ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.740 № 740, (2012) с. 25–33

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.740 No 740, (2012) 25–33

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ЗА ЧАСОМ ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО ОПЕРАТОРА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

А.М. Кузь

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України вул. Наукова 3-б, Львів, Україна

(Отримано 1 жовтня 2012 р.)

Досліджено задачу з умовами, які є лінійною комбінацією багатоточкових та інтегральних умов за часовою змінною, для факторизованого параболічного за Петровським оператора зі змінними за часом коефіцієнтами у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними. Знайдено критерій єдиності та достатні умови існування розв'язку вказаної задачі у різних функціональних просторах. Для вирішення проблеми малих знаменників використано метричний підхід.

Ключові слова: багатоточкові умови, інтегральні умови, майже періодичні функції, міра Лебега, параболічне рівняння, малі знаменники

2000 MSC: 35K35, 35B15, 35B30

УДК: 517.95+511.2

Вступ [1]

Останніми роками значна увага математиків спрямована на дослідження задач з інтегральними умовами, які є узагальненням дискретних нелокальних умов. Інтегральні умови часто використовуються під час моделювання деяких процесів теплопровідності, вологопереносу в капілярно-пористих середовищах, процесів, що виникають у турбулентній плазмі, у задачах математичної біології, під час дослідження деяких обернених задач математичної фізики тощо.

Однією з перших робіт, присвячених задачам з інтегральними умовами для параболічних рівнянь, була праця Дж. Кенона [20]. В подальшому дослідження таких задач проводили багато авторів, зокрема [4–8, 10, 11, 14, 18, 21]. У роботах [4, 6, 7, 14, 21] досліджували мішані задачі з інтегральними умовами за просторовими змінними для параболічних рівнянь зі сталими та змінними коефіцієнтами. Обернені задачі для параболічних рівнянь з інтегральними умовами перевизначення вивчали у [5].

Задачі з інтегральними умовами за часом для різних типів рівнянь зі сталими коефіцієнтами вивчали у роботах [10, 11, 18] та ін. У [11, 18] розглянуто задачу з інтегральними умовами у вигляді послідовних моментів за часом від шуканої функції для безтипного та гіперболічного за Петровським, відповідно, рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами. Аналогічну задачу для псевдодиференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами досліджували у [10]. Задачу з багатоточковими умовами за часом для факторизованого параболічного оператора вивчали [16] (див. також [13] та бібліографію там). Такі задачі є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність часто пов'язана з проблемою малих знаменників.

Хоч задачі з інтегральними умовами досліджувались доволі широко, для рівнянь високого порядку зі змінними коефіцієнтами такі задачі вивчені мало. У цій праці досліджується задача з умовами, які є лінійною комбінацією багатоточкових та інтегральних умов за часовою змінною для факторизованого параболічного за Петровським оператора зі змінними за часом коефіцієнтами у класі функцій, майже періодичних за просторовими координатами.

I. Основні позначення

Використовуватимемо такі позначення: $\mathbb{R}_+^p$ — множина всіх невід'ємних дійсних чисел; $\mathbb{Z}_+^p$ — множина точок з $\mathbb{R}^p, p \geq 1$, з цілими невід'ємними координатами; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $dx = dx_1 \cdots dx_p$; $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $\|k\| = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_p^2}$, $|k| = |k_1| + \cdots + |k_p|$; $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \cdots + s_p$; $\hat{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$; $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \cdots + s_p$; $\mu_k = (\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p}) \in \mathbb{R}^p$, $\mu_{k^1} \neq \neq \mu_{k^2}$, $k^1 \neq k^2$, $k^1, k^2 \in \mathbb{Z}^p$; $\|\mu_k\| = \sqrt{\mu_{k_1}^2 + \cdots + \mu_{k_p}^2}$, $|\mu_k| = |\mu_{k_1}| + \cdots + |\mu_{k_p}|$; $(\mu_k, x) = \mu_{k_1} x_1 + \cdots + \mu_{k_p} x_p$; $D^p = (0,T) \times \mathbb{R}^p$, $\Pi_H^p = [0,H]^p$, $\Pi_T^p = [0,T]^p$, $[a]$ і $\{a\}$ — ціла і дробова частини числа $a \in \mathbb{R}$; C_j, $j = 1, 2, \ldots$, — додатні величини, які не залежать від k та μ_k;

$C_B^{(n,2n)}(\overline{D}^p)$ — простір функцій $u(t,x)$, які є n разів неперервно диференційовними за змінною t та $2n$ разів неперервно диференційовними і майже періо-

[1] Роботу підтримано ДФФД України (проект №41.1/004).

дичними [19] за x рівномірно по $t \in [0,T]$, із нормою

$$\|u; C_B^{(n,2n)}(\overline{D}^p)\| = \\ = \sum_{\substack{|\hat{s}|\leqslant 2n\\ s_0\leqslant n}} \max_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial^{|\hat{s}|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}} \right|;$$

$C_B^h := C_B^h(\mathbb{R}^p)$ — простір функцій $v(x)$, які є h разів неперервно диференційовними і майже періодичними за всіма змінними, із нормою

$$\|v; C_B^h\| = \sum_{|s|\leqslant h} \sup_{x\in\mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial^{|s|}v(x)}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}} \right|;$$

$\mathcal{T}_B$ — простір скінченних тригонометричних поліномів $v(x) = \sum_{|k|\leqslant N} v_k \exp(i\mu_k, x)$ з комплексними коефіцієнтами;

$\mathcal{T}_B'$ — простір усіх антилінійних функціоналів над $\mathcal{T}_B$ зі слабкою збіжністю, який співпадає з простором формальних тригонометричних рядів;

$C^h([0,T],\mathcal{T}_B)\ \left(C^h([0,T],\mathcal{T}_B')\right)$ — простір функцій $u(t,x)$, які є h разів неперервно диференційовними в $\overline{D}^p$ за змінною t і для довільного фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $d^j u(t,\cdot)/dt^j$, $j \in \{0,1,\ldots,h\}$, належать простору $\mathcal{T}_B$ $(\mathcal{T}_B')$;

$W_B^{\alpha,\beta}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, — простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{T}_B$ за нормою [17]

$$\|v; W_B^{\alpha,\beta}\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |v_k|^2 (1+|\mu_k|)^{2\alpha} \exp\left(2\beta|\mu_k|^2\right) \right)^{1/2};$$

$C^h([0,T],W_B^{\alpha,\beta})$ — простір функцій $u(t,x)$ таких, що для довільного фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $d^j u(t,\cdot)/dt^j$, $j \in \{0,1,\ldots,h\}$, належать простору $W_B^{\alpha,\beta}$ і є неперервними за $t \in [0,T]$ у нормі цього простору,

$$\|u; C^h([0,T],W_B^{\alpha,\beta})\| = \sum_{j=0}^{h} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{d^j u(t,\cdot)}{dt^j}; W_B^{\alpha,\beta} \right\|.$$

II. Постановка задачі

В області D^p розглядаємо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\Delta\right)u(t,x) := \\ := \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_j(t)\Delta \right) u(t,x) = 0, \quad (1)$$

$$U_j[u] := \alpha_j u(t_j,x) + \\ + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u(t,x)dt = \varphi_j(x),\ j \in \{1,\ldots,n\}, \quad (2)$$

де $a_j(t) \in C^{n-j}([0,T])$, $a_j(t) > 0$, $a_q(t) \neq a_s(t)$, $q \neq s$, $t \in [0,T]$; $\alpha_j,\beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0$; $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant T$; $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $r_1 < \ldots < r_n$; $\Delta = \sum_{j=1}^p \partial^2/\partial x_j^2$; порядок дії операторів у лівій частині $(\partial/\partial t - a_n(t)\Delta)\cdots(\partial/\partial t - a_1(t)\Delta)$ формули (1) визначається справа наліво; функції $\varphi_j(x), j \in \{1,\ldots,n\}$, є майже періодичними за x зі заданим спектром $M_p := \{\mu_k \in \mathbb{R}^p : k \in \mathbb{Z}^p\}$, які розвиваються в ряди Фур'є вигляду

$$\varphi_j(x) = \sum_{\mu_k\in M_p} \varphi_{jk} \exp(i\mu_k,\, x), \quad (3)$$

де

$$\varphi_{jk} = \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^p} \int_{\Pi_H^p} \varphi_j(x) \exp(-i\mu_k,\, x)dx,$$

$$\mu_k \in M_p, \quad j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Припустимо, що існують додатні сталі $d_1, d_2, \sigma_1, \sigma_2$, $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$, такі, що справджується умова

$$\forall \mu_k \in M_p \qquad d_1|k|^{\sigma_1} \leqslant |\mu_k| \leqslant d_2|k|^{\sigma_2}. \quad (4)$$

З (4) випливає, що $\mu_{\vec{0}} = \vec{0}$ і $\mu_k \neq \vec{0}$ при $k \neq \vec{0}$.

Надалі нам знадобляться такі нерівності:

$$\forall \mu_k \in M_p \quad \|\mu_k\| \leqslant |\mu_k| \leqslant \sqrt{p}\|\mu_k\|. \quad (5)$$

III. Єдиність розв'язку задачі

Майже періодичний за x зі спектром M_p розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{\mu_k\in M_p} u_k(t) \exp(i\mu_k,\, x). \quad (6)$$

Підставивши ряди (3), (6) у рівняння (1) та умови (2), отримуємо для знаходження кожного з коефіцієнтів $u_k(t)$, відповідно, таку задачу:

$$L\left(\frac{d}{dt}, -\|\mu_k\|^2\right)u_k(t) := \\ := \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} + a_j(t)\|\mu_k\|^2 \right) u_k(t) = 0, \quad (7)$$

$$U_j[u_k] := \alpha_j u_k(t_j) + \\ + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u_k(t)dt = \varphi_{jk},\ j \in \{1,\ldots,n\}. \quad (8)$$

Позначимо: $a_0(t) \equiv 0$, $I_j(t) = -\int_0^t a_j(\tau)d\tau$, $j \in \{0,1,\ldots,n\}$; $\Theta_q(t) = I_q(t) - I_{q-1}(t)$, $\mathcal{E}_{qk}(\tau) = \exp\left(\Theta_q(\tau)\|\mu_k\|^2\right)$; $L_q(\partial/\partial t,\Delta) = \prod_{j=1}^q (\partial/\partial t - a_j(t)\Delta)$, $q \in \{1,\ldots,n\}$. Відомо [13, с. 77], що рівняння (7), коли $\mu_k \neq \vec{0}$, має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$\begin{cases} f_{1k}(t) = \mathcal{E}_{1k}(t), \\ f_{2k}(t) = \mathcal{E}_{1k}(t) \int_0^t \mathcal{E}_{2k}(\tau_1) d\tau_1, \\ f_{3k}(t) = \mathcal{E}_{1k}(t) \int_0^t \left(\mathcal{E}_{2k}(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \mathcal{E}_{3k}(\tau_2) d\tau_2 \right) d\tau_1, \\ \quad \vdots \\ f_{nk}(t) = \mathcal{E}_{1k}(t) \int_0^t \left(\mathcal{E}_{2k}(\tau_1) \times \ldots \right. \\ \qquad \left. \ldots \times \left(\int_0^{\tau_{n-2}} \mathcal{E}_{nk}(\tau_{n-1}) d\tau_{n-1} \right) \ldots \right) d\tau_1. \end{cases} \quad (9)$$

Для функцій (9) виконуються рівності

$$L_{j-1}(d/dt, -\|\mu_k\|^2) f_{qk}(t) = \delta_{jq} \exp(I_q(t)\|\mu_k\|^2), \quad (10)$$

де $q \in \{1, \ldots, j\}, j \in \{2, \ldots, n\}$, δ_{jq} – символ Кронекера.

Якщо $\mu_k \neq \vec{0}$, то характеристичний визначник $\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)$, $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, $\vec{t} \in \Pi_T^n$, $T > 0$, задачі (7), (8) є таким:

$$\Delta(\mu_k, \vec{t}, T) = \det \|\alpha_j f_{qk}(t_j) + \beta_j I_{jq}\|_{j,q=1}^n, \quad (11)$$

де $I_{jq} := I_{jq}(\mu_k, T)$, $j, q \in \{1, \ldots, n\}$, причому

$$I_{jq}(\mu_k, T) = \int_0^T t^{r_j} f_{qk}(t) dt. \quad (12)$$

Якщо $\mu_k = \vec{0}$, то рівняння (7) має таку фундаментальну систему розв'язків: $f_{j,\vec{0}}(t) = t^{j-1}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, а характеристичний визначник $\Delta(\vec{0}, \vec{t}, T)$ відповідної задачі (7), (8) має вигляд

$$\Delta(\vec{0}, \vec{t}, T) = \det \left\| \alpha_j t_j^{q-1} + \beta_j \frac{T^{r_j+q}}{r_j+q} \right\|_{j,q=1}^n. \quad (13)$$

Задача (7), (8) не може мати двох різних розв'язків тоді і лише тоді, коли $\Delta(\mu_k, \vec{t}, T) \neq 0$ [15].

Теорема 1. *Для того, щоб задача* (1), (2) *мала не більше одного майже періодичного за x із спектром M_p розв'язку у просторі $C^n([0,T], \mathcal{T}_B)$ ($C^n([0,T], \mathcal{T}'_B)$), необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall \mu_k \in M_p \qquad \Delta(\mu_k, \vec{t}, T) \neq 0. \quad (14)$$

□ *Доведення.* Виконуємо за схемою доведення теореми 1 у [8].■

Зауваження 1. Якщо для деякого $l \in \{2, \ldots, n\}$ параметри задачі (1), (2) справджують такі співвідношення:

$$T < 1, \quad \alpha_j \neq 0, \quad \alpha_j \beta_j < 0, \quad \left| \frac{\beta_j}{\alpha_j} \right| < r_j + l,$$

$$t_j = \left(-\frac{\beta_j T^{r_j+1}}{\alpha_j (r_j + l)} \right)^{1/(l-1)}, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\left| \frac{\beta_{q+1}}{\alpha_{q+1}} \right| > \left| \frac{\beta_q}{\alpha_q} \right| \frac{r_{q+1} + l}{r_q + l} T^{r_q - r_{q+1}}, \; q \in \{1, \ldots, n-1\},$$

то умова (14) не виконується.

Зауваження 2. Якщо параметри задачі (1), (2) для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$ справджують рівності $\alpha_j/\beta_j = T^{r_j+1}/(r_j+1)$, то умова (14) не виконується.

Зауваження 3. Якщо в умовах (2) $\alpha_j = 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то визначник $\Delta(\mu_k, T) := \Delta(\mu_k, \vec{t}, T)$ можна зобразити у вигляді (див [12, задача 68])

$$\Delta(\mu_k, T) = \frac{\bar{\beta}}{n!} \int_{\Pi_T^n} \widetilde{\Delta}(\tau) \bar{\Delta}(\mu_k, \tau) d\tau, \quad (15)$$

де $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\beta} = \prod_{j=1}^n \beta_j$,

$$\widetilde{\Delta}(\tau) = \det \|\tau_j^{r_l}\|_{j,l=1}^n, \quad (16)$$

$$\bar{\Delta}(\mu_k, \tau) = \det \|f_{lk}(\tau_j)\|_{l,j=1}^n. \quad (17)$$

Покажемо, що у такому випадку, визначник $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$. Нехай S_n – симетрична група перестановок елементів множини $\{1, \ldots, n\}$. Позначимо через $\mathcal{S}_\omega^n$, $\omega = (i_1, \ldots, i_n) \in S_n$, симплекс

$$\{(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Pi_T^n : \tau_{i_1} \leqslant \ldots \leqslant \tau_{i_n}\}.$$

Відомо [2, с. 93], що у внутрішності симлекса $\mathcal{S}_{\omega_0}^n$, де $\omega_0 = (1, \ldots, n)$, $\tilde{\Delta}(\tau) > 0$, а $\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)$ співпадає з характеристичним визначником задачі з умовами

$$\overline{U}_j[u_k] := u_k(\tau_j) = 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

для рівняння (7). З теореми Скоробогатька [1, с. 31] про єдиність розв'язку багатоточкової задачі для звичайного диференціального рівняння n-го порядку, що розпадається на дійсні лінійні множники першого порядку, випливає, що $\bar{\Delta}(\mu_k, \tau) \neq 0$ і не змінює свого знака у внутрішності симплекса $\mathcal{S}_{\omega_0}^n$. Легко помітити, що для довільної перестановки $\omega \in S_n$ справджуються такі тотожності:

$$\widetilde{\Delta}(\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_n}) = (-1)^{\rho_\omega} \widetilde{\Delta}(\tau_1, \ldots, \tau_n),$$

$$\bar{\Delta}(\mu_k, \tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_n}) = (-1)^{\rho_\omega} \bar{\Delta}(\mu_k, \tau_1, \ldots, \tau_n),$$

де ρ_ω – кількість інверсій у перестановці $\omega \in S_n$. Розіб'ємо куб Π_T^n на $n!$ симплексів $\mathcal{S}_\omega^n$. Тоді

$$\Delta(\mu_k, T) = \frac{\bar{\beta}}{n!} \int_{\Pi_T^n} \widetilde{\Delta}(\tau) \bar{\Delta}(\mu_k, \tau) d\tau =$$

$$= \frac{\bar{\beta}}{n!} \sum_{\omega \in S_n} \int_{\mathcal{S}_\omega^n} \widetilde{\Delta}(\tau) \bar{\Delta}(\mu_k, \tau) d\tau =$$

$$= \bar{\beta} \int_{\mathcal{S}_{\omega_0}^n} \widetilde{\Delta}(\tau) \bar{\Delta}(\mu_k, \tau) d\tau \neq 0. \quad (18)$$

З рівності (18), враховуючи вищенаведене, випливає, що для всіх $\mu_k \in M_p$ $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$. Отже, якщо $\alpha_j = 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то умова (14) виконується для довільного T та довільних функцій $a_j(t)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, які задовольняють умови, сформульовані у постановці задачі (1), (2).

IV. Існування розв'язку задачі

Надалі вважатимемо, що виконується умова (14). Тоді для кожного $\mu_k \in M_p$ існує єдиний розв'язок задачі (6), (7), а формальний розв'язок задачі (1), (2) зображується у вигляді ряду

$$u(t,x) = u_{\vec{0}}(t) + \sum_{\mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}} \left(\sum_{l,j=1}^{n} \frac{\Delta_{lj}(\mu_k, \vec{t}, T)}{\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)} \varphi_{lk} f_{jk}(t) \right) \times \exp(i\mu_k, x), \quad (19)$$

де

$$u_{\vec{0}}(t) = \sum_{l,j=1}^{n} \frac{\Delta_{lj}(\vec{0}, \vec{t}, T)}{\Delta(\vec{0}, \vec{t}, T)} \varphi_{l,\vec{0}}\, t^{j-1}, \quad (20)$$

а $\Delta_{lj}(\mu_k, \vec{t}, T)$ – алгебричне доповнення у визначнику $\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)$ елемента l-го рядка та j-го стовпця.

Із (19) та теореми 1 випливає таке твердження.

Теорема 2. *Нехай справджується умова* (14). *Якщо* $\varphi_j(x) \in \mathcal{T}_B\, (\mathcal{T}_B')$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $C^n([0,T], \mathcal{T}_B)\, (C^n([0,T], \mathcal{T}_B'))$, *який зображується формулою* (19).

Питання існування розв'язку задачі (1), (2) в інших функціональних просторах пов'язане з проблемою малих знаменників, бо вираз $|\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для векторів $\mu_k \in M_p$.

Позначимо:

$$A_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{ 0, \max_{t\in[0,T]} \int_0^t (a_{j-1}(t) - a_j(t))\, dt \right\}.$$

Теорема 3. *Нехай виконується умова* (14) *та існують додатні сталі* η, ν *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in M_p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\nu|\mu_k|^2). \quad (21)$$

Якщо $\varphi_j(x) \in W_B^{q_1, q_2}$, $q_1 = \eta + 2n + \alpha$, $q_2 = \nu + \frac{n(n-1)}{2} A_1 + \beta$, $l \in \{1, \ldots, n\}$, *то існує розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $C^n([0,T], W_B^{\alpha,\beta})$, *який зображується рядом* (19) *та неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

□ *Доведення.* На підставі формули (19) отримуємо

$$\|u; C^n([0,T], W_B^{\alpha,\beta})\| = \sum_{q=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left(\sum_{\mu_k \in M_p} |u_k^{(q)}(t)|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\alpha} \times \exp\left(2\beta|\mu_k|^2\right) \right)^{1/2}, \quad (22)$$

де

$$u_k^{(q)}(t) = \sum_{l,j=1}^{n} \frac{\Delta_{lj}(\mu_k, \vec{t}, T)}{\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)} \varphi_{lk} f_{jk}^{(q)}(t), \quad \mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}, \quad q \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad (23)$$

$$u_{\vec{0}}^{(q)} = \sum_{l,j=1}^{n} \frac{\Delta_{lj}(\vec{0}, \vec{t}, T)}{\Delta(\vec{0}, \vec{t}, T)} \frac{(j-1)!}{(j-q-1)!} \varphi_{l,\vec{0}}\, t^{j-q-1}, \quad q \in \{0, 1, \ldots, n\}. \quad (24)$$

На підставі формул (9), для кожної з функцій $f_{jk}(t)$, $\mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}$, отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]} |f_{jk}^{(q)}(t)| \leqslant C_1 (1 + |\mu_k|)^{2q} \times \exp\left((j-1)A_1|\mu_k|^2\right), \quad (25)$$

$$\left| \int_0^T t^{r_l} f_{jk}(t) dt \right| \leqslant C_2 \exp\left((j-1)A_1|\mu_k|^2\right), \quad (26)$$

де $j \in \{1, \ldots, n\}$, $q \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $C_1 := C_1(n, T)$, $C_2 = \max_{1\leqslant l\leqslant n}\{T^{r_l+1}/(r_l+1)\}$. Враховуючи (11), (13), (25), (26), для алгебричних доповнень $\Delta_{lj}(\mu_k, \vec{t}, T)$, $j, l \in \{1, \ldots, n\}$, визначника $\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)$ отримуємо такі оцінки:

$$|\Delta_{lj}(\mu_k, \vec{t}, T)| \leqslant (n-1)!(C_3)^{n-1} \exp\left(A_{2j}|\mu_k|^2\right), \quad l, j \in \{1, \ldots, n\},\ \mu_k \in M_p, \quad (27)$$

де $C_3 = \max\{C_1 \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{|\alpha_j|\}, C_2 \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{|\beta_j|\}\}$, $A_{2j} = (n(n-1)/2 - j + 1)\, A_1$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. На підставі формул (23)–(27), отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]} |u_k^{(q)}(t)| \leqslant C_4 \sum_{j=1}^{n} |\varphi_{jk}| (1 + |\mu_k|)^{2n+\eta} \times \exp\left((\nu + n(n-1)A_1/2)|\mu_k|^2\right), \ q \in \{1, \ldots, n\}, \quad (28)$$

$$\max_{t\in[0,T]} |u_{\vec{0}}^{(q)}(t)| \leqslant C_5 \sum_{j=1}^{n} |\varphi_{j,\vec{0}}|, \ q \in \{1, \ldots, n\}, \quad (29)$$

де $C_4 = n!\, C_1 (C_3)^{n-1}$, $C_5 := C_5(n, \vec{t}, T)$. На підставі (28) і (29) отримуємо таку оцінку:

$$\|u; C^n([0,T], W_B^{\alpha,\beta})\| \leqslant C_6 \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\mu_k \in M_p} |\varphi_{jk}|^2 (1 + |\mu_k|)^{2q_1} \times \exp\left(2q_2|\mu_k|^2\right) \right)^{1/2} = C_6 \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j; W_B^{q_1,q_2}\|,$$

де $C_6 = (n+1) \max\{C_4, C_5\}$. З отриманої нерівності випливає доведення теореми. ■

V. Оцінки малих знаменників

Розглянемо питання про можливість виконання оцінювання (21) для задачі (1), (2).

Теорема 4. *Нехай* $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ *в умовах* (2). *Тоді для довільних* $a_j(t)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *та* T *оцінка* (21) *виконується при* $\eta > n(n-1)p/(2\sigma_1)$, $\nu > n(n+1)A_3T/2$, *для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in M_p$, *де* $A_3 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|a_j; C[0,T]\|$, σ_1 *– стала з нерівності* (4).

□ *Доведення.* За умов теореми, враховуючи (18), визначник $\Delta(\mu_k, T)$ обчислюється за формулою

$$\Delta(\mu_k, T) = \bar{\beta} \int\limits_{\mathcal{S}^n_{\omega_0}} \widetilde{\Delta}(\tau)\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)d\tau,$$

де $\widetilde{\Delta}(\tau)$, $\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)$ визначені формулами (16), (17) відповідно. Оскільки, як було показано у зауваженні 2, $\widetilde{\Delta}(\tau) > 0$, а $\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)$ не змінює свого знака у внутрішності симплекса $\mathcal{S}^n_{\omega_0}$, то

$$|\Delta(\mu_k, T)| = |\bar{\beta}| \int\limits_{\mathcal{S}^n_{\omega_0}} \widetilde{\Delta}(\tau)\, |\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)|d\tau. \qquad (30)$$

Введемо такі множини:

$$\Omega(\xi) = \{\tau \in S^n_{\omega_0} : \widetilde{\Delta}(\tau) > \xi\},\ \xi > 0.$$

$$E(\mu_k) = \{\tau \in \Omega(\xi) : |\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)| < \varepsilon_k\}, \quad \mu_k \in M_p,$$

де $\varepsilon_k := (1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\nu|\mu_k|^2)$. Тоді з (30) випливає, що

$$\begin{aligned}|\Delta(\mu_k, T)| &> |\bar{\beta}| \int\limits_{\Omega(\xi)} \widetilde{\Delta}(\tau)\, |\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)|d\tau = \\ &= |\bar{\beta}| \int\limits_{E(\mu_k)} \widetilde{\Delta}(\tau)\, |\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)|d\tau + \\ &+ |\bar{\beta}| \int\limits_{\Omega(\xi)\setminus E(\mu_k)} \widetilde{\Delta}(\tau)\, |\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)|d\tau > \\ &> |\bar{\beta}| \int\limits_{\Omega(\xi)\setminus E(\mu_k)} \widetilde{\Delta}(\tau)\, |\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)|d\tau. \qquad (31)\end{aligned}$$

Відмітимо, що

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} E(\mu_k) < (1 + |k|)^{-(p+\theta)},\ \theta > 0,\ \mu_k \in M_p. \quad (32)$$

Цей факт встановлюється аналогічно до доведення теореми 5 у [16]. Для $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}\Omega(\xi)$, враховуючи, що $\widetilde{\Delta}(\tau)$ є многочленом відносно змінних $\tau_1, \ldots, \tau_n$, за лемою 2.3 із [13, с. 16] отримуємо таку оцінку:

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}\Omega(\xi) \geqslant \frac{T^n}{n!} - \left(\xi / \prod_{j=1}^{n} r_j!\right)^{1/r} := \chi(\xi), \qquad (33)$$

де $\xi > 0$ – як завгодно мале число, $r = r_1 + \cdots + r_n$. На основі оцінок (31)–(33) для кожного $\mu_k \in M_p$ отримуємо

$$\begin{aligned}|\Delta(\mu_k, T)| &> |\bar{\beta}|\xi\, \varepsilon_k\, \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}(\Omega(\xi) \setminus E(\mu_k)) = \\ &= |\bar{\beta}|\, \xi\, \varepsilon_k\, (\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}\Omega(\xi) - \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}E(\mu_k)) > \\ &> |\bar{\beta}|\, \xi\, \varepsilon_k \left(\chi(\xi) - (1 + |k|)^{-(p+\theta)}\right). \qquad (34)\end{aligned}$$

З нерівності (34) випливає, що для достатньо великих $|k|$ виконується оцінка

$$\begin{aligned}|\Delta(\mu_k, T)| &> |\bar{\beta}|\xi\, \varepsilon_k\, \chi(\xi)/2 = \\ &= C_9(1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\nu|\mu_k|^2),\end{aligned}$$

де $C_7 = |\bar{\beta}|\, \xi\, \chi(\xi)/2$. З отриманої нерівності випливає доведення теореми. ■

VI. Випадок рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо задачу з умовами (2) для рівняння (1) у випадку, коли $a_j(t) \equiv a_j^2, a_j \in \mathbb{R}_+$. Тоді, відповідно, фундаментальна система розв'язків рівняння (7) має вигляд

$$f_{qk}(t) = \begin{cases} t^{q-1}, & \mu_k = \vec{0}, \\ \exp(-a_q^2\|\mu_k\|^2 t), & \mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}, \end{cases}$$
$$q \in \{1, \ldots, n\}. \qquad (35)$$

Якщо $\mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}$, то визначник $\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)$ має вигляд

$$\begin{aligned}\Delta(\mu_k, \vec{t}, T) = \det \big\|&\alpha_j \exp(-a_q^2\|\mu_k\|^2 t_j) + \\ &+ \beta_j I_{jq}\big\|_{j,q=1}^n, \qquad (36)\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}I_{lj} := I_{lj}(\mu_k) &= \int_0^T t^{r_j} \exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 t)dt = \\ &= Q_{lj}(\mu_k, T)\exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 T) - Q_{lj}(\mu_k, 0), \qquad (37)\end{aligned}$$

$$Q_{lj}(\mu_k, t) = -\sum_{q=1}^{r_j+1} \frac{r_j!}{(r_j - q + 1)!} \frac{t^{r_j-q+1}}{(a_l\|\mu_k\|)^{2q}},$$
$$l, j \in \{1, \ldots, n\}. \qquad (38)$$

У цьому частинному випадку справедливими залишаються теорема 1 та зауваження до неї.

Майже періодичний за x із спектром M_p формальний розв'язок задачі (1), (2) зображується у вигляді ряду

$$\begin{aligned}u(t, x) = u_{\vec{0}}(t) &+ \\ &+ \sum_{\mu_k \in M_p\setminus\{\vec{0}\}} \left(\sum_{l,j=1}^{n} \frac{\Delta_{jl}(\mu_k, \vec{t}, T)}{\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)} \varphi_{jk} \times \right. \\ &\left. \times \exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 t) \right) \exp(i\mu_k, x), \qquad (39)\end{aligned}$$

де

$$u_{\vec{0}}(t) = \sum_{l,j=1}^{n} \frac{\Delta_{jl}(\vec{0},\vec{t},T)}{\Delta(\vec{0},\vec{t},T)} \varphi_{j,\vec{0}}\, t^{l-1}, \qquad (40)$$

а $\Delta_{jl}(\mu_k,\vec{t},T)$ – алгебричне доповнення у визначнику $\Delta(\mu_k,\vec{t},T)$ елемента j-го рядка та l-го стовпця.

Лема 1. *Якщо $v(x) \in C_B^n(\mathbb{R}^p)$ і має спектр M_p, то для її коефіцієнтів Фур'є справджуються оцінки*

$$\forall \mu_k \in M_p \quad |v_k| \leqslant (2p)^n(n+1)\frac{\|v; C_B^n\|}{(1+|\mu_k|)^n}.$$

□ *Доведення.* Проводиться за схемою доведення леми 1 у [8].■

Лема 2. *Для кожного з алгебричних доповнень $\Delta_{jl}(\mu_k,\vec{t},T)$ оцінки*

$$|\Delta_{jl}(\mu_k,\vec{t},T)| \leqslant C_8(1+|\mu_k|)^{-2\bar{r}_j}, \qquad (41)$$

де $\bar{r}_j = r - r_j$, $j,l \in \{1,\ldots,n\}$, справджуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in M_p$.

□ *Доведення.* Для величин $|I_{jl}|$, $j,l \in \{1,\ldots,n\}$, справджуються такі оцінки:

$$|I_{jl}| = \left| \int_0^T t^{r_j} \exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 t)dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in[0,T]}\{t^{r_j}\exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 t)\}T \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(4pr_j)^{r_j}T}{a_l^{2r_j}e_j^r}(1+|\mu_k|)^{-2r_j} = C_9(1+|\mu_k|)^{-2r_j}. \qquad (42)$$

Для елементів

$$U_j[u_{lk}] = \alpha_j \exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 t_j) + \beta_j I_{jl},\ j,l \in \{1,\ldots,n\},$$

визначника $\Delta(\mu_k,\vec{t},T)$, враховуючи (42), для достатньо великих $|k|$ отримуємо такі оцінки:

$$|U_j[f_{lk}]| \leqslant |\alpha_j||\exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 t_j)| + |\beta_j||I_{lj}| \leqslant$$

$$\leqslant \max\{|\alpha_j|,|\beta_j|C_9\}(1+|\mu_k|)^{-2r_j} =$$

$$= C_{10}(1+|\mu_k|)^{-2r_j}. \qquad (43)$$

Кожне з алгебричних доповнень $\Delta_{jl}(\mu_k,\vec{t},T)$, $j,l \in \{1,\ldots,n\}$, можна зобразити формулами [9]

$$\Delta_{jl}(\mu_k,\vec{t},T) = \sum_{\omega\in S_{n-1}} (-1)^{\rho_\omega} \prod_{\substack{q=1\\ q\neq j, i_q\neq l}}^{n} U_q[u_{i_q,k}]. \qquad (44)$$

На основі (44) та нерівностей (43) отримуємо такі оцінки:

$$|\Delta_{jl}(\mu_k,\vec{t},T)| = \left| \sum_{\omega\in S_{n-1}} (-1)^{\rho_\omega} \prod_{\substack{q=1\\ q\neq j, i_q\neq l}}^{n} U_q[u_{i_q,k}] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\omega\in S_{n-1}} \prod_{\substack{q=1\\ q\neq j, i_q\neq l}}^{n} |U_q[u_{i_q,k}]| \leqslant (n-1)! \prod_{\substack{q=1\\ q\neq j}}^{n} |U_q[u_{qk}]| \leqslant$$

$$\leqslant (n-1)!(C_{10})^{n-1}\prod_{\substack{q=1\\ q\neq j}}^{n}(1+|\mu_k|)^{-2r_q} =$$

$$= (n-1)!(C_{10})^{n-1}(1+|\mu_k|)^{-2\bar{r}_j},\ l,j \in \{1,\ldots,n\}.$$

З отриманих нерівностей випливає доведення леми.■

Теорема 5. *Нехай $\beta_1\cdots\beta_n \neq 0$ в умовах (2). Тоді для довільних параметрів T, a_j, t_j, α_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, нерівність (21) справджується при $\eta > 2r + n(n+1)$ та $\nu = 0$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in M_p$.*

□ *Доведення.* Враховуючи (37), кожен з елементів $U_j[f_{lk}]$, $j,l \in \{1,\ldots,n\}$, визначника $\Delta(\mu_k,\vec{t},T)$ подамо у вигляді

$$U_j[f_{lk}] = \alpha_j \exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 t_j) +$$

$$+\beta_j Q_{lj}(\mu_k,T)\exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 T) - \beta_j Q_{lj}(\mu_k,0) =$$

$$= \big(\alpha_j + \beta_j Q_{lj}(\mu_k,T)\exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2(T-t_j))\big) \times$$

$$\times \exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 t_j) - \beta_j Q_{lj}(\mu_k,0). \qquad (45)$$

З (37), (38) та (45) випливає, що для достатньо великих $|k|$ справджується оцінка

$$|\Delta(\mu_k,\vec{t},T)| = \left|\det\|U_j[u_{lk}]\|_{l,j=1}^n\right| =$$

$$= \Big|\det\|\,\big(\alpha_j + \beta_j Q_{lj}(\mu_k,T)\exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2(T-t_j))\big) \times$$

$$\times \exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 t_j) - \beta_j Q_{lj}(\mu_k,0)\|_{j,l=1}^n\Big| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left|\det\|\beta_j Q_{lj}(\mu_k,0)\|_{j,l=1}^n\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\prod_{j=1}^n|\beta_j|\left|\det\left\|\frac{r_j!}{(a_l\|\mu_k\|)^{2(r_j+1)}}\right\|_{l,j=1}^n\right| >$$

$$> C_{11}(1+|\mu_k|)^{-2r-n(n+1)}, \qquad (46)$$

де $C_{11} = \prod_{j=1}^n(|\beta_j|r_j!)\,|\det\|a_l^{-2(r_j+1)}\|_{l,j=1}^n|$. З нерівності (46) випливає доведення теореми.■

Теорема 6. *Нехай виконується умова (14) та умови теореми 5. Якщо $\varphi_j(x) \in C_B^{[\eta+p/\sigma_1]-2(\bar{r}_j-n)+1}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, де стала η така, як у теоремі 5, то існує розв'язок задачі (1), (2) із простору $C_B^{(n,2n)}(\overline{D}^p)$, який зображається формулою (39) і неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x), j \in \{1,\ldots,n\}$.*

□ *Доведення.* На підставі формули (39) отримуємо

$$\|u; C_B^{(n,2n)}(\overline{D}^p)\| \leqslant$$
$$\leqslant C_{12} \sum_{|k|\geqslant 0} \sum_{l,j=1}^{n} \frac{|\Delta_{jl}(\mu_k, \vec{t}, T)|}{|\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)|} |\varphi_{jk}|(1+|\mu_k|)^{2n}. \quad (47)$$

За умов теореми, на підставі леми 1, отримуємо

$$|\varphi_{jk}| \leqslant C_{13} \frac{\|\varphi_j; C_B^{[\eta+p/\sigma_1]-2(\bar{r}_j-n)+1}\|}{(1+|\mu_k|)^{[\eta+p/\sigma_1]-2(\bar{r}_j-n)+1}}, \quad (48)$$

де $C_{13} = (2p)^{[\eta+p/\sigma_1]-2(\bar{r}_j-n)+1}([\eta+p/\sigma_1]-2(\bar{r}_j-n)+1)$. На підставі леми 2, теореми 5 та оцінок (47), (48), враховуючи (4), одержуємо таку нерівність:

$$\|u; C_B^{(n,2n)}(\overline{D}^p)\| \leqslant C_{14} \sum_{|k|\geqslant 0} (1+|\mu_k|)^{\eta-1-[\eta+p/\sigma_1]} \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j; C_B^{[\eta+p/\sigma_1]+2(\bar{r}_j-n)+1}\| \leqslant C_{15} \sum_{|k|\geqslant 0} |k|^{-z} \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j; C_B^{[\eta+p/\sigma_1]+2(\bar{r}_j-n)+1}\|, \quad (49)$$

де $z = p + (1 - \{\eta + p/\sigma_1\})\sigma_1$. Оскільки $z > p$, то ряд $\sum_{|k|>0} |k|^{-z}$ є збіжним. Позначимо його суму через S_z. Тоді з оцінки (49) отримуємо

$$\|u; C_B^{(n,2n)}(\overline{D}^p)\| \leqslant$$
$$\leqslant C_{15} S_z \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j; C_B^{[\eta+p/\sigma_1]+2(\bar{r}_j-n)+1}\|. \quad (50)$$

З оцінки (50) випливає доведення теореми. ■

Аналогічні результати отримано і у випадку, коли $a_1 = \cdots = a_n = a$, тобто коли рівняння (1) має спеціальний вигляд $(\partial/\partial t - a(t)\Delta)^n u(t,x) = 0$.

Висновки

Досліджено задачу (1), (2) з умовами, які є лінійною комбінацією багатоточкових та інтегральних умов за часовою змінною, для факторизованого параболічного за Петровським оператора зі змінними за часом коефіцієнтами у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними.

Встановлено умову єдиності розв'язку вказаної задачі у просторах формальних тригонометричних рядів. Наведено приклади коли виконується та порушується умова єдиності.

Встановлення існування розв'язку задачі (1), (2) пов'язані з проблемою малих знаменників, для вирішення якої використано метричний підхід. Показано, що задача (1), (2) є розв'язною у шкалі просторів $C^h([0,T], W_B^{\alpha,\beta})$. Встановлено, що у деяких частинних випадках задачі (1), (2) відсутня проблема малих знаменників.

Результати можна поширити на випадок еволюційного рівняння n-го порядку

$$P_2\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = 0$$

де $P_1(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})$ – гіперболічний за Гордінгом, а $P_2(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})$ – параболічний за Петровським диференціальні вирази;

$$P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) := \sum_{|\hat{s}|\leqslant n_1} a_{\hat{s}} \frac{\partial^{|\hat{s}|}}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}},$$

$$P_2\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) := \prod_{q=1}^{n_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - b_q(t)\Delta\right),$$

$a_{\hat{s}} \in \mathbb{C}$, $b_q(t) > 0$ — достатньо гладкі дійснозначні функції $n_1 + n_2 = n$.

Література

[1] *Бобик О.І., Боднарчук П.І., Пташник Б.Й., Скоробогатько В.Я.* Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними — К.: Наук. думка, 1972. — 173 с.

[2] *Гантмахер Ф.Р, Крейн М.Г.* Осциляционные матрицы и малые колебания механический систем. – М.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1950. – 359 с.

[3] *Гутер Р.С., Кудрявцев Л.Д., Левитан Б.В.* Элементы теории функций. – М.: Физматгиз, 1963. – 244 с.

[4] *Данилкина О.Ю.* Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения// Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. – 2007. – №6. – С. 141–153.

[5] *Іванчов М.І.* Обернені задачі та задачі з вільними межами для параболічних рівнянь // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Сер. Математика – 2011. – **1**, №1–2. – С. 109–116.

[6] *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, №2. – С. 294–304.

[7] *Кожанов А. И.* О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2004. – №30. – С. 63–69.

[8] *Кузь А.М., Пташник Б.Й.* Задача з інтегральними умовами для рівняння Клейна-Гордона у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними// Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вип. 8 – С. 41–53.

[9] *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1982. — 272 с.

[10] *Медвідь О.М., Симотюк М.М.* Задача з інтегральними умовами для псевдодиференціальних рівнянь // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Сер. Математика – 2004. – Вип. 191–192. – С. 109–116.

[11] *Медвідь О.М., Симотюк М.М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь з частинними похідними // Математичні студії. – 2007. – **28**, № 2. – С. 115–141.

[12] *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч.1. – 391 с.

[13] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[14] *Пулькина, Л. С.* Нелокальная задача для уравнения теплопроводности//Неклассические задачи математической физики. ИМ СО АН. – Новосибирск. – 2005. – С. 231–239.

[15] *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917. – 308+XIV с.

[16] *Тимків І.Р.* Багатоточкова задача із кратними вузлами для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами // Карпатські математичні публікації. – 2011. – **3**, №2. – С. 120–130.

[17] *Шубин М.А.* Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными// Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, №2. – С. 3–47.

[18] *Штабалюк П.І.* Про майже періодичні розв'язки однієї задачі з нелокальними умовами//Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка": Диференц. рівняння та їх застосування. – 1995. – №286. – С. 153–165.

[19] *Besicovitch A.S.* Almost periodic functions. – Cambridge: Dover Publications, Inc., 1954. – 180 p.

[20] *Cannon J.R.* The solution of the heat equation sub ject to the specification of energy// Quart. Appl. Math. – 1963 – **21**, №2. – P. 155–160.

[21] *Bouzit M., Teyar N.* A Class of Third Order Parabolic Equations with Integral Conditions//Int. Journal of Math. Analysis, – 2009. – **3**, no. 18. – P. 871–877.

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.М. Кузь

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Пидстрыгача НАН Украины, ул. Наукова, 3-б, Львов, 79060, Украина

Исследовано задачу с условиями, которые являются линейной комбинацией многоточечных и интегральных условий по временной переменной, для факторизованого параболического за Петровским оператора с переменными по времени коэффициентами в классе функций, почти периодических по пространственных переменных. Найдено критерий единственности и достаточные условия существования решения указанной задачи в различных функциональных пространствах. Для решения проблемы малых знаменателей использован метрический подход.

Ключевые слова: многоточечные условия, интегральные условия, почти периодические функции, мера Лебега, параболическое уравнение, малые знаменатели.

2000 MSC: 35K35, 35B15, 35B30

УДК: 517.95+511.2

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION WITH RESPECT TO THE TIME VARIABLE FOR FACTORIZED PARABOLIC OPERATOR WITH VARIABLE COEFFICIENTS

A.M. Kuz

Ya.Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics NAS of Ukraine
3-b Naukova Str., Lviv, Ukraine

The problem with conditions, which are linear combination of multipoint and integral conditions with respect to the time variable for the factorized parabolic equation with variable coefficients in a class of functions, almost periodic for the spatial variables is investigated. The criterion of uniqueness and sufficient conditions of existence of the solution to the problem in different functional spaces are established. To solve the problem of small denominators a metric approach is used.

Key words: multipoint conditions, integral conditions, almost periodic functions, Lebesque measure, parabolic equation, small denominators

2000 MSC: 35K35, 35B15, 35B30

УДК: 517.95+511.2