ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.740 № 740, (2012) с. 19–24

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.740 No 740, (2012) 19–24

ГРАНИЧНІ ЗНАЧЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ, ОБМЕЖЕНИХ У КІЛЬЦЯХ ФУНКЦІЙ

І.П. Кшановський

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 19 вересня 2012 р.)

Доведено, що для аналітичної, обмеженої за модулем, функції в кільці існують радіальні граничні значення майже скрізь на межі кільця та отримано зображення функції через ці граничні значення.

Ключові слова: аналітична функція, формула Пуассона.

2000 MSC: 30D35

УДК: 517.53

Введемо такі позначення:

$$A(\rho_1, \rho_2) = \{z : \rho_1 < |z| < \rho_2\}, \quad 0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty.$$

$$\mathcal{P}(x, X, T-t) = \frac{X^2 - x^2}{X^2 - 2Xxcos(T-t) + x^2},$$
$$X > 0,\ x > 0,\ T, t \in \mathbb{R}.$$

Теорема. *Нехай $f(z)$ – аналітична, обмежена за модулем функція в кільці $A(R_1^0, R_2^0)$, $0 < R_1^0 < R_2^0 < \infty$. Тоді для неї існують радіальні граничні значення $f(R_1^0e^{i\varphi}) = \lim\limits_{r\to R_1^0} f(re^{i\varphi})$ та $f(R_2^0e^{i\varphi}) = \lim\limits_{r\to R_2^0} f(re^{i\varphi})$ майже скрізь і справедливе таке зображення*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_2^0e^{i\theta})\mathcal{P}(r, R_2^0, \theta-\varphi)d\theta-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(R_1^0e^{i\theta}\right)\mathcal{P}(r, R_1^0, \theta-\varphi)d\theta+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_1^0e^{i\theta})\frac{rR_1^0e^{i\theta}}{rR_1^0e^{i\theta} - (R_2^0)^2e^{i\varphi}}d\theta-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_2^0e^{i\theta})\frac{rR_2^0e^{i\theta}}{rR_2^0e^{i\theta} - (R_1^0)^2e^{i\varphi}}d\theta. \qquad (1)$$

Зауваження. Інтеграли в рівності (1) слід розуміти в сенсі інтеграла Лебега.

Доведення. Розглянемо R_1, R_2 такі, що $R_1^0 < R_1 < R_2 < R_2^0$. Приймемо $z = re^{i\varphi}$, $R_1 < r < R_2$. За інтегральною формулою Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\xi|=R_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - \int\limits_{|\xi|=R_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(R_2e^{i\theta})\frac{R_2e^{i\theta}}{R_2e^{i\theta} - re^{i\varphi}}d\theta-\right.$$
$$\left.-\int_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{R_1e^{i\theta}}{R_1e^{i\theta} - re^{i\varphi}}d\theta\right). \qquad (2)$$

Оскільки $z_1 = \frac{R_2^2}{\bar{z}} = \frac{R_2^2}{r}e^{i\varphi} \notin A(R_1, R_2)$ і $z_2 = \frac{R_1^2}{\bar{z}} = \frac{R_1^2}{r}e^{i\varphi} \notin A(R_1, R_2)$, то одержимо

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\xi|=R_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z_1}d\xi - \int\limits_{|\xi|=R_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z_1}d\xi\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(R_2e^{i\theta})\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta} - R_2e^{i\varphi}}d\theta-\right.$$
$$\left.-\int_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{rR_1e^{i\theta}}{rR_1e^{i\theta} - R_2^2e^{i\varphi}}d\theta\right), \qquad (3)$$

а також

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\xi|=R_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z_2}d\xi - \int\limits_{|\xi|=R_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z_2}d\xi\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(R_2e^{i\theta})\frac{rR_2e^{i\theta}}{rR_2e^{i\theta} - R_1^2e^{i\varphi}}d\theta-\right.$$
$$\left.-\int_0^{2\pi} f\left(R_1e^{i\theta}\right)\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta} - R_1e^{i\varphi}}d\theta\right). \qquad (4)$$

Віднявши (3) та (4) від (2), отримаємо таку рівність:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_2e^{i\theta})\mathcal{P}(r, R_2, \theta-\varphi)d\theta-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(R_1e^{i\theta}\right)\mathcal{P}(r, R_1, \theta-\varphi)d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{rR_1e^{i\theta}}{rR_1e^{i\theta}-R_2^2e^{i\varphi}}d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_2e^{i\theta})\frac{rR_2e^{i\theta}}{rR_2e^{i\theta}-R_1^2e^{i\varphi}}d\theta. \qquad (5)$$

Нехай $f(z)$ – аналітична в кільці $A(R_1^0,R_2^0)$ та обмежена за модулем функція: $|f(z)|\le M$. Оскільки $\int\limits_{\partial A(R_1,R_2)}\frac{f(\xi)}{\xi}d\xi=0$, то $\int\limits_0^{2\pi}(f(R_2e^{i\theta})-f(R_1e^{i\theta}))d\theta=0$.

Позначимо

$$\int\limits_0^{\theta}(f(R_2e^{i\alpha})-f(R_1e^{i\alpha}))d\alpha=F_{R_2}(\theta).$$

Очевидно, що $F_{R_2}(0)=F_{R_2}(2\pi)=0$.

Розглянемо

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_2e^{i\theta})\mathcal{P}(r,R_2,\theta-\varphi)d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(f(R_2e^{i\theta})-f(R_1e^{i\theta}))\mathcal{P}(r,R_2,\theta-\varphi)d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\mathcal{P}(r,R_2,\theta-\varphi)d\theta.$$

Інтегруючи частинами, отримаємо

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F_{R_2}(\theta)\frac{2rR_2(R_2^2-r^2)\sin(\theta-\varphi)d\theta}{(R_2^2-2rR_2\cos(\theta-\varphi)+r^2)^2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\mathcal{P}(r,R_2,\theta-\varphi)d\theta.$$

Аналогічно, знаходимо

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_2e^{i\theta})\frac{rR_2e^{i\theta}}{rR_2e^{i\theta}-R_1^2e^{i\varphi}}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(f(R_2e^{i\theta})-f(R_1e^{i\theta}))\frac{rR_2e^{i\theta}}{rR_2e^{i\theta}-R_1^2e^{i\varphi}}d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{rR_2e^{i\theta}}{rR_2e^{i\theta}-R_1^2e^{i\varphi}}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F_{R_2}(\theta)\frac{irR_2R_1^2e^{i(\theta+\varphi)}d\theta}{(rR_2e^{i\theta}-R_1^2e^{i\varphi})^2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{rR_2e^{i\theta}}{rR_2e^{i\theta}-R_1^2e^{i\varphi}}d\theta.$$

Отже,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F_{R_2}(\theta)\frac{2rR_2(R_2^2-r^2)\sin(\theta-\varphi)d\theta}{(R_2^2-2rR_2\cos(\theta-\varphi)+r^2)^2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\mathcal{P}(r,R_2,\theta-\varphi)d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(R_1e^{i\theta}\right)\mathcal{P}(r,R_1,\theta-\varphi)d\theta+$$

$$++\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{rR_1e^{i\theta}}{rR_1e^{i\theta}-R_2^2e^{i\varphi}}d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F_{R_2}(\theta)\frac{irR_2R_1^2e^{i(\theta+\varphi)}d\theta}{(rR_2e^{i\theta}-R_1^2e^{i\varphi})^2}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{rR_2e^{i\theta}}{rR_2e^{i\theta}-R_1^2e^{i\varphi}}d\theta. \qquad (6)$$

Зауважимо, що сім'я функцій $\{F_{R_2}(\theta)\}$ рівномірно неперервна:

$$|F_{R_2}(\theta_2)-F_{R_2}(\theta_1)|=\left|\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}(f(R_2e^{i\alpha})-f(R_1e^{i\alpha}))d\alpha\right|<$$

$$<2M|\theta_2-\theta_1|,$$

крім того вона задовольняє умови $F_{R_2}(0)=F_{R_2}(2\pi)=0$. Отже, існує зростаюча послідовність $\{R_{2.n}\}$, $R_{2.n}\to R_2^0$, така, що сім'я функцій $\{F_{R_{2.n}}(\theta)\}$ рівномірно збігається на сегменті $[0;2\pi]$ до функції $F(\theta)$, що задовольняє умови

$$|F(\theta_2)-F(\theta_1)|\le 2M|\theta_2-\theta_1|, \qquad F(0)=F(2\pi)=0.$$

Продовжимо функцію $F(\theta)$ на множину всіх дійсних чисел, як неперервну періодичну функцію з періодом 2π.

Переходячи до границі по послідовності $\{R_{2.n}\}$, отримаємо

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F(\theta)\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)\sin(\theta-\varphi)d\theta}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos(\theta-\varphi)+r^2)^2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\mathcal{P}(r,R_2^0,\theta-\varphi)d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(R_1e^{i\theta}\right)\mathcal{P}(r,R_1,\theta-\varphi)d\theta+$$

$$++\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{rR_1e^{i\theta}}{rR_1e^{i\theta}-(R_2^0)^2e^{i\varphi}}d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\theta)\frac{irR_2^0R_1^2e^{i(\theta+\varphi)}d\theta}{(rR_2^0e^{i\theta}-R_1^2e^{i\varphi})^2}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{rR_2^0e^{i\theta}}{rR_2^0e^{i\theta}-R_1^2e^{i\varphi}}d\theta. \quad (7)$$

Розглянемо рівність, отриману в результаті віднімання (3) від (2)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_2e^{i\theta})\mathcal{P}(r,R_2,\theta-\varphi)d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{rR_1e^{i\theta}}{rR_1e^{i\theta}-R_2^2e^{i\varphi}}d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{R_1e^{i\theta}}{R_1e^{i\theta}-re^{i\varphi}}d\theta. \quad (8)$$

Застосувавши до (8) подібні міркування, які ми застосовували, переходячи від формули (5) до формули (7), матимемо

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\theta)\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)\sin(\theta-\varphi)d\theta}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos(\theta-\varphi)+r^2)^2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\mathcal{P}(r,R_2^0,\theta-\varphi)d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{rR_1e^{i\theta}}{rR_1e^{i\theta}-(R_2^0)^2e^{i\varphi}}d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{R_1e^{i\theta}}{R_1e^{i\theta}-re^{i\varphi}}d\theta. \quad (9)$$

Доведемо, що для кожного φ_0, для якого існує похідна $F'(\varphi_0)=B$, існує границя $\lim\limits_{r\to R_2^0} f(re^{i\theta})$. Зауважимо, що функція $F(\theta)$ задовольняє умову Ліпшиця на відрізку $[0,2\pi]$, отже, має скінченну похідну майже скрізь на цьому відрізку.

Знайдемо такий інтеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{B(e^{i\theta}-1)}{ie^{i\varphi_0}}\cdot\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)\sin(\theta-\varphi)d\theta}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos(\theta-\varphi)+r^2)^2}=$$

$$=\frac{-B}{ie^{i\varphi_0}}\cdot\frac{1}{2\pi}\Bigg(\left(\left(e^{i\theta}-1\right)\mathcal{P}(r,R_2^0,\theta-\varphi)\right)\Big|_0^{2\pi}-$$

$$-\int\limits_0^{2\pi} ie^{i\theta}\mathcal{P}(r,R_2^0,\theta-\varphi)d\theta\Bigg)=$$

$$=\frac{B}{R_2^0e^{i\varphi_0}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} R_2^0e^{i\theta}\mathcal{P}(r,R_2^0,\theta-\varphi)d\theta=\frac{Bre^{i\varphi}}{R_2^0e^{i\varphi_0}}.$$

Отже,

$$\frac{Bre^{i\varphi}}{R_2^0e^{i\varphi_0}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{B(e^{i\theta}-1)}{ie^{i\varphi_0}}\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)\sin(\theta-\varphi)d\theta}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos(\theta-\varphi)+r^2)^2}. \quad (10)$$

Віднявши рівність (10) від рівності (9), та прийнявши $\varphi=\varphi_0$, одержимо

$$f(re^{i\varphi_0})=\frac{Br}{R_2^0}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F_0(\theta)\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)\sin(\theta-\varphi_0)d\theta}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos(\theta-\varphi_0)+r^2)^2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\mathcal{P}(r,R_2^0,\theta-\varphi_0)d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{rR_1e^{i\theta}}{rR_1e^{i\theta}-(R_2^0)^2e^{i\varphi_0}}d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{R_1e^{i\theta}}{R_1e^{i\theta}-re^{i\varphi_0}}d\theta, \quad (11)$$

де

$$F_0(\theta)=F(\theta)-\frac{B(e^{i\theta}-1)}{ie^{i\varphi_0}},$$

$$F(0)=F(2\pi)=0,\quad F_0'(\varphi_0)=F'(\varphi_0)-B=0.$$

Розглянемо інтеграл

$$J_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F_0(\theta)\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)\sin(\theta-\varphi_0)d\theta}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos(\theta-\varphi_0)+r^2)^2}.$$

Зробимо заміну $\theta-\varphi_0=\alpha$. Тоді

$$J_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} F_0(\alpha+\varphi_0)\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)\sin\alpha d\alpha}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos\alpha+r^2)^2}.$$

Оскільки інтеграл від періодичної функції по проміжку, довжина якого дорівнює періоду, не залежить з якого місця розпочинати інтегрування, то

$$J_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_0(\alpha+\varphi_0)\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)\sin\alpha d\alpha}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos\alpha+r^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(F_0(\alpha+\varphi_0)-F_0(\varphi_0))\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)\sin\alpha d\alpha}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos\alpha+r^2)^2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_0(\varphi_0)\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)\sin\alpha d\alpha}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos\alpha+r^2)^2}. \quad (12)$$

Оскільки $F_0'(\varphi_0)=0$, то звідси випливає, що для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що $|F_0(\alpha+\varphi_0)-F_0(\varphi_0)|<\varepsilon|\alpha|$ при

$|\alpha| < \delta$. В першому інтегралі правої частини (12) розіб'ємо проміжок інтегрування на частини: $(-\pi, -\delta)$, $(-\delta, \delta)$, (δ, π). Тоді

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}(F_0(\alpha+\varphi_0)-F_0(\varphi_0))\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)\sin\alpha d\alpha}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos\alpha+r^2)^2}\right| \le$$

$$\le \varepsilon\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left|\alpha\cdot\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)\sin\alpha}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos\alpha+r^2)^2}\right|d\alpha =$$

$$= \varepsilon\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\alpha\cdot\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)\sin\alpha d\alpha}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos\alpha+r^2)^2} =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{\pi}\cdot\frac{\delta((R_2^0)^2-r^2)}{(R_2^0)^2-2rR_2^0\cos\delta+r^2}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot\int_{-\delta}^{\delta}\frac{((R_2^0)^2-r^2)d\alpha}{(R_2^0)^2-2rR_2^0\cos\alpha+r^2} \le$$

$$\le \varepsilon\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{((R_2^0)^2-r^2)d\alpha}{(R_2^0)^2-2rR_2^0\cos\alpha+r^2} = \varepsilon.$$

Позначимо $M_0 = \sup\limits_{[-\pi,\ \pi]}|F_0(\theta)|$. Тоді для суми двох інтегралів, що залишились, справедлива нерівність

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta<|\alpha|<\pi}(F_0(\alpha+\varphi_0)-F_0(\varphi_0))\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)\sin\alpha d\alpha}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos\alpha+r^2)^2}\right| \le 2M_0\cdot\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)}{2\pi}\times$$

$$\times\int\limits_{\delta<|\alpha|<\pi}\frac{d\alpha}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos\alpha+r^2)^2} \le 2M_0\cdot\frac{2(\pi-\delta)}{2\pi}\cdot\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)}{(R_2^0)^2-2rR_2^0\cos\delta+r^2} \le \frac{4M_0\, rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)}{(R_2^0)^2-2rR_2^0\cos\delta+r^2}.$$

Останній інтеграл у рівності (12)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_0(\varphi_0)\frac{2rR_2^0((R_2^0)^2-r^2)\sin\alpha d\alpha}{((R_2^0)^2-2rR_2^0\cos\alpha+r^2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}F_0(\varphi_0)\ \mathcal{P}(r,R_2^0,\alpha)\big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Отже, $J_1 \to 0$ при $r \to R_2^0$.

Далі

$$J_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(R_1e^{i\theta})\mathcal{P}(r,R_2^0,\theta-\varphi_0)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(R_1e^{i\theta})-f(R_1e^{i\varphi_0}))\mathcal{P}(r,R_2^0,\theta-\varphi_0)d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(R_1e^{i\varphi_0})\mathcal{P}(r,R_2^0,\theta-\varphi_0)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(R_1e^{i\theta})-f(R_1e^{i\varphi_0}))\mathcal{P}(r,R_2^0,\theta-\varphi_0)d\theta+$$

$$+f(R_1e^{i\varphi_0}).$$

Користуючись обмеженістю, неперервністю функції $f(R_1e^{i\theta})$ в точці φ_0, властивостями ядра Пуассона та міркуючи подібно, як під час дослідження J_1, доводиться, що інтеграл у правій частині J_2 прямує до нуля при $r \to R_2^0$. Отже, $J_2 \to \to f(R_1e^{i\varphi_0})$ при $r \to R_2^0$.

Переходячи в (11) до границі при $r \to R_2^0$ та враховуючи попередні викладення, матимемо

$$\lim_{r\to R_2^0}f(re^{i\varphi_0}) = B + f(R_1e^{i\varphi_0}). \qquad (13)$$

Тобто, ми довели, що для обмеженої за модулем аналітичної в кільці $A(R_1^0, R_2^0)$ функції існують радіальні граничні значення майже скрізь на колі $|z| = R_2^0$. Позначимо $\lim\limits_{r\to R_2^0}f(re^{i\varphi}) = f(R_2^0e^{i\varphi})$. Тоді з (13)

$$F'(\varphi) = f(R_2^0e^{i\varphi}) - f(R_1e^{i\varphi}).$$

Тому

$$F(\theta) = \int_0^{\theta}(f(R_2^0e^{i\alpha}) - f(R_1e^{i\alpha}))d\alpha.$$

Підставивши це зображення $F(\theta)$ в рівність (7) та проінтегрувавши частинами, отримаємо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(R_2^0e^{i\theta})\mathcal{P}(r,R_2^0,\theta-\varphi)d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(R_1e^{i\theta}\right)\mathcal{P}(r,R_1,\theta-\varphi)d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(R_1e^{i\theta})\frac{rR_1e^{i\theta}}{rR_1e^{i\theta}-(R_2^0)^2e^{i\varphi}}d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(R_2^0e^{i\theta})\frac{rR_2^0e^{i\theta}}{rR_2^0e^{i\theta}-R_1^2e^{i\varphi}}d\theta. \qquad (14)$$

Легко перевірити, що досліжуючи поведінку функції біля межі $|z| = R_1^0$ аналогічно отримаємо таку формулу:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_2e^{i\theta})\mathcal{P}(r, R_2, \theta-\varphi)d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(R_1^0e^{i\theta}\right)\mathcal{P}(r, R_1^0, \theta-\varphi)d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_1^0e^{i\theta})\frac{rR_1^0e^{i\theta}}{rR_1^0e^{i\theta}-R_2^2e^{i\varphi}}d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_2e^{i\theta})\frac{rR_2e^{i\theta}}{rR_2e^{i\theta}-(R_1^0)^2e^{i\varphi}}d\theta. \qquad (15)$$

Додавши рівності (14) та (15), враховуючи те, що з (5)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_2e^{i\theta})\mathcal{P}(r, R_2, \theta-\varphi)d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(R_1e^{i\theta}\right)\mathcal{P}(r, R_1, \theta-\varphi)d\theta =$$

$$= f(z) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{rR_1e^{i\theta}}{rR_1e^{i\theta}-R_2^2e^{i\varphi}}d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_2e^{i\theta})\frac{rR_2e^{i\theta}}{rR_2e^{i\theta}-R_1^2e^{i\varphi}}d\theta,$$

одержимо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_2^0e^{i\theta})\mathcal{P}(r, R_2^0, \theta-\varphi)d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(R_1^0e^{i\theta}\right)\mathcal{P}(r, R_1^0, \theta-\varphi)d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{rR_1e^{i\theta}}{rR_1e^{i\theta}-(R_2^0)^2e^{i\varphi}}d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_1e^{i\theta})\frac{rR_1e^{i\theta}}{rR_1e^{i\theta}-R_2^2e^{i\varphi}}d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_2e^{i\theta})\frac{rR_2e^{i\theta}}{rR_2e^{i\theta}-R_1^2e^{i\varphi}}d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_2e^{i\theta})\frac{rR_2e^{i\theta}}{rR_2e^{i\theta}-(R_1^0)^2e^{i\varphi}}d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_1^0e^{i\theta})\frac{rR_1^0e^{i\theta}}{rR_1^0e^{i\theta}-R_2^2e^{i\varphi}}d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_2^0e^{i\theta})\frac{rR_2^0e^{i\theta}}{rR_2^0e^{i\theta}-R_1^2e^{i\varphi}}d\theta.$$

Перейшовши до границі при $R_2 \to R_2^0$, матимемо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_2^0e^{i\theta})\mathcal{P}(r, R_2^0, \theta-\varphi)d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(R_1^0e^{i\theta}\right)\mathcal{P}(r, R_1^0, \theta-\varphi)d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_1^0e^{i\theta})\frac{rR_1^0e^{i\theta}}{rR_1^0e^{i\theta}-(R_2^0)^2e^{i\varphi}}d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R_2^0e^{i\theta})\frac{rR_2^0e^{i\theta}}{rR_2^0e^{i\theta}-R_1^2e^{i\varphi}}d\theta.$$

Переходячи до границі при $R_1 \to R_1^0$, одержимо рівність (1).

Література

[1] *Khrystiyanyn A., Kondratyuk A.* On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. I // Matematychni Studii 23. – 2005. – P. 19–30.

[2] *Khrystiyanyn A., Kondratyuk A.* On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. II , Matematychni Studii 24. – 2005. – P. 57–68.

[3] *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.

[4] *Кшановський І.* Властивості мероморфних функцій у двозв'язних областях: дис. ... канд. фіз-мат. наук : спец. 01.01.01 "Математичний аналіз". – Львів, 2008. – 138 с.

[5] *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. – М.: Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.

[6] *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.; Л., 1950. – 336 с.

[7] *Хейман У.К.* Мероморфные функции. – М.: Мир, 1966. – 287 с.

ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КОЛЬЦАХ ФУНКЦИЙ

И.П. Кшановский

Национальный университет "Львівська політехника",
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

Доказано, что для аналитической ограниченной функции в кольце существуют радиальные граничные значения почти везде на границе кольца и получено представление функции через эти значения.

Ключевые слова: аналитическая функция, формула Пуассона.

2000 MSC: 30D35

УДК: 517.53

BOUNDARY VALUES OF ANALYTIC BOUNDED FUNCTIONS ON ANNULI

I.P. Kshanovskyy

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

We prove that analytic bounded function on annuli has radial limits values almost everywhere and obtain representation of the function via these values.

Key words: analytic function, Poisson formula.

2000 MSC: 30D35

УДК: 517.53