

МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ ПРОЕКТУВАННЯ

УДК 517.982.254

О.Є. Пляцек

Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова

ЕФЕКТИВНІ АЛГОРИТМИ ОБРОБКИ ВУЗЬКОСМУГОВИХ СИГНАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ОДНОПАРАМЕТРИЧНОЇ СІМ'Ї НЕПЕРЕРВНИХ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕНЬ

© Пляцек О.Є., 2005

Запропоновано швидкий алгоритм апроксимації часового ряду дискретної функції, у якому час обчислення не залежить від довжини «згладжування». Розглядається однопараметричне, неперервне вейвлет-перетворення, у якому час обчислення пропорційний до першого ступеня кількості дискретних відліків у вихідному часовому ряді за будь-якого значення масштабувального фактора.

A fast smoothing algorithm is proposed, in which computing time is independent on smoothing length. In addition, a continuous wavelet transform is suggested, which computing time is proportional to the first power of the discret-signal length at each value of the scale factor.

Предмет аналізу часових рядів тісно зв'язаний із широким колом питань, серед яких не можна не назвати статистичну теорію зв'язку, теорію прогнозування й автоматичного управління, як і багато інших наук, у яких інтерполяція, фільтрація й апроксимація сигналу відіграє основну роль у процесі наукових вишукувань. Статистичні дослідження в цих напрямках завжди базуються на розумінні структури випадкового процесу, що дає класична теорія Н. Вінера – А.М. Колмогорова.

За час, що пройшов від публікації робіт Н. Вінера з аналізу часових рядів [1], виявилися труднощі спектрального аналізу в “коротких (нестационарних) вікнах” [2] і з'явився новий напрямок – вейвлет-аналіз [3]. Дискретні вейвлет-перетворення виконуються порівняно швидко, але, на наш погляд, не знаходять застосування у практично важливих випадках аналізу та обробки порівняно вузькосмугових сигналів (ширина спектра – кілька октав), через іманентне подвоєння частот. Головним недоліком неперервних вейвлет-перетворень (та їхніх обернень) є обчислювальна трудомісткість.

Метою цієї роботи є запропонувати ефективно обчислюване, однопараметричне, неперервне вейвлет-перетворення, назване згодом “M – wave”.

1. Нехай u_k , $k = 1 \dots n$ – заданий часовий ряд. Розглянемо перетворення, задане оператором S_τ , таке, що $S_\tau[u] = v$, якщо

$$\begin{cases} 2\tau^2 v_k - \tau^2(v_{k+1} + v_{k-1}) + v_k = u_k, & k = 2 \dots n-1, \\ v_1 = v_2, & v_n = v_{n-1}. \end{cases} \quad (1)$$

Відомо, що оператор S_τ , реалізований “прогоном” при кожному τ , є за цих умов таким, що згладжує [5]. Неперервним аналогом рівняння (1) є в контрольованих межах наближення диференціальне рівняння

$$-\tau^2 v'' + v = u. \quad (2)$$

Починаючи перетворення Фур'є функції $v(t)$ з (2), неважко одержати її вираз у спектральній області як

$$\hat{v}(\omega) = \hat{u}(\omega) / (1 + \tau^2 \omega^2). \quad (3)$$

Тут оператор $(1 + \tau^2 \omega^2)^{-1}$, який придушує високі частоти, у часовій області може бути представлений у вигляді згортки з відомою ненегативною функцією [6]

$$\begin{aligned} s(t) &= (2\pi)^{-1} \int \exp(-i\omega t) (1 + \tau^2 \omega^2)^{-1} d\omega = i \operatorname{res}_{\omega=i \operatorname{sgn}(t)/\tau} \exp(-i\omega t) (1 + \tau^2 \omega^2)^{-1} = \\ &= \exp(-|t|/\tau) / (2\tau). \end{aligned} \quad (4)$$

Отже, ми маємо оператор (приблизно «трикутного» вигляду) згладжування, обчислювальна складність якого не залежить від довжини згладжування τ і пропорційна до першого ступеня кількості дискретних відліків у вихідному ряді (при відповідному оберненні тридіагональної матриці системи (1)). Строго математичний аналіз показує, що апроксимація (1) фільтра (4) має трохи інший спектр. Підставляючи в рівняння (1) $u_k = \exp(ipk)$, де p є зсув фази при зрушенні на один дискретний відлік, (який дорівнює круговій частоті, якщо крок дискретизації, як у нашому випадку, є одиницею часу), маємо

$$v_k = \exp(ipk) / [2\tau^2(1 - \cos pk)].$$

Але за умови $|p| \ll 1$, як показує аналіз, така фільтрація апроксимується функцією $(\tau^{-2} p^{-2})$ з контрольованим ступенем точності, а за умови $\tau \cdot |p| \gg 1$ асимптотично збігається з фільтрацією (3). Отже, якщо наявні в сигналі частоти далекі від частоти Найквіста (скажімо, менше від половини цієї частоти, що досягається передискретизацією) і більші від частоти, що відповідає довжині згладжування, то перетворення (1) наближається до згладжування фільтром (4), або до «трикутного» фільтра. Ці умови саме легко реалізуються для порівняно вузькосмугових сигналів. Можна також довести, що матриця, обернена до матриці системи (1), за рахунок граничних умов Неймана [5], має тільки позитивні елементи при будь-яких n і τ , тобто згладжування буде відзначатися в будь-якому випадку, і навіть поблизу кінців інтервалу, хоча крайові ефекти спостерігаються при будь-якій фільтрації.

Ідея швидкого згладжування відома як регуляризуюче згладжування [4]. Згладжувати відношення функцій доцільно за один прохід розв'язання різницевих рівнянь. Для прикладу, на рис. 1 показано результат визначення миттєвої частоти $\Omega(t)$ (див. рис.3) модельні сигнали $u(t)$ не як $\Omega(t) = (S_\tau[u''] / S_\tau[u])^{1/4}$ [4], а з розв'язання аналогічної (1) системи рівнянь

$$\begin{cases} 2\tau^2 v_k - \tau^2 (v_{k+1} + v_{k-1}) + v_k u_k^2 = (u_{k+1} + u_{k-1} - 2u_k)^2, & k = 2 \dots n-1, \\ v_1 = v_2, & v_n = v_{n-1}, \end{cases}$$

(якщо $v = \Omega^4$) на основі перетворення Гільберта. При використанні перетворення Гільберта доводиться застосовувати 15-точкове згладжування для одержання правдоподібного результату («Antialiasing #2» – рис. 1), а наш метод при $\tau = 5$ на рис. 1 («Antialiasing #1»), очевидно, є кращою оцінкою.

2. Наведений вище алгоритм швидкого згладжування, очевидно, відповідає неперервному вейвлет-перетворенню з «вейвлетом» типу $e^{-|t|}$. На жаль, його похідна має розрив першого роду в нульовій точці і тому застосування $e^{-|t|}$ як вейвлета непродуктивне саме для вузькосмугових сигналів. Тому ми пропонуємо модифікований вейвлет («M – wave»), що неперервно диференціюється, має вузький спектр, а обернений до M – вейвлета фільтр забезпечує обчислювальну ефективність перетворення. Розглянемо сім'ю

$$m_q(t) = (2\pi)^{-1} e^{-q|t|} (q \sin(2\pi t) + 2\pi \cos(2\pi t)). \quad (5)$$

Очевидно, що додатковий параметр q визначає взаємозалежні між собою ширину спектра, довжину «пакета» і його добротність (рис. 2).

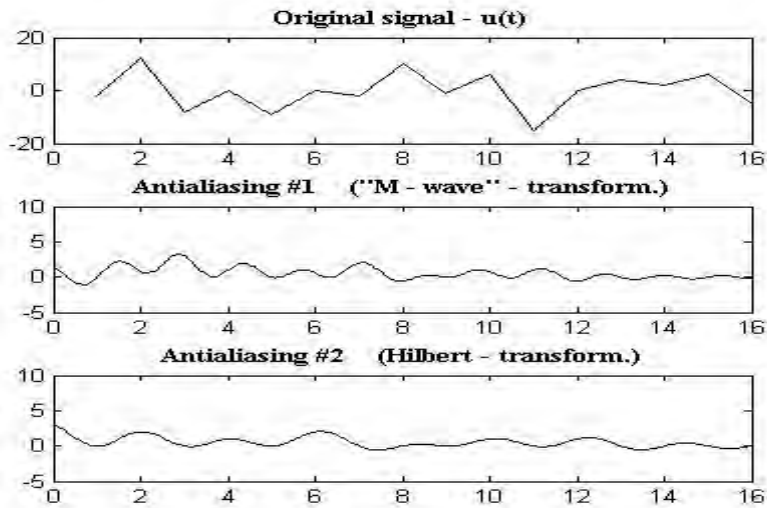


Рис. 1. Вузкосмуговий сигнал ("Original signal") і процес його швидкого згладжування ("Antialiasing #1") і згладжування з використанням перетворення Гільберта ("Antialiasing #2")

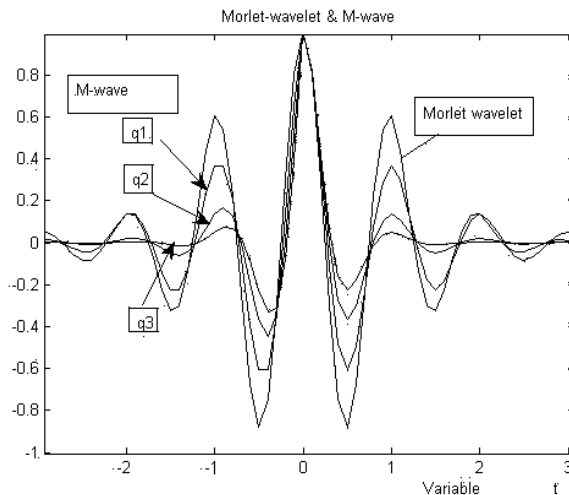


Рис. 2. *M*-вейвлети для $q = 1, 2$ і 3 порівняно з реальним вейвлетом Морлі - $\exp(-t^2/2)\cos 5x$ (стиснутий з коефіцієнтом -0.82 для коректного порівняння)

Вейвлет-перетворення визначається як

$$v_q(t, \tau) = M_q[u] = \tau^{-1/2} \int u(x) m_q\left(\frac{t-x}{\tau}\right) dx = \tau^{-1/2} u(t) \otimes m_q(t/\tau), \quad (6)$$

де оператор \otimes позначає операцію згортки по t .

Обчислюючи перетворення Фур'є, одержуємо

$$\int \exp(i\omega t) m_q(t/\tau) dt = \frac{4\tau q(q^2 + 4\pi^2)}{\tau^4 \omega^4 + 2\tau^2 \omega^2 (q^2 - 4\pi^2) + (q^2 + 4\pi^2)^2}. \quad (7)$$

Запишемо рівняння (6) у спектральній області

$$[\tau^4 \omega^4 + 2\tau^2 \omega^2 (q^2 - 4\pi^2) + (q^2 + 4\pi^2)] \cdot \hat{v}_q(\omega, \tau) = 4\sqrt{\tau} q \cdot (q^2 + 4\pi^2) \cdot \hat{u}(\omega). \quad (8)$$

Отже, вейвлет-перетворення (6) при будь-якому τ задовольняє рівняння четвертого порядку за змінною t

$$\tau^4 v_q^{(4)} - 2\tau^2(q^2 - 4\pi^2)v_q'' + (q^2 + 4\pi^2)^2 v = 4\sqrt{\tau}q(q^2 + 4\pi^2)u. \quad (9)$$

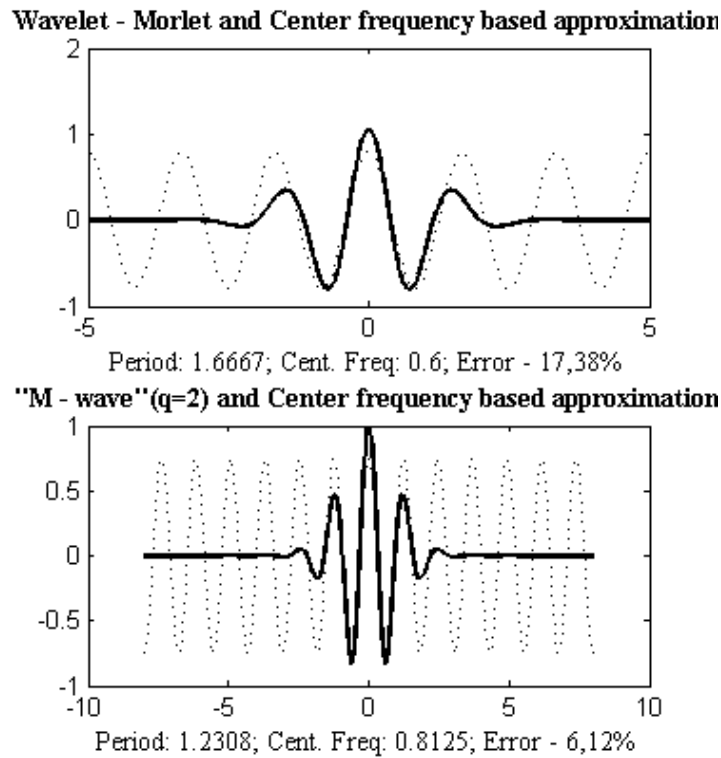


Рис. 3. Результати порівняльного аналізу обчислення миттєвої (центрованої для наочності) частоти згладжування: вейвлет Морлі (верхній рисунок) і запропонований "M-wave" (нижній рисунок)

Узявши скінченно-різницеву апроксимацію (9), будемо вважати при кожному τ дискретною реалізацією неперервного перетворення (6) систему рівнянь з п'ятидіагональною матрицею

$$\begin{cases} (v_{k+2} + v_{k-2}) \cdot \tau^4 - (v_{k+1} + v_{k-1}) \cdot [4\tau^4 + 2\tau^2(q^2 - 4\pi^2)] + \\ + v_k \cdot [6\tau^4 + 4\tau^2 \cdot (q^2 - 4\pi^2) + (q^2 + 4\pi^2)^2] = 4\sqrt{\tau}q(q^2 + 4\pi^2) \cdot u_k, \\ v_1 = u_1, \quad v_2 = u_2, \quad v_n = u_n, \quad v_{n-1} = u_{n-1}. \end{cases} \quad (10)$$

На відміну від (1), тут граничні умови узято для однозначного відновлення вихідного ряду при кожнім τ . Зворотнє перетворення виявляється взагалі тривіальним. У тих частих випадках, коли на кінцях інтервалу реєстрації сигнал перетворюється на нуль, вид граничних умов у (10) втрачає свій вплив на результат.

3. Порівняння роботи вейвлет-фільтрів здійснювалось на модельних вузькосмугових тест-сигналах (один з варіантів – див. рис. 4). Наприклад, сигнал, що відповідає рис. 4 – це сума двох синусоїд з частотами, які помітно відрізняються і різними амплітудами. Відношення частот вибрано так, щоб не виникала стійка інтерференція окремих компонентів, тобто ірраціональне число: $\sin(0,0368x) + 0,5\sin(0,3677x)$. На рис. 4 показано результат вейвлет-перетворень модельного сигналу з реальним вейвлетом Морлі і з М-вейвлетом.

Надалі до суми компонентів додавався білий гауссівський шум з відношенням сигнал/ шум близько (6 – 10)дБ за допомогою оператора "adwn" (Matlab 7) [7].

Для порівняння якості запропонованого вейвлет-перетворення з функцією "M-wave" з відомим неперервним вейвлет-перетворенням з функцією-аналогом – Морлі, було виконано імітаційне моделювання фільтрації зашумлених тест-сигналів, результати якого зображені на рис. 5. Обробка зашумлених тест-сигналів здійснювалась програмними засобами в середовищі Matlab 7.01 за однакових вихідних умов для обох порівнюваних вейвлет-функцій.

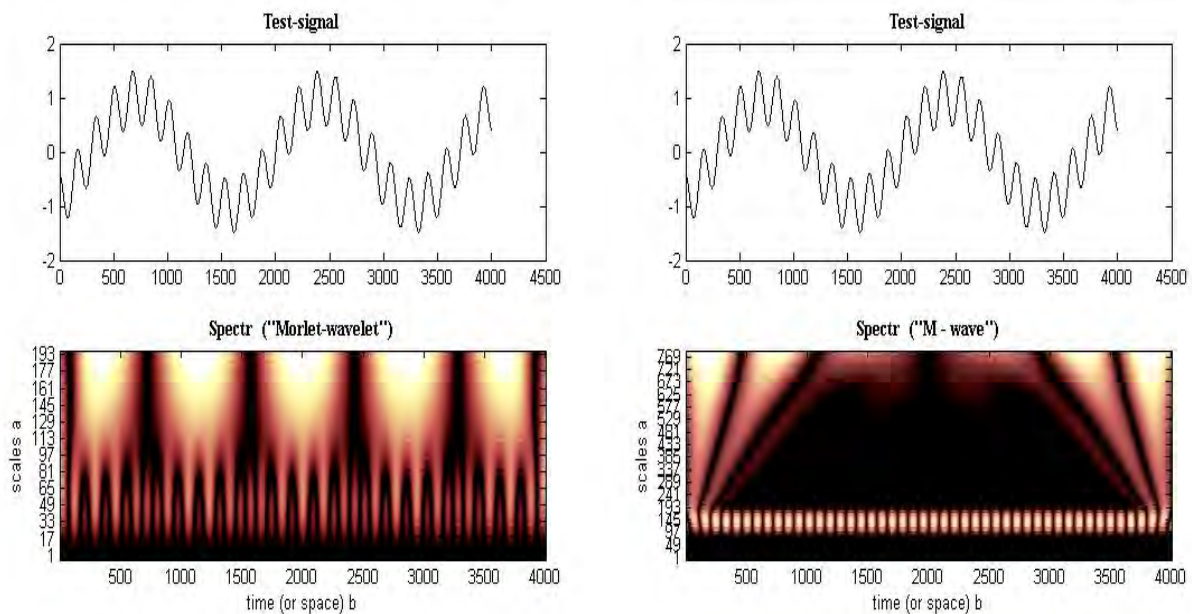


Рис. 4. Один із прикладів модельного тест-сигналу і відповідний йому вейвлет-спектр (унизу): ліворуч – перетворення з функцією Морлі, праворуч – перетворення за допомогою функції “M-wave” ($q=1$)

Висновки:

Запропонована однопараметрична сім'я вейвлет-перетворень на основі функції “M-wave”, як показують результати вищевикладених досліджень, має низку значних переваг порівняно з відомим вейвлет-перетворенням (аналогом) на основі функції Морлі для обробки вузькосмугових сигналів:

- основна перевага полягає у тому, що значно скорочується обсяг обчислень у нашому перетворенні;
- обсяг обчислень не залежить від масштабувального фактора τ і лінійно залежить від розмірності розв'язуваної задачі;
- запропонований у цій роботі “M-wave” (5) задовольняє вимоги відомої теореми Кальдерона –

Гросмана – Морлі [8], тому що функція – $m_q(t)$ є дійсною, а невласний інтеграл:
$$\int_0^{\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$$

(де $\psi(\omega)$ – Фур'є - спектр ортогонального базисного вейвлету “M – wave”; ω – циклічна частота), як показав аналіз, збігається. Доказом цього важливого фактора для присвоєння функції «звання» вейвлет-функції є побудована на рис. 6 у середовищі Matlab 7 підінтегральна функція нерівності Кальдерона;

- як показують рис. 2, 6, 7 і 8 “M-wave” ефективніше локалізований за часом і частотою порівняно з відомим вейвлетом Морлі, що відіграє найважливішу роль при виділенні конкретного масштабу, який характеризує проходження досліджуваного процесу, особливо коли в процесі беруть участь різномасштабні явища;
- простота просторово-часового обернення запропонованої однопараметричної сім'ї вейвлет-перетворень робить їх особливо привабливими для використання в різних практичних додатках.

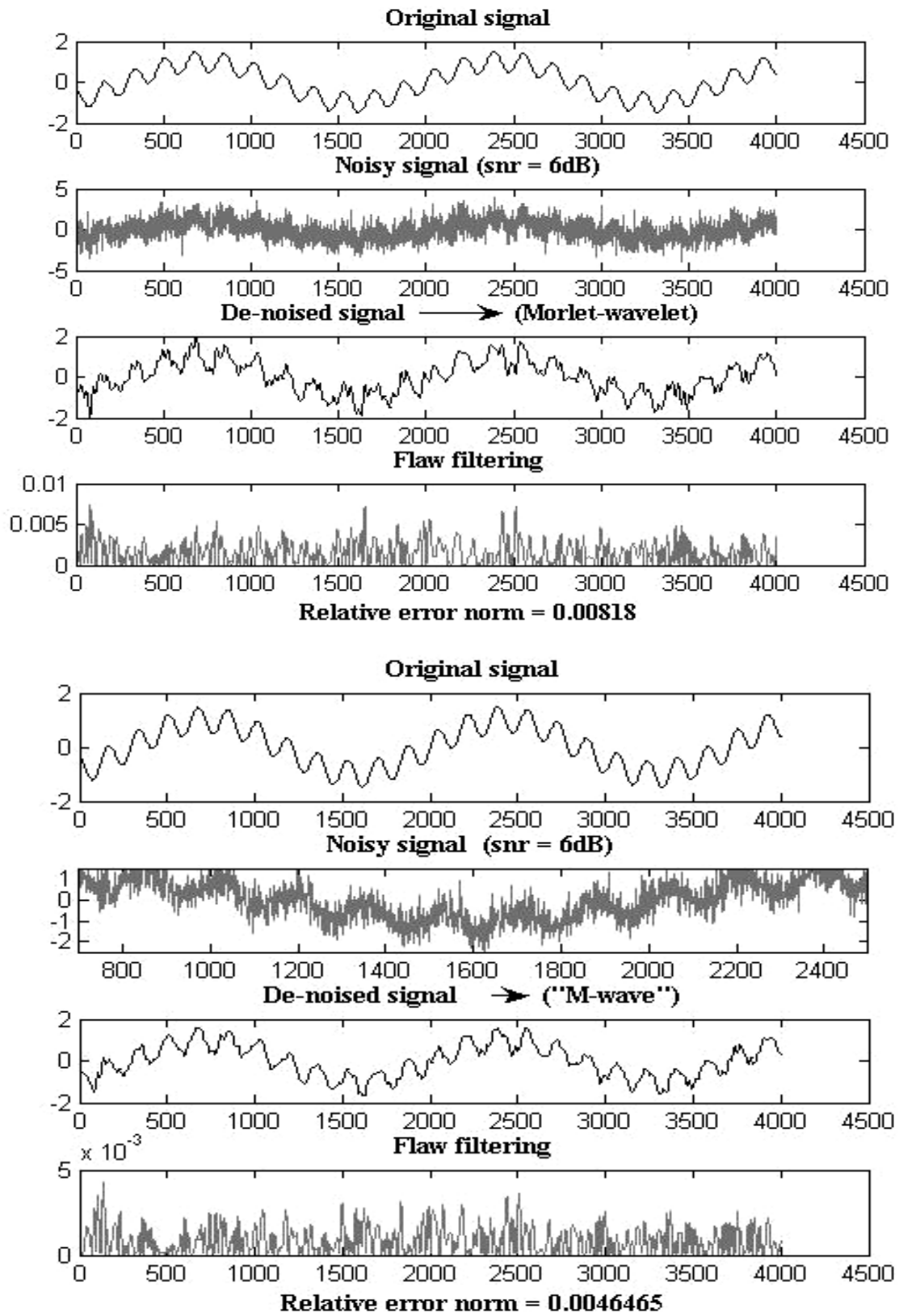


Рис. 5. Порівняння якості процесів фільтрації в програмному середовищі Matlab 7 вузькосмугових, зашумлених тест-сигналів за допомогою вейвлет-перетворень з використанням функції Морлі (зверху) і запропонованої функції "M-wave" (унизу)

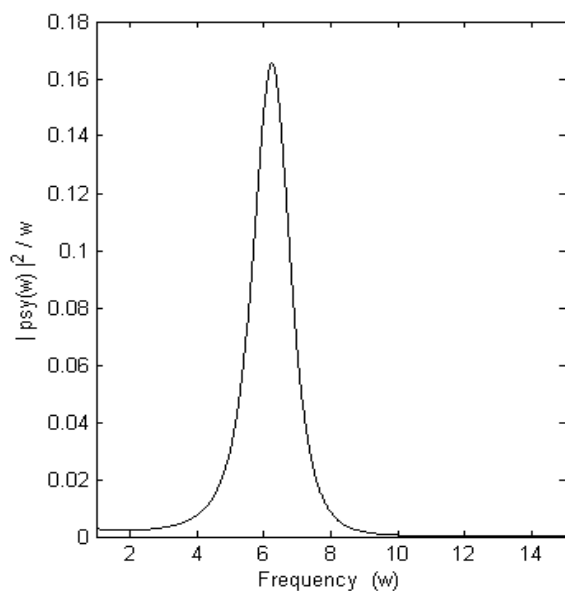


Рис. 6. Графік функції підінтегрального виразу нерівності Кальдерона для значення параметра $q=1$

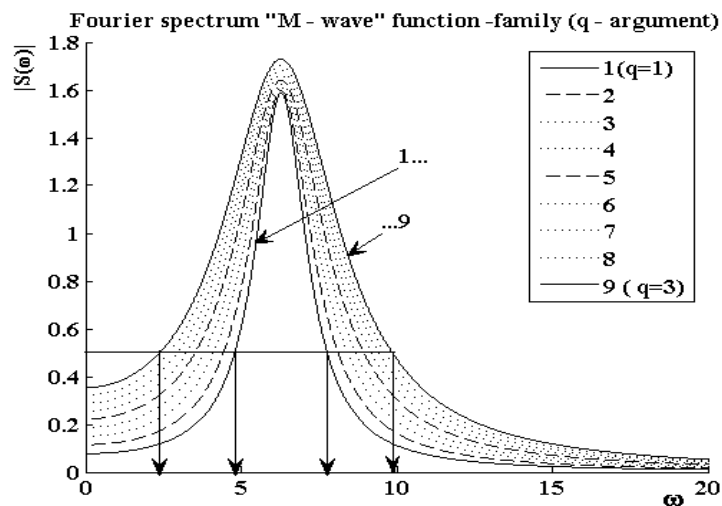


Рис. 7. Сім'я спектральних характеристик функції "M-wave" для параметра q

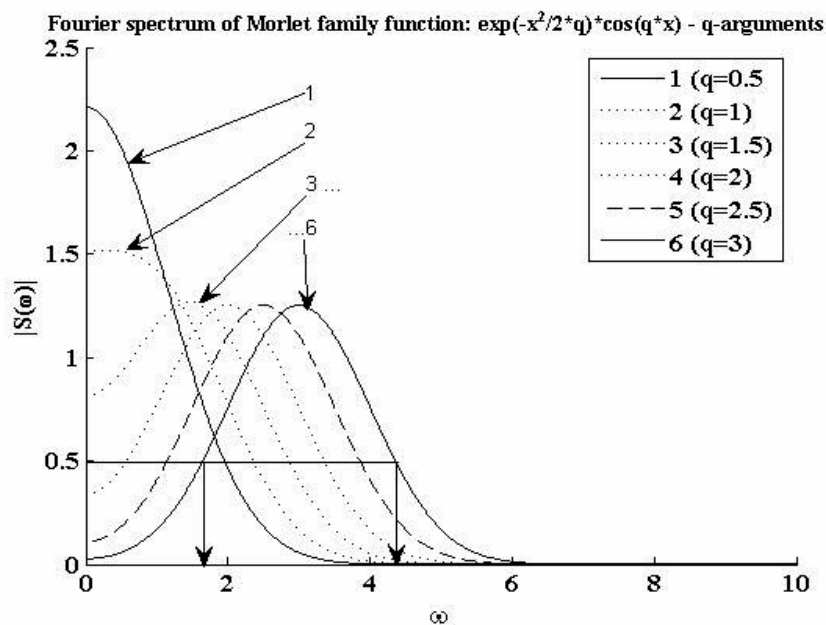


Рис. 8. Сім'я спектральних характеристик вейвлета Морлі для параметра q

1. Wiener N. *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series*. J. Wiley, New York, 1949. 2. Марпл С.Л. *Цифровой спектральный анализ и его приложения*. М., 1990. 3. Daubechies I. *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis*. IEEE Trans. on Information Theory, 1990, v. 36, № 5. 4. Masjukov A.V., Slyonkin V.I. *Time-varying time shifts correction by quasi-elastic deformation of seismic traces // Geophysical prospecting*, 2000, V.48, № 2. 5. Хэннан Э. *Многомерные временные ряды*. М., 1974. 6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М., 1987. 7. Дьяконов В.П. *Вейвлеты. От теории к практике. Изд.2-е, перераб. и доп.* - М., 2004. 8. Малла С. *Вейвлеты в обработке сигналов*. М., 2005.

УДК 004.942, 004.852

П.О. Кравець

Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра інформаційних систем та мереж

ІГРОВІ МЕТОДИ КЕРУВАННЯ ВИПАДКОВИМИ ПРОЦЕСАМИ В УМОВАХ ВІДНОСНИХ ЗАВАД

© Кравець П.О., 2005

Досліджується проблема керування випадковими процесами за допомогою адаптивних ігрових методів в умовах відносних завад, які є функцією поточної відстані між фронтами випадкових процесів. Розглянуто варіанти з лінійно зростаючою та спадною функціями інтенсивностей завад. Розроблено ігровий алгоритм та виконано програмне моделювання наближення керованого випадкового процесу до некерованого у дискретному просторі з евклідовою метрикою.

The problem of stochastic processes control by means of adaptive game methods in conditions of relative noises is investigated. The noises are function of line distance between fronts of stochastic processes. Is considered variants with linearly increasing and decreasing of noise intensity functions. The game algorithm is developed and the simulation program of approach of controlled stochastic process to uncontrolled process in discrete space with the Euclidean metrics is executed.

Вступ. Задачі багатокритеріальної оптимізації при дії випадкових завад з апіорі невідомими стохастичними характеристиками є актуальними для багатьох галузей практичних застосувань – автоматизованого проектування, радіотехніки, керування системами, ідентифікації, прийняття рішень тощо. Для їхнього розв'язування широко застосовують різноманітні пошукові методи [1, 2].

Для низки таких задач є характерним вплив відносних завад, які функціонально залежать від координат пошукового простору. Наприклад, при наближенні до оптимальних значень цільової функції інтенсивність завад може зростати або зменшуватися [3, 4].

Ефективність пошукових методів визначається середньою кількістю кроків, необхідних для розв'язання задачі. У класі пошукових методів найефективнішими є адаптивні методи, які виконують планування пошукових стратегій на основі інформації про передісторію [1, 5, 6]. Якщо кількість пошукових стратегій є скінченною, то для пошуку оптимальних розв'язків багатокритеріальних задач доцільно використати адаптивні ігрові методи [7–10].

У цій роботі вивчається ефективність адаптивних ігрових методів пошуку оптимальних розв'язків в умовах дії відносних завад. Метою роботи є дослідження впливу інтенсивності відносної завади та розмірності пошукового простору на швидкість збіжності ігрових методів.

Для практичної інтерпретації проблеми сформулюємо задачу наближення керованого випадкового процесу до некерованого у дискретному просторі.