrt{d_y^i} \left(\sum_{j=1}^{12} \omega_j - 6 \right),$$

де $\omega \in [0,1)$ – випадкове число, розподілене за рівномірним законом.

Крок 4. Визначення поточних втрат гравців. Поточні втрати ζ_n^i визначаються згідно із (4) як відстань ξ_n^i між керованим та некерованим процесами по i -му координатному напрямку, модифікована відносними завадами μ_n^i (5). Інтенсивність завад визначається згідно із (6) – для зростаючої або згідно із (7) – для спадної амплітуди завад.

Крок 5. Зміна регульованих параметрів алгоритму. Обчислити значення параметрів $\gamma_n = \gamma_0 n^{-\alpha}$, $\varepsilon_n = \varepsilon_0 n^{-\beta}$ у момент часу n .

Крок 6. Перерахунок елементів векторів змішаних стратегій. Обчислення нових векторів змішаних стратегій здійснюється за рекурентним перетворенням (18), після чого виконується їхнє проектування на одиничний ε -симплекс (8), яке зводиться до ітераційної процедури проектування вектора на одиничну гіперплощину з подальшим зануленням його від'ємних компонентів [7].

Крок 7. Перевірка умови закінчення гри. Момент закінчення гри може бути визначений однією з таких умов:

- 1) у разі повного збігу координат процесів, тобто $\xi_n^i = 0$ для всіх $i = \overline{1, m}$;
- 2) коли поточна відстань між процесами є меншою від заданої величини $r > 0$, тобто

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (\xi_n^i)^2} < r;$$

- 3) при незначній зміні векторів змішаних стратегій за два послідовні моменти часу, тобто коли

$$m^{-1} \sum_{i=1}^m \|p_{n+1}^i - p_n^i\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0;$$

- 4) при досягненні заданої кількості кроків n^* , тобто при $n = n^*$.

Якщо умова не виконана, то задати $n = n + 1$ і перейти на крок 2, інакше – на крок 8.

Крок 8. Виведення координат керованого процесу. Кінець.

Результати комп'ютерної реалізації. Для забезпечення достовірності комп'ютерного експерименту обчислення координат керованого процесу, для яких виконується умова закінчення пошуку, виконано за $t=100$ реалізаціями пошукового алгоритму. Середні значення координат обчислюються так:

$$\bar{x}^i = t^{-1} \sum_{j=1}^t x^i(j), \quad i = \overline{1, m}.$$

Ефективність пошукових методів визначається середньою кількістю ітерацій

$$\bar{n} = t^{-1} \sum_{j=1}^t n(j) \quad (20)$$

та середньою відстанню від фронту керованого процесу до точки математичного сподівання некерованого процесу на момент закінчення гри:

$$s = \|\bar{x} - m_y\|. \quad (21)$$

Виконаємо дослідження впливу відносної інтенсивності завад та розмірності пошукового простору на ефективність адаптивного ігрового методу (18) із значеннями параметрів $\alpha = 2/3$, $\beta = 1/3$, $\gamma_0 = 0.01$, $\varepsilon_0 = 0.999N^{-1}$. Ці значення забезпечують максимальний порядок швидкості збіжності ігрового методу.

Розмірність пошукової задачі визначається кількістю вимірів m та шириною N_i ($i = \overline{1, m}$) дискретного пошукового простору. Прийmemo, що $N_i = N$ для всіх $i = \overline{1, m}$.

Нехай координати некерованого процесу задаються нормальним випадковим розподілом $y \sim Normal(m_y, d_y)$, де $y \in R_+^m$. Траєкторія процесу не може вийти за межі досліджуваної області, тобто $y \in X$. Значення математичного сподівання координат процесу $m_y = (m_y(j) | j = \overline{1, m}) = const$ отримано за допомогою генератора випадкових величин, розподілених за рівномірним законом $m_y(j) \sim Random(N_i) + 1$, $j = \overline{1, m}$. Так, при $m = 5$ та $N = 10$, маємо $m_y = (7, 1, 3, 1, 7)$. Для менших значень m математичне сподівання координат некерованого процесу визначається першими елементами вектора m_y . Дисперсія некерованого процесу набуває фіксованого значення $d_y = 1$.

Випадкові завади отримано як нормально розподілені випадкові величини $\psi_n^i \sim Normal(0, \sigma^2)$ з нульовим математичним сподіванням та дисперсією $\sigma^2 = 1$ (білий шум). Інтенсивність завад є лінійною функцією $h(\xi_n^i)$ поточної відстані ξ_n^i між фронтами випадкових процесів. Виконано моделювання завад із лінійно зростаючою (6) та спадною (7) інтенсивностями.

Момент закінчення пошуку визначено диз'юнкцією умов 1 та 3 кроку 7 ігрового алгоритму, що дало змогу скоротити кількість пошукових кроків (порівняно з використанням тільки умови 1, яка задає точний збіг фронтів випадкових процесів) без втрати середньої точності локалізації об'єкта. В умові 3 середнє значення норми відхилення вектора змішаної стратегії за один крок ігрового методу дорівнює 10^{-6} .

Результати моделювання впливу відносних завад на збіжність ігрового пошукового методу (18) при $N = 10$ та зростанні кількості вимірів пошукового простору зображено на рис. 1. Прийнято, що значення коефіцієнта підсилення завади $k = 1$.

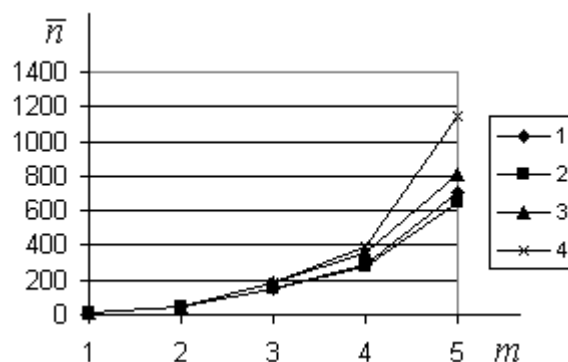


Рис. 1. Залежність середньої кількості пошукових кроків \bar{n} від кількості вимірів пошукового простору m для експериментів без підсилення завади

На рис. 1 і далі графік 1 відповідає експерименту без дії завад, графік 2 отримано для стаціонарних завад $h(\xi_n^i) = 1$, графік 3 – для відносних завад з лінійно спадною інтенсивністю $h(\xi_n^i) = k\xi_n^i$, графік 4 – для відносних завад з лінійно зростаючою інтенсивністю $h(\xi_n^i) = k(\xi_{\max}^i - \xi_n^i)$.

Середня похибка (21) розв'язування задачі, отримана при виконанні вищевказаних умов закінчення пошуку, залежить від розмірності пошукового простору. Відповідний графік, зображений на рис. 2, є однаковим для усіх розглянутих варіантів експерименту.

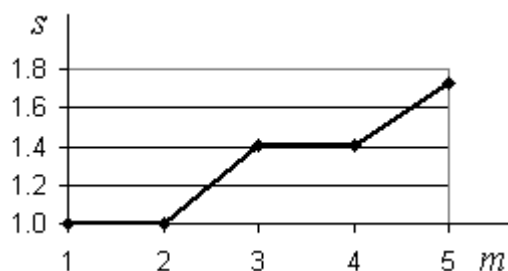


Рис. 2. Зміна середньої похибки випадкового пошуку s при зростанні кількості вимірів пошукового простору m

З рис.1 видно, що адаптивний ігровий метод (18) забезпечує розв'язування задачі керування випадковим процесом як для лінійно зростаючої, так і для лінійно спадної інтенсивностей завод. При зростанні кількості вимірів пошукового простору збільшується кількість пошукових варіантів. В результаті зростає кількість кроків ігрового методу, необхідних для розв'язування пошукової задачі.

При дії відносних завод вимагається більша кількість кроків для локалізації шуканого випадкового процесу, ніж при дії завод зі сталою інтенсивністю або за їхньої відсутності.

Зростання інтенсивностей завод при наближенні випадкових процесів призводить до більшого спотворення поточних втрат гравця (відстані між фронтами випадкових процесів). Зменшення інтенсивностей завод при зближенні процесів призводить до зменшення спотворення поточних втрат. Це дає змогу керованому процесу (гравцю) отримувати достовірніші дані про відстань до некерованого процесу. Наслідком цього є те, що для розв'язування пошукової задачі із спадною інтенсивністю заводи вимагається менша кількість кроків ігрового методу, ніж для задачі із зростаючою інтенсивністю заводи. Однак цей висновок справедливий тільки для експериментів без підсилення заводи ($k = 1$).

На рис. 3 зображено результати експериментів із збільшеною у $k = 5$ разів інтенсивністю завод.

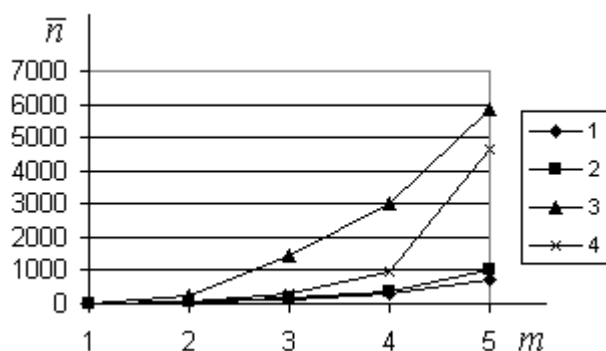


Рис. 3. Залежність середньої кількості пошукових кроків \bar{n} від кількості вимірів пошукового простору m для експериментів з підсиленням заводи

Як видно із графіків рис. 3, при зростанні коефіцієнта підсилення відносних завод ефективність пошуку в умовах дії завод із спадною інтенсивністю погіршилася порівняно з експериментом із зростаючою інтенсивністю завод. Пояснення цього криється в особливостях побудови та роботи ігрового методу. Спочатку ігровий метод не навчений. Імовірності вибору чистих стратегій є однаковими. Навчання полягає у зміні цих імовірностей залежно від значення поточних втрат. Втрати є пропорційними до відстані між фронтами випадкових процесів, яка спотворюється дією відносної заводи. При збільшеному коефіцієнті підсилення заводи початкова

фаза навчання ігрового методу відбувається з більшим кроком. Згідно із (11) та (19), в ході навчання ігрового методу значення кроку зменшується. Тому вплив спотворених втрат на початку роботи ігрового методу є більшим, ніж на його середньому або завершальному етапах. В результаті формується початковий неоптимальний розподіл імовірностей вибору чистих стратегій гравців, на перебудову якого тратиться додаткова кількість кроків.

Вплив значення коефіцієнта підсилення завади на ефективність пошукових експериментів, побудованих на основі ігрового методу (18), детальніше проілюстровано на рис. 4. Результати отримано для пошукового простору з $m = 2$ вимірами та $N = 10$ станами по кожному виміру.

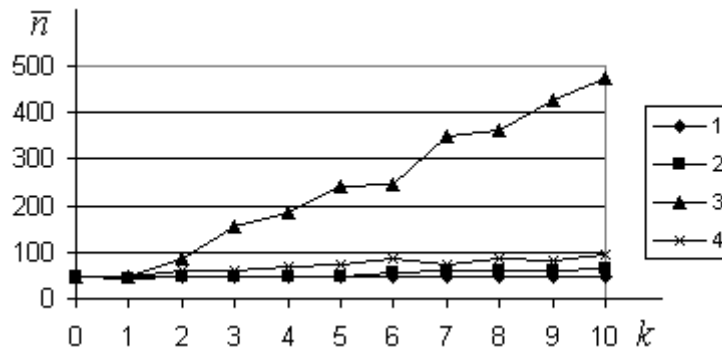


Рис. 4. Залежність середньої кількості пошукових кроків \bar{n} від коефіцієнта підсилення завади k

Дія відносних завад на ефективність роботи ігрового методу (18) при різних значеннях ширини пошукового простору зображено у вигляді графіків на рис. 5 для $m = 2$ та $k = 1$. Параметри ігрового методу набувають значення $\alpha = 2/3$, $\beta = 1/3$, $\gamma_0 = 0.01$, $\varepsilon_0 = 0.999N^{-1}$. Середня похибка фінального наближення випадкових процесів для усіх варіантів дорівнює $s=1.41$.

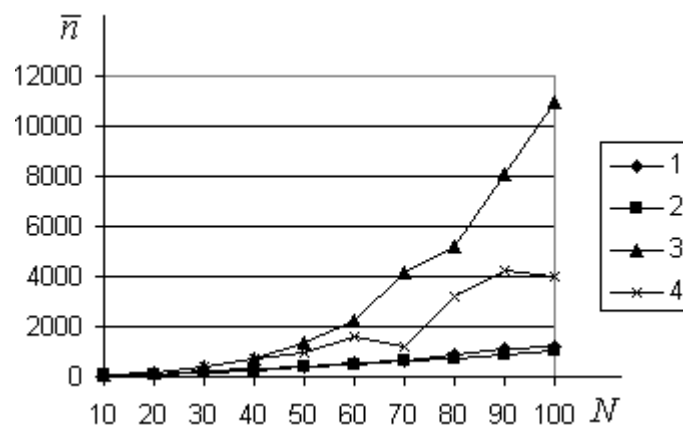


Рис. 5. Залежність середньої кількості пошукових кроків \bar{n} ігрового методу (18) з параметрами $\alpha = 2/3$, $\beta = 1/3$ від ширини пошукового простору N

Ширина пошукового простору визначається кількістю дискретних координат по кожній координатній осі. Із зростанням ширини зростає кількість комбінованих станів пошукового простору. Як видно із рис. 5, це призводить до зростання кількості кроків ігрового методу, необхідних для розв'язування пошукової задачі.

При зростанні ширини пошукового простору зростає поточна відстань між фронтами випадкових процесів і, відповідно, значення поточних втрат. В результаті початкове значення кроку ігрового методу буде великим, що призведе до формування неефективних змішаних стратегій на початковій фазі навчання. Тоді, навіть за відсутності підсилення, дія відносної завади із спадною інтенсивністю буде мати гірший вплив на збіжність ігрового методу, ніж дія завади із зростаючою інтенсивністю.

Для надання переваги ігровому методу із лінійно спадною інтенсивністю завади необхідно зменшити початкове значення кроку ігрового методу. Це можна виконати за допомогою регульованих параметрів $\gamma_n = \gamma_0 n^{-\alpha}$ та $\varepsilon_n = \varepsilon_0 n^{-\beta}$, збільшивши значення коефіцієнтів α та (або) β з дотриманням умов збіжності ігрового методу. Результати експерименту для $\alpha = 0,9$, $\beta = 0,5$ зображено на рис. 6.

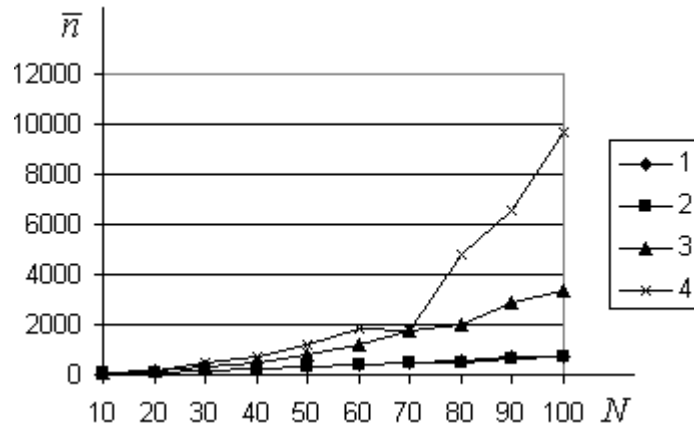


Рис. 6. Залежність середньої кількості пошукових кроків \bar{n} ігрового методу (18) з параметрами $\alpha = 0,9$, $\beta = 0,5$ від ширини пошукового простору N

Аналіз графіків рис. 6 показує, що зменшення кроку ігрового методу призвело до покращання ефективності розв'язування пошукової задачі з лінійно спадною характеристикою відносних завад.

На рис. 7 зображено графіки, що демонструють збіжність ігрового методу (18) для значень параметрів $m = 2$, $N = 10$, $k = 1$, $\alpha = 0,9$, $\beta = 0,5$, $\gamma_0 = 0,01$, $\varepsilon_0 = 0,999N^{-1}$ при зменшенні інтенсивності відносних завад.

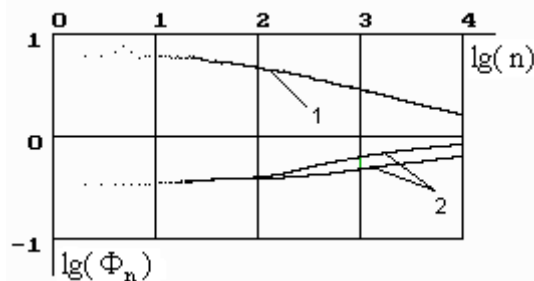


Рис. 7. Збіжність ігрового методу (18)

Графік 1 демонструє зменшення функції середніх втрат в ході керування випадковим процесом. Графіки 2 ілюструють зміну норми векторів змішаних стратегій гравців. Зростання норми векторів змішаних стратегій від початкових однакових значень елементів (імовірностей вибору чистих стратегій) свідчить про хід навчання ігрового методу.

Випадковий процес, керований за допомогою ігрового методу (18), в ході наближення до оптимуму набуває стохастичних характеристик некерованого процесу, що видно із рис. 8, на якому зображено імовірності дискретного розподілу координат керованого та некерованого процесів без дії завад. Подібні розподіли отримують також при дії завад з постійною, зі спадною та зі зростаючою інтенсивностями. Результати отримано для ігрового методу (18) з параметрами $m = 2$, $N = 10$, $k = 1$, $\alpha = 2/3$, $\beta = 1/3$, $\gamma_0 = 0,01$, $\varepsilon_0 = 0,999N^{-1}$ на вибірці $n=10000$ кроків з ігноруванням умов 1 – 3 зупинки гри, визначених у кроці 7 ігрового алгоритму. На обох діаграмах ліві стовпчики позначають імовірності (точніше, відносні частоти) значень координат некерованого, а праві – керованого процесів. Моді розподілу керованого та некерованого випадкових процесів відповідають координатам точки математичного сподівання (7, 1) шуканого

некерованого процесу. Середньоквадратичні відхилення зображених на рис. 8 розподілів випадкових процесів по осі X_1 та X_2 відповідно дорівнюють 0.14 та 0.3.

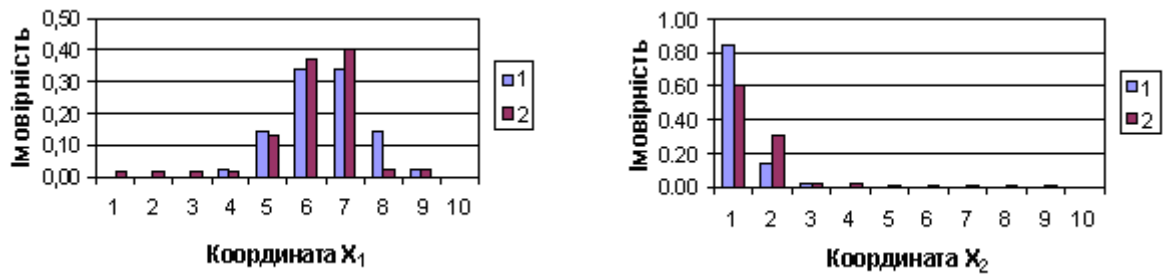


Рис. 8. Дискретний розподіл координат випадкових процесів:
1 – некерований; 2 – керований

Узагальнення результатів моделювання підтверджує ефективність застосування адаптивного ігрового методу (18) для розв'язування задачі керування випадковим процесом при дії відносних завад та великій розмірності пошукового простору. Ігровий метод забезпечує розв'язування розглянутої пошукової задачі у декілька разів швидше ніж метод рівномірного вибору варіантів, ефективність якого є пропорційною до загальної кількості пошукових варіантів N^m (при $N_i = N$ для всіх $i = \overline{1, m}$).

Кількість вимірів пошукового простору m має більший вплив на роботу пошукових методів, ніж його ширина N . Це пояснюється тим, що загальна кількість варіантів пошуку є показниковою функцією кількості вимірів m і степеневою функцією ширини N пошукового простору.

Висновки. Ефективне керування випадковими процесами за умови дії відносних завад в умовах невизначеності може бути виконано за допомогою адаптивних ігрових методів за рахунок розпаралелювання та самонавчання на основі динамічних векторів змішаних стратегій.

Відносні завади призводять до формування ускладнених режимів випадкового пошуку, що проявляється у зростанні кількості кроків порівняно з режимами дії стаціонарних завад або за їхньої відсутності. Збіжність ігрових методів в умовах відносних завад залежить від розмірності пошукового простору, коефіцієнта підсилення завади та параметрів конкретного ігрового методу.

Розроблений ігровий алгоритм керування випадковими процесами є універсальним і може бути використаний для розв'язування задач стохастичної оптимізації розподілених або багатопараметричних систем в умовах дії відносних завад з апіорі невідомими характеристиками.

1. Растрингін Л.А., Рипа К.К., Тарасенко Г.С. Адаптація случайного поиска. – Рига: Зинатне, 1973.
2. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования. – М., 1984.
3. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М., 1983.
4. Муртазин Д.А., Позняк А.С. Рекуррентные алгоритмы поисковой оптимизации в условиях относительных помех. Предельные возможности // Автоматика и телемеханика. –1987. – № 9. – С. 95–109.
5. Срагович В.Г. Адаптивное управление. – М., 1981.
6. Цыпкин Я.З. Основы теории обучающихся систем. – М., 1970.
7. Назин А.В., Позняк А.С. Адаптивный выбор вариантов: Рекуррентные алгоритмы. – М., 1986.
8. Кравець П.О. Збіжність ігрового градієнтного методу у знакододатних середовищах // Інформаційні системи та мережі: Вісник НУ “Львівська політехніка”. – 2001. – № 438. – С. 83–89.
9. Кравець П.О. Рекуррентні ігрові алгоритми з обміном інформацією // Інформаційні системи та мережі: Вісник ДУ “Львівська політехніка”. – 1999. – № 383. – С. 112–128.
10. Кравець П.О. Регуляризований ігровий метод керування випадковими процесами в умовах невизначеності // Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології: Вісник НУ “Львівська політехніка”. – 2002. – № 468. – С. 101 – 109.
11. Вазан М. Стохастическая аппроксимация. – М., 1972.
12. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая оптимизация и рекуррентное оценивание. – М., 1972.