ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
Вип.740 № 740, (2012) с. 34–37

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
“LVIVSKA POLITECHNIKA”
“Physical & mathematical sciences”
Vol.740 No 740, (2012) 34–37

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ПІВЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ, ЩО ВИРОДЖУЮТЬСЯ В ПОЧАТКОВИЙ МОМЕНТ ЧАСУ

М.М. Бокало

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська 1, 79000, Львів, Україна

(Отримано 22 жовтня 2011 р.)

Досліджено існування та єдиність розв’язків задачі без початкових умов для абстрактних півлінійних еволюційних рівнянь з операторами, які є інфінітезімальними генераторами сильно неперервних півгруп на банахових просторах. Розглянуті рівняння сильно вироджуються в початковий момент часу.

Ключові слова: задача без початкових умов, півлінійне еволюційне рівняння, півгрупа лінійних обмежених операторів в банаховому просторі.

2000 MSC: 34G20, 47D03

УДК: 517.95

Вступ

Еволюційні рівняння, що сильно вироджуються в початковий момент часу за рахунок занулення коефіцієнта при похідній за часовою змінною, виникають під час описування різних процесів у природі. Зауважимо, що сильне виродження лінійних рівнянь приводить до того, що стандартну початкову умову ставити не можна, а замість неї потрібно накладати певні обмеження на поведінку розв’язків, коли часова змінна прямує до початкового моменту. Вигляд цих обмежень вибирають таким, щоб забезпечити єдиність розв’язку рівняння, який підпадає під ці обмеження. Така ж ситуація і з багатьма нелінійними рівняннями. Але є такі нелінійні еволюційні рівняння, що сильно вироджуються в початковий момент часу і мають не більше одного розв’язку за відсутності будь-яких додаткових умов. Задачі на знаходження розв’язків еволюційних рівнянь з виродженням у разі певних обмежень на поведінку розв’язків, коли часова змінна прямує до початкового моменту, називають задачами без початкових умов. Такі задачі вивчали в багатьох роботах, серед яких [1–5]. Відмітимо, що ці задачі в певному сенсі еквівалентні задачам Фур’є (які також називають задачами без початкових умов) для еволюційних рівнянь, які задані на необмежених знизу часових проміжках [5–6]. Детальніше пояснення з цього приводу, а також достатньо повний огляд літератури, присвяченій цим задачам, наведено в роботі [4].

У згадуваній уже роботі [4] було досліджено задачі без початкових умов для еволюційних лінійних рівнянь у банаховому просторі, базуючись на теорії півгруп лінійних обмежених операторів. У праці [5], використовуючи результати роботи [4], досліджується задача Фур’є для півлінійних еволюційних рівнянь. Тут ми одержуємо результати, подібні до отриманих в [5], але для рівнянь, що сильно вироджуються в стаціонарні в початковий момент часу.

Структура роботи така. У першому пункті вводяться основні позначення і потрібні нам поняття та факти з теорії півгруп і векторних відображень. Формулювання задачі та основних результатів дається в другому пункті. У третьому пункті наведено обґрунтування основних результатів.

I. Вихідні положення

Введемо позначення і припущення, які будуть використовуватися протягом усієї роботи.

Нехай X – банахів простір з нормою $\|\cdot\|$; $\mathcal{L}(X)$ – простір лінійних обмежених операторів на X з операторною нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$ (який також є банаховим); $\{T(\tau)\,|\,\tau\geq 0\}$ – сильно неперервна півгрупа на X (див., наприклад, [7, 8]), тобто однопараметрична сім’я операторів з $\mathcal{L}(X)$, яка задовольняє умови: (i) $T(\tau_1+\tau_2)=T(\tau_1)T(\tau_2)$ для довільних $\tau_1,\ \tau_2\geq 0$; (ii) $T(0)=I$; (iii) $\lim\limits_{\tau\to 0+}T(\tau)x=x$ для довільного $x\in X$.

Нехай A – інфінітезімальний генератор півгрупи $\{T(\tau)\,|\,\tau\geq 0\}$ на X, тобто оператор $A:\mathcal{D}(A)\subset X\to X$ такий, що

$$\mathcal{D}(A)=\{x\in X:\lim_{h\to 0+}h^{-1}(T(h)x-x)\ \text{ існує}\},$$

$$Ax=\lim_{h\to 0+}h^{-1}(T(h)x-x),\ x\in\mathcal{D}(A).$$

Відомо, що множина $\mathcal{D}(A)$ є лінійною і всюди щільною в X та оператор A – лінійний і замкнений. В $\mathcal{D}(A)$ задається норма $\|x\|_{\mathcal{D}(A)}=\|x\|_X+\|Ax\|_X$, з якою цей простір є банаховим. Відмітимо, що коли $A\in\mathcal{L}(X)$, то $T(\tau)=I+\frac{\tau}{1!}A+\frac{\tau^2}{2!}A^2+...+\frac{\tau^k}{k!}A^k+...\equiv e^{\tau A}$, $\tau\geq 0$. Тому (як це часто роблять) цю півгрупу з інфінітезимальним генератором A (який не обов'язково належить $\mathcal{L}(X)$) позначатимемо через $\{e^{\tau A} \,|\, \tau \geq 0\}$.

Нехай $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ – сталі, для яких

$$\|e^{\tau A}\| \leq M e^{\omega\tau}, \quad \tau \geq 0. \tag{1}$$

Зауважимо, що для будь-якої сильно неперервної півгрупи $\{T(\tau) \equiv e^{\tau A} \,|\, \tau \geq 0\}$ на X виконується оцінка типу (1).

Позначимо $S := (0, T]$, де $T > 0$. Нехай φ – функція з простору $C([0, T])$, яка має властивості:
1) $\varphi(0) = 0$;
2) $\varphi(t) > 0$ при $t \in (0, T]$;
3) $\int_0^T [\varphi(s)]^{-1} ds = +\infty$.
Прикладом такої функції є t^α, $t \in [0, T]$, де $\alpha \geq 1$.

Приймемо

$$\psi(t) := \int_T^t \frac{d\theta}{\varphi(\theta)}, \quad t \in S. \tag{2}$$

Через ψ^{-1} позначимо обернену до ψ функцію і нехай $[\varphi]^{-1} := 1/\varphi$.

Введемо ще деякі потрібні нам нижче позначення і поняття.

Під $C(S; X)$ ($C^1(S; X)$) розумітимемо простір функцій, які визначені на S, приймають значення в X і є неперервними (неперервно-диференційовними).

Говоритимемо, що функція $f : S \times X \to X$ *задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом* (рівномірно стосовно першого аргументу), якщо існує стала $L \geq 0$ така, що для будь-яких $(t, x_1), (t, x_2) \in S \times X$ виконується нерівність

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

Найменшу із таких сталих L називають сталою Ліпшиця.

Нагадаємо (див., наприклад, [9]), що функція $S \times X \ni (t, x) \to f(t, x) \in X$ є *диференційовною в точці* $(\tilde{t}, \tilde{x})$, якщо існують $\frac{\partial f(\tilde{t},\tilde{x})}{\partial t} \in X$, $\frac{\partial f(\tilde{t},\tilde{x})}{\partial x} \in \mathcal{L}(X)$, $\mu : \mathbb{R} \times X \to X$ такі, що $\|\mu(h, z)\| = o(|h| + \|z\|)$ при $|h| + \|z\| \to 0$ і

$$f(\tilde{t} + h, \tilde{x} + z) - f(\tilde{t}, \tilde{x}) =$$

$$= \frac{\partial f(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial t} h + \frac{\partial f(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial x} z + \mu(h, z),$$

$$h \in \mathbb{R}, \ \tilde{t} + h \in S, \ z \in X.$$

Функція $S \times X \ni (x, t) \mapsto f(t, x) \in X$ називається *диференційовною*, якщо вона є диференційовною в кожній точці $(t, x) \in S \times X$, і *неперервно-диференційовною*, якщо, крім того, функції $S \times X \ni (x, t) \mapsto \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} \in X$, $S \times X \ni (x, t) \mapsto \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \in \mathcal{L}(X)$ є неперервними.

II. Формулювання задачі та основних результатів

Метою роботи є дослідження існування та єдиності слабких і класичних розв'язків задачі без початкових умов для еволюційних півлінійних рівнянь у банаховому просторі:

$$\varphi(t) u'(t) - A u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in S, \tag{3}$$

$$\sup_{t \in S} \|u(t)\| < \infty, \tag{4}$$

де $f : S \times X \to X$ – задана неперервна функція, а $u : S \to X$ – невідома функція.

Нижче цю задачу коротко називатимемо задачею (3), (4).

Означення 1. *Класичним розв'язком задачі (3), (4) називається функція $u \in C(S; \mathcal{D}(A)) \cap C^1(S; X)$, яка задовольняє рівняння (3) і умову (4).*

Поряд із задачею (3),(4) розглядатимемо інтегральне рівняння

$$u(t) = \int_0^t e^{(\psi(t) - \psi(s))A} f(s, u(s)) [\varphi(s)]^{-1} \, ds, \quad t \in S. \tag{5}$$

Означення 2. *Під розв'язком рівняння (5) розуміється функція $u \in C(S; X)$, яка задовольняє це рівняння.*

Означення 3. *Слабким розв'язком задачі (3), (4) називається функція $u \in C(S; X)$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (5) та задовольняє умову (4).*

Через $\overline{B_R}$ позначимо замкнену кулю $\{x \in X \big| \, \|x\| \leq R\}\}$ в X радіуса $R > 0$ з центром в точці 0.

Зв'язок між класичним і слабким розв'язками задачі (3), (4) встановлюється в такому твердженні.

Теорема 1. *Нехай функція $f : S \times X \to X$ – обмежена на $S \times \overline{B_R}$ для кожного $R > 0$, а також виконується умова*

$$\omega < 0\,. \tag{6}$$

Тоді класичний розв'язок задачі (3), (4) є і слабким розв'язком цієї задачі.

Нижче всюди вважатимемо, що виконується умова (6).

Умови існування та єдиності слабкого розв'язку задачі (3), (4) даються в такому твердженні.

Теорема 2. *Нехай функція $f : S \times X \to X$ задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом зі сталою Ліпшиця L і*

$$\sup_{t \in S} \|f(t, 0)\| < \infty.$$

Припустимо, що виконується умова

$$LM/|\omega| < 1, \tag{7}$$

де M, ω – сталі з нерівності (1).

Тоді існує единий слабкий розв'язок задачі (3), (4) і для нього виконується оцінка

$$\sup_{t\in S}\|u(t)\| \le M\big(|\omega| - ML\big)^{-1}\sup_{t\in S}\|f(t,0)\|. \quad (8)$$

Умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі (3), (4) формулюються так.

Теорема 3. *Нехай функція f є обмеженою та неперервно диференційовною і функція $(t,x) \mapsto \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ є обмеженою (на $S \times X$), а функція $(t,x) \mapsto \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\varphi(t)$ обмеженою на множині $S \times \overline{B_R}$ для кожного $R > 0$. Крім того, припустимо, що*

$$MB/|\omega| < 1, \quad (9)$$

де $B = \sup\limits_{(t,x)\in S\times X}\left\|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right\|_{\mathcal{L}(X)}$.

Тоді існує класичний розв'язок задачі (3), (4) і він єдиний.

III. Доведення основних результатів

Нехай $J := (-\infty, 0]$. Зробимо в задачі (3), (4) заміну змінних

$$\tau = \psi(t),\ t \in S,\ \tau \in J.$$

У результаті, позначивши

$$w(\tau) := u(\psi^{-1}(\tau)), \quad g(\tau,x) := f(\psi^{-1}(\tau),x)\ \forall \tau \in J,$$

отримаємо задачу: знайти функцію $w : J \to X$ таку, що

$$w'(\tau) - Aw(\tau) = g(\tau, w(\tau)), \quad \tau \in J, \quad (10)$$

$$\sup_{\tau\in J}\|w(\tau)\| < \infty. \quad (11)$$

Класичним розв'язком задачі (10), (11), природно, називається функція $w \in C(J;\mathcal{D}(A)) \cap C^1(J;X)$, яка задовольняє рівняння (10) і умову (11).

Очевидно, що, коли функція u є класичним розв'язком задачі (3),(4), то функція w є класичним розв'язком задачі (10),(11), і навпаки.

Легко переконатися, що рівняння (5) при вказаній вище заміні змінних перейде в рівняння

$$w(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{(\tau-\eta)A} g(\eta, w(\eta))\, d\eta, \quad \tau \in J. \quad (12)$$

Розв'язком рівняння (12) називається функція w з простору $C(J;X)$, яка задовольняє це рівняння.

Слабким розв'язком задачі (10),(11) називається розв'язок рівняння (12), який задовольняє умову (11).

Легко переконатися, що, коли функція u є слабким розв'язком задачі (3),(4), то функція w є слабким розв'язком задачі (10),(11), і навпаки.

У роботі [5] розглядалися класичні і слабкі розв'язки задачі (10),(11). Там, зокрема, встановлено, що, коли функція $g : J \times X \to X$ – обмежена на $J \times \overline{B_R}$ для кожного $R > 0$, а також виконується умова (6), то класичний розв'язок задачі (10),(11) є слабким розв'язком цієї задачі. Звідси та з наведеного вище про зв'язок між задачами (3),(4) і (10),(11) випливає правильність теореми 1.

У цій же роботі [5] доведено таке: якщо функція $g : J\times X \to X$ задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом зі сталою Ліпшиця L і $\sup\limits_{\tau\in J}\|g(\tau,0)\| < \infty$ та, крім того, виконується умова (7), то існує єдиний слабкий розв'язок задачі (10), (11) і для нього виконується оцінка (8). Звідси та з наведеного вище про зв'язок між задачами (3),(4) і (10),(11) випливає правильність теореми 2.

Також у роботі [5] доведено твердження, з якого безпосередньо випливає, що існує єдиний класичний розв'язок задачі (10), (11), якщо 1) функція f є обмеженою та неперервно диференційовною, 2) функція $\frac{\partial g(\tau,x)}{\partial x}$ є обмеженою (на $J \times X$), 3) функція $\frac{\partial g(\tau,x)}{\partial \tau}$ обмеженою на множині $J \times \overline{B_R}$ для кожного $R > 0$, 4) виконується умова (9), де $B = \sup\limits_{(\tau,x)\in J\times X}\left\|\frac{\partial g(\tau,x)}{\partial x}\right\|_{\mathcal{L}(X)}$. Враховуючи це та зв'язок між задачами (3),(4) і (10),(11), приходимо до висновку про правильність теореми 3.

Зауваження. Умови (6), (7) та (9) є істотними для коректності задачі (3), (4). Це безпосередньо випливає з відповідного зауваження роботи [5] стосовно задачі (10),(11).

Висновки

Встановлено зв'язок між класичними і слабкими розв'язками задачі (3),(4). Також отримали умови існування та єдиності класичних і слабких розв'язків цієї задачі. Знайдені умови є істотними для правильності відповідних тверджень. Відмітимо, що рівняння (3) описують доволі широкі класи нестаціонарних диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема, рівнянь параболічного та гіперболічного типів (див., наприклад, [7,8]).

Література

[1] *Калашников А.С.* Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка // Вестник МГУ. Сер. матем. – **I**. – 1971. – № 2. – С.42–48. – **II**. – 1971. – № 3. – С.3–8.

[2] *Showalter R.E.* Singular nonlinear evolution equations // Rocky Mountain J. Math. – **10**. – 1980. – № 3. – P.499–507.

[3] *Пукач П.Я.* Задачі для нелінійних параболічних рівнянь з виродженням // Вісн.Львів.ун-ту. Сер.мех.-мат. – **36**. – 1991. – С.6–10.

[4] *Bokalo M., Lorenzi A.* Linear evolution first-order problems without initial conditions // Milan Journal of Mathematics. – **77**. – 2009. – P.437–494.

[5] *Бокало М.М.* Задачі без початкових умов для півлінійних еволюційних рівнянь в банахових просторах // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Серія: Математика.– **1**. – 2011. – № 1–2. – С. 25-33.

[6] *Ивасишен С.Д.* О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. ж. – **34**. – 1982. – № 5. – С.547–552.

[7] *Pazy A.* Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations. – Series Applied Mathematical Sciences (Springer-Verlag, New York Inc.), Vol. 44, 1983.

[8] *Showalter R.E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. – Amer. Math. Soc., Vol. 49, Providence, 1997.

[9] *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Физматлит, 2002.

ЗАДАЧА БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ, КОТОРЫЕ ВЫРОЖДАЮТСЯ В НАЧАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

М.М. Бокало

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская,1, 79000, Львов, Украина

Исследовано существование и единственность решений задачи без начальных условий для абстрактных полулинейных эволюционных уравнений с операторами, которые есть инфинитезимальными генераторами сильно непрерывных полугрупп на банаховых пространствах. Рассмотренные уравнения сильно вырождаются в начальный момент времени.

Ключевые слова: задача без начальных условий, полулинейное эволюционное уравнение, полугруппа линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве.

2000 MSC: 34G20, 47D03

УДК: 517.95

THE PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR SEMILINEAR EVOLUTION EQUATIONS DEGENERATED ON INITIAL TIME MOMENT

M.M. Bokalo

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine

There is investigated a question about existence and uniqueness of solutions of the problem without initial conditions for abstract semilinear evolution equations with operators, that are infinitesimal generators of strongly continuous semigroups on Banach spaces. The equations, which consider here, are strongly degenerated in initial time moment.

Key words: problem without initial conditions, semilinear evolution equation, semigroup of linear bounded operators in Banach space.

2000 MSC: 34G20, 47D03

УДК: 517.95