ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.740 № 740, (2012) с. 13–18

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.740 No 740, (2012) 13–18

ФОРМУЛА ДЛЯ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ПОХІДНОЇ МЕРОМОРФНОЇ В КІЛЬЦІ ФУНКЦІЇ

О.В. Веселовська, І.П. Кшановський

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 19 вересня 2012 р.)

Отримано формулу для логарифмічної похідної функцій, мероморфних у симетричному кільці.

Ключові слова: мероморфна функція, логарифмічна похідна.

2000 MSC: 30D35

УДК: 517.53

Багато задач та проблем комплексного аналізу потребують вивчення властивостей мероморфних функцій у двозв'язних областях. За теоремою про відображення двозв'язних областей кожна двозв'язна область конформно еквівалентна деякому кільцю $\{z : r < |z| < R\}$, $0 \le r < R \le +\infty$. У випадку, коли $0 < r < R < +\infty$ гомотетія $z \mapsto z/\sqrt{rR}$ зводить це кільце до симетричного кільця

$$\{z : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\}, \quad R_0 = \sqrt{\frac{R}{r}}.$$

Таким чином у цьому випадку та у випадку, коли $r = 0$, $R = +\infty$ одночасно, область є інваріантною відносно інверсії $z \mapsto \frac{1}{z}$. Нещодавно А.А. Кондратюк, А.Я. Христіянин [1,2] запропонували новий підхід до теорії розподілу значень мероморфних у кільцях функцій. Вони одержали аналог теореми Йенсена для кілець, інваріантних відносно інверсії $z \mapsto \frac{1}{z}$, ввели однопараметричні аналоги характеристик Неванлінни та Símідзу-Альфорса, вивчили основні їх властивості.

Вагоме значення в теорії розподілу значень мероморфних функцій та її застосуваннях має вивчення властивостей логарифмічної похідної. У роботі отримано формулу для логарифмічної похідної функцій, мероморфних в симетричних кільцях.

Позначимо $A(R) = \{z : 1/R < |z| < R\}$, $1 < R < R_0 \le \infty$, $A^R = \{z : 1 < |z| < R\}$, $A_{1/R} = \{z : 1/R < |z| < 1\}$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Теорема 1. *Нехай функція f мероморфна у кільці $A(R_0) = \{z : 1/R_0 < |z| < R_0\}$, і $1 < R < R_0 \le \infty$. Нехай $\{a_\mu\}$ – послідовність нулів, а $\{b_\nu\}$ – послідовність полюсів функції f у кільці $A(R_0)$. При $z = re^{i\varphi}$, $1/R < r < R$,* справедлива рівність

$$\begin{gathered}\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^2} d\theta - -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(\frac{1}{R}e^{i\theta}\right)\right| \left(\frac{2Re^{i\theta}}{(Rz-e^{i\theta})^2}\right) d\theta + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})| \left(\frac{2R^2e^{i\theta}}{(R^2z-e^{i\theta})^2} - \frac{2R^2e^{i\theta}}{(R^2e^{i\theta}-z)^2}\right) d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \log|f(\rho e^{i\theta})|}{\partial \rho}\right)\Bigg|_{\rho=1} \left(\frac{1}{z-\frac{e^{i\theta}}{R^2}} - \frac{1}{z-R^2e^{i\theta}}\right) d\theta + \\ + \sum_{a_\mu \in A^R} \left(\frac{1}{z-a_\mu} + \frac{\overline{a}_\mu}{R^2-\overline{a}_\mu z}\right) + \sum_{a_\mu \in A_{1/R}} \left(\frac{1}{z-a_\mu} + \frac{\overline{a}_\mu}{\frac{1}{R^2}-\overline{a}_\mu z}\right) + \sum_{a_\mu \in \mathbb{T}} \left(\frac{1}{z-a_\mu} + \frac{\overline{a}_\mu}{2(R^2-\overline{a}_\mu z)} + \frac{\overline{a}_\mu}{2\left(\frac{1}{R^2}-\overline{a}_\mu z\right)}\right) - \\ - \sum_{b_\nu \in A^R} \left(\frac{1}{z-b_\nu} + \frac{\overline{b}_\nu}{R^2-\overline{b}_\nu z}\right) - \sum_{b_\nu \in A_{1/R}} \left(\frac{1}{z-b_\nu} + \frac{\overline{b}_\nu}{\frac{1}{R^2}-\overline{b}_\nu z}\right) - \sum_{b_\nu \in \mathbb{T}} \left(\frac{1}{z-b_\nu} + \frac{\overline{b}_\nu}{2(R^2-\overline{b}_\nu z)} + \frac{\overline{b}_\nu}{2\left(\frac{1}{R^2}-\overline{b}_\nu z\right)}\right).\end{gathered} \tag{1}$$

Для доведення теореми 1 нам знадобляться такі результати.

Нехай f – мероморфна у кільці $A(R_0)$ функція така, що $f(z) \ne 0, \infty$, $z \in \mathbb{T}$. Через A^* позначимо $A(R_0)$ без інтервалів $\{z = \tau a,\ \tau \ge 1\}$, якщо $|a| > 1$ та $\{z = \tau a,\ 0 \le \tau \le 1\}$, якщо $|a| < 1$, де a пробігає множину нулів та полюсів функції f.

Лема А.([4, с.39]) *Нехай функція f мероморфна у кільці $A(R_0)$, $f(z) \ne 0, \infty$, $z \in \mathbb{T}$. Тоді для будь-якого замкненого шляху γ в A^*, $\gamma(0) = 1$, існує*

© О.В. Веселовська, І.П. Кшановський, 2012

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$k == \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz \in \mathbb{Z}$ *таке, що для функції* $g(z) = z^{-k}f(z)$ *виконується*

$$\int\limits_{\gamma}\frac{g'(z)}{g(z)}dz = 0.$$

Лема А дозволяє визначити однозначну вітку логарифму функції $g(z) == z^{-k}f(z)$ в області A^*. Справді, нехай $z_0 = 1$, і $\log g(z_0)$ визначено. Приймемо

$$\log g(z) = \log g(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z}\frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}d\zeta,$$

де інтеграл береться вздовж шляху, що сполучає точки z_0 та z в області A^*.

Теорема B.([4, с.41]) *Нехай функція f мероморфна у кільці $A(R_0) = \{z : 1/R_0 < |z| < R_0\}$, і $1 < R < R_0 \le \infty$. Нехай $\{a_\mu\}$ – послідовність нулів, а $\{b_\nu\}$ – послідовність полюсів функції f у кільці $A(R_0)$. При $z = re^{i\varphi}$, $1/R < r < R$, справедлива рівність*

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\mathcal{P}(r,R,\theta-\varphi)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|f\left(\frac{1}{R}e^{i\theta}\right)\right|\mathcal{P}(1,rR,\theta-\varphi)d\theta -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|\left(\mathcal{P}(r,R^2,\theta-\varphi)+\mathcal{P}(1,rR^2,\theta-\varphi)\right)d\theta - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\log|f(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho=1}\log\left|\frac{R^2-e^{-i\theta}z}{\frac{1}{R^2}-e^{-i\theta}z}\right|d\theta -$$

$$-\sum_{a_\mu\in A^R}G_R(a_\mu,z) - \sum_{a_\mu\in A_{1/R}}G_{1/R}(a_\mu,z) - \frac{1}{2}\sum_{a_\mu\in\mathbb{T}}G_R(a_\mu,z) - \frac{1}{2}\sum_{a_\mu\in\mathbb{T}}G_{1/R}(a_\mu,z) + \sum_{b_\nu\in A^R}G_R(b_\nu,z) +$$

$$+\sum_{b_\nu\in A_{1/R}}G_{1/R}(b_\nu,z) + \frac{1}{2}\sum_{b_\nu\in\mathbb{T}}G_R(b_\nu,z) + \frac{1}{2}\sum_{b_\nu\in\mathbb{T}}G_{1/R}(b_\nu,z) + 2k(f)\log R, \qquad (2)$$

де

$$k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{f'(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})}ie^{i\theta}\right)d\theta, \quad G_d(\xi,z) = \log\left|\frac{d^2-\xi\overline{z}}{d(\xi-z)}\right|,\ d>0,$$

$\mathcal{P}(x,X,T-t) = \frac{X^2-x^2}{X^2-2Xx\cos(T-t)+x^2} = Re\frac{Xe^{iT}+xe^{it}}{Xe^{iT}-xe^{it}}$ *- ядро Пуассона.*

Доведення теореми 1. Зауважимо, що у випадку, коли $f(z)\neq 0,\ \infty,\ z\in\mathbb{T}$,

$$k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{f'(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})}ie^{i\theta}\right)d\theta =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz \in \mathbb{Z}.$$

Випадок 1. Припустимо, що $f(z)$ не має полюсів в кільці $A(R)$ і $f(z)\neq 0$, $z\in\mathbb{T}$. Нехай $g(z) = z^{-k}f(z)$, $k = k(f)$. Тоді

$$\log|g(z)| = \log|f(z)| - k\log|z|, \qquad (3)$$

$$\left(\frac{\partial\log|g(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho=1} = \left(\frac{\partial\log|f(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho=1} - k. \qquad (4)$$

Використовуючи рівність [5, с. 27]

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|d\theta = \log^+|a|,\ a\in\mathbb{C},$$

знайдемо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|\frac{R^2-e^{-i\theta}z}{\frac{1}{R^2}-e^{-i\theta}z}\right|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|R^2-e^{i\theta}\overline{z}|d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|\frac{1}{R^2}-e^{i\theta}\overline{z}\right|d\theta = \log|z| + \log^+\left|\frac{R^2}{\overline{z}}\right| -$$

$$-\log|z| - \log^+\left|\frac{1}{R^2\overline{z}}\right| = \log\left|\frac{R^2}{\overline{z}}\right| = 2\log R - \log r. \quad (5)$$

Віднявши в (2) з двох боків $k\log|z|$ та враховуючи рівності (3)–(5), отримаємо

$$\log|g(z)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\mathcal{P}(r,R,\theta-\varphi)d\theta -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|\left(\mathcal{P}(r,R^2,\theta-\varphi)+\mathcal{P}(1,rR^2,\theta-\varphi)\right)d\theta +$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|f\left(\frac{1}{R}e^{i\theta}\right)\right|\mathcal{P}(1,rR,\theta-\varphi)d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\log|g(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\right)\Big|_{\rho=1}\log\left|\frac{R^2-e^{-i\theta}z}{\frac{1}{R^2}-e^{-i\theta}z}\right|d\theta-$$

$$-\sum_{a_\mu\in A^R}G_R(a_\mu,z)-\sum_{a_\mu\in A_{1/R}}G_{1/R}(a_\mu,z). \quad (6)$$

Позначимо $h(z)=\dfrac{R^2-e^{-i\theta}z}{\frac{1}{R^2}-e^{-i\theta}z}$. Тоді

$$k(h)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{h'(z)}{h(z)}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\left(\frac{-e^{-i\theta}}{R^2-e^{-i\theta}z}+\frac{e^{-i\theta}}{\frac{1}{R^2}-e^{-i\theta}z}\right)dz=-1.$$

Нехай $V_{x,w}(z):=\dfrac{x(z-w)}{x^2-\overline{w}z}, x\in\mathbb{R}, x>0,\ w\in A(R_0)$, $z\in A(R_0)$. Тоді для довільних $w_1\in A^R,\ w_2\in A_{1/R}$ матимемо

$$k(V_{R,w_1})=\frac{R^2-|w_1^2|}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-w_1)(R^2-\overline{w_1}z)}=0,$$

$$k(V_{1/R,w_2})=\frac{\frac{1}{R^2}-|w_2^2|}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-w_2)(\frac{1}{R^2}-\overline{w_2}z)}=$$

$$=\left(\frac{1}{R^2}-|w_2^2|\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{R^2}-|w_2^2|}-\frac{1}{\overline{w_2}}\frac{1}{\left(\frac{1}{R^2\overline{w_2}}-w_2\right)}\right)=0.$$

Лема А дозволяє визначити однозначні вітки логарифмів функцій $zh(z)$, $\dfrac{R(z-a_\mu)}{R^2-\overline{a}_\mu z}$, $a_\mu\in A^R$, $\dfrac{\frac{1}{R}(z-a_\mu)}{\frac{1}{R^2}-\overline{a}_\mu z}$, $a_\mu\in A_{1/R}$. Оскільки, з умов Коші-Рімана

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\log|g(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\right)\Big|_{\rho=1}\log|z|d\theta=$$

$$=\frac{\log|z|}{2\pi}Var_{\gamma_0^1}arg(g(z))=\frac{\log|z|}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0^1}\frac{g'(z)}{g(z)}dz=0,$$

то

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\log|g(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\right)\Big|_{\rho=1}\log\left|\frac{R^2-e^{-i\theta}z}{\frac{1}{R^2}-e^{-i\theta}z}\right|d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\log|g(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\right)\Big|_{\rho=1}\log\left|\frac{z(R^2-e^{-i\theta}z)}{\frac{1}{R^2}-e^{-i\theta}z}\right|d\theta.$$

Далі, зауважимо, що

$$\mathcal{P}(r,R,\theta-\varphi)=Re\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z},$$

$$\mathcal{P}(1,rR,\theta-\varphi)=Re\frac{Rre^{i\theta}+e^{i\varphi}}{Rre^{i\theta}-e^{i\varphi}}=Re\frac{Rre^{-i\theta}+e^{-i\varphi}}{Rre^{-i\theta}-e^{-i\varphi}}=$$

$$=Re\frac{Rz+e^{i\theta}}{Rz-e^{i\theta}},$$

$$\mathcal{P}(r,R^2,\theta-\varphi)=Re\frac{R^2e^{i\theta}+z}{R^2e^{i\theta}-z},$$

$$\mathcal{P}(1,rR^2,\theta-\varphi)=Re\frac{R^2z+e^{i\theta}}{R^2z-e^{i\theta}}.$$

З огляду на попередні рівності та (6) стверджуємо, що

$$\log(g(z))=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}d\theta-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|\left(\frac{R^2e^{i\theta}+z}{R^2e^{i\theta}-z}+\frac{R^2z+e^{i\theta}}{R^2z-e^{i\theta}}\right)d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|f\left(\frac{1}{R}e^{i\theta}\right)\right|\frac{Rz+e^{i\theta}}{Rz-e^{i\theta}}d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\log|g(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\right)\Big|_{\rho=1}\log\left(\frac{z(R^2-e^{-i\theta}z)}{\frac{1}{R^2}-e^{-i\theta}z}\right)d\theta+$$

$$+\sum_{a_\mu\in A^R}\log\left(\frac{R(z-a_\mu)}{R^2-\overline{a}_\mu z}\right)+\sum_{a_\mu\in A_{1/R}}\log\left(\frac{\frac{1}{R}(z-a_\mu)}{\frac{1}{R^2}-\overline{a}_\mu z}\right)+iC. \quad (7)$$

Дійсно, права та ліва частини (7) є аналітичними функціями змінної z. В силу формули (6) дійсні частини цих функцій співпадають. Звідси, з умов Коші-Рімана, слідує, що функції рівні з точністю до уявної сталої. Диференціюючи рівність (7), отримаємо

$$\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{k}{z}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^2}d\theta-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|\left(\frac{2R^2e^{i\theta}}{(R^2e^{i\theta}-z)^2}-\frac{2R^2e^{i\theta}}{(R^2z-e^{i\theta})^2}\right)d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|f\left(\frac{1}{R}e^{i\theta}\right)\right|\left(\frac{-2Re^{i\theta}}{(Rz-e^{i\theta})^2}\right)d\theta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\log|g(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\right)\Big|_{\rho=1}\left(\frac{1}{z-R^2e^{i\theta}}-\frac{1}{z-\frac{e^{i\theta}}{R^2}}+\frac{1}{z}\right)d\theta+$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$+\sum_{a_\mu\in A^R}\left(\frac{1}{z-a_\mu}+\frac{\overline{a}_\mu}{R^2-\overline{a}_\mu z}\right)+\sum_{a_\mu\in A_{1/R}}\left(\frac{1}{z-a_\mu}+\frac{\overline{a}_\mu}{\frac{1}{R^2}-\overline{a}_\mu z}\right). \tag{7}$$

З огляду на рівність (4) та враховуючи те, що

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\log|g(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\right)\Big|_{\rho=1}\frac{1}{z}d\theta=0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{z-R^2e^{i\theta}}-\frac{1}{z-\frac{e^{i\theta}}{R^2}}\right)d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\left(\frac{1}{z-R^2\xi}-\frac{1}{z-\frac{\xi}{R^2}}\right)\frac{d\xi}{\xi}=-\frac{1}{z},$$

матимемо

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^2}d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|f\left(\frac{1}{R}e^{i\theta}\right)\right|\left(\frac{2Re^{i\theta}}{(Rz-e^{i\theta})^2}\right)d\theta+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|\left(\frac{2R^2e^{i\theta}}{(R^2z-e^{i\theta})^2}-\frac{2R^2e^{i\theta}}{(R^2e^{i\theta}-z)^2}\right)d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\log|f(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\right)\Big|_{\rho=1}\left(\frac{1}{z-\frac{e^{i\theta}}{R^2}}-\frac{1}{z-R^2e^{i\theta}}\right)d\theta+$$

$$+\sum_{a_\mu\in A^R}\left(\frac{1}{z-a_\mu}+\frac{\overline{a}_\mu}{R^2-\overline{a}_\mu z}\right)+$$

$$+\sum_{a_\mu\in A_{1/R}}\left(\frac{1}{z-a_\mu}+\frac{\overline{a}_\mu}{\frac{1}{R^2}-\overline{a}_\mu z}\right), \tag{8}$$

що й доводить формулу (1) у випадку 1.

Випадок 2. Функція $f(z)$ має нулі на одиничному колі та не має полюсів в кільці $A(R)$. Тоді $f_0(z)=f(z)/\prod\limits_{a_\mu\in\mathbb{T}}$ - аналітична в $A(R)$ функція без нулів на одиничному колі. Користуючись класичною формулою для логарифмічної похідної [3, с. 17], обчислимо інтеграли, у випадку, коли $a_\mu\in\mathbb{T}$.

$$I_{1.\mu}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|Re^{i\theta}-a_\mu|\frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^2}d\theta=\frac{-\overline{a}_\mu}{R^2-\overline{a}_\mu z},$$

$$I_{2.\mu}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|\frac{1}{R}e^{i\theta}-a_\mu\right|\frac{2Re^{i\theta}}{(Rz-e^{i\theta})^2}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|Re^{i\theta}-a_\mu R^2\right|\frac{2Re^{i\theta}}{(Rz-e^{i\theta})^2}d\theta-$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log R^2\frac{2Re^{i\theta}}{(Rz-e^{i\theta})^2}d\theta=B_{1.\mu}-B_{2.\mu}.$$

$$\overline{B}_{1.\mu}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|Re^{i\theta}-a_\mu R^2\right|\left(\overline{\frac{2Re^{i\theta}}{(Rz-e^{i\theta})^2}}\right)d\theta=$$

$$=\frac{1}{(\overline{z})^2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|Re^{i\theta}-a_\mu R^2\right|\frac{2Re^{i\theta}}{\left(Re^{i\theta}-\frac{1}{\overline{z}}\right)^2}d\theta=$$

$$=\frac{1}{\overline{z}-a_\mu R^2(\overline{z})^2};$$

$$B_{2.\mu}=\frac{\log R^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2Re^{i\theta}}{(Rz-e^{i\theta})^2}d\theta=$$

$$=\frac{\log R^2}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{2Rd\xi}{(\xi-Rz)^2}=0.$$

Отже, $I_{2.\mu}=\dfrac{1}{z(1-\overline{a}_\mu R^2 z)}$. Подібним способом обчислюємо

$$I_{3.\mu}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|e^{i\theta}-a_\mu\right|\frac{2R^2e^{i\theta}}{(R^2z-e^{i\theta})^2}d\theta=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|R^2e^{i\theta}-R^2a_\mu\right|\frac{2R^2e^{i\theta}}{(R^2z-e^{i\theta})^2}d\theta-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log R^2\frac{2R^2e^{i\theta}}{(R^2z-e^{i\theta})^2}d\theta=B_{3.\mu}-B_{4.\mu}.$$

$$\overline{B}_{3.\mu}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|R^2e^{i\theta}-R^2a_\mu\right|\left(\overline{\frac{2R^2e^{i\theta}}{(R^2z-e^{i\theta})^2}}\right)d\theta=$$

$$=\frac{1}{2(\overline{z})^2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|R^2e^{i\theta}-R^2a_\mu\right|\frac{2R^2e^{i\theta}}{\left(R^2e^{i\theta}-\frac{1}{\overline{z}}\right)^2}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2(\overline{z}-R^2a_\mu\overline{z}^2)}.$$

$$B_{4.\mu}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log R^2\frac{2R^2e^{i\theta}}{(R^2z-e^{i\theta})^2}d\theta=$$

$$=\frac{\log R^2}{4\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{2R^2d\xi}{(\xi-R^2z)^2}=0.$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Отже, $I_{3.\mu} = \dfrac{1}{2z(1 - R^2\overline{a}_\mu z)}$.

$$I_{4.\mu} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} - a_\mu| \frac{2R^2e^{i\theta}}{(R^2e^{i\theta} - z)^2} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2R^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} - a_\mu| \frac{2e^{i\theta}}{\left(e^{i\theta} - \frac{z}{R^2}\right)^2} d\theta = \frac{1}{2(z - a_\mu R^2)}.$$

Далі, нехай $a_\mu = e^{i\theta_\mu}$. Знайдемо

$$\left(\frac{\partial \log|\rho e^{i\theta} - a_\mu|}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho=1} =$$

$$= \left(\frac{\partial \log\sqrt{(\rho\cos\theta - \cos\theta_\mu)^2 + (\rho\sin\theta - \sin\theta_\mu)^2}}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho=1} =$$

$$= \frac{1 - \cos(\theta - \theta_\mu)}{(\cos\theta - \cos\theta_\mu)^2 + (\sin\theta - \sin\theta_\mu)^2} = \frac{1}{2}.$$

Застосувавши формулу (8) до функції $f_0(z) = \dfrac{f(z)}{\prod\limits_{|a_\mu|=1}(z - a_\mu)}$, отримаємо

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{a_\mu\in\mathbb{T}} \frac{1}{z - a_\mu} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)^2} d\theta -$$

$$- \sum_{a_\mu\in\mathbb{T}} I_{1.\mu} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(\frac{1}{R}e^{i\theta}\right)\right| \frac{2Re^{i\theta}}{(Rz - e^{i\theta})^2} d\theta +$$

$$+ \sum_{a_\mu\in\mathbb{T}} I_{2.\mu} + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})| \left(\frac{2R^2e^{i\theta}}{(R^2z - e^{i\theta})^2} - \frac{2R^2e^{i\theta}}{(R^2e^{i\theta} - z)^2}\right) d\theta -$$

$$- \sum_{a_\mu\in\mathbb{T}} I_{3.\mu} + \sum_{a_\mu\in\mathbb{T}} I_{4.\mu} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \log|f(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho=1} \left(\frac{1}{z - \frac{e^{i\theta}}{R^2}} - \frac{1}{z - R^2e^{i\theta}}\right) d\theta -$$

$$- \sum_{a_\mu\in\mathbb{T}} \frac{1}{2z} + + \sum_{a_\mu\in A^R} \left(\frac{1}{z - a_\mu} + \frac{\overline{a}_\mu}{R^2 - \overline{a}_\mu z}\right) +$$

$$+ \sum_{a_\mu\in A_{1/R}} \left(\frac{1}{z - a_\mu} + \frac{\overline{a}_\mu}{\frac{1}{R^2} - \overline{a}_\mu z}\right),$$

Легко перевірити,що

$$\frac{1}{z - a_\mu} - I_{1.\mu} + I_{2.\mu} - I_{3.\mu} + I_{4.\mu} - \frac{1}{2z} =$$

$$= \frac{1}{z - a_\mu} + \frac{\overline{a}_\mu}{2(R^2 - \overline{a}_\mu z}) + \frac{\overline{a}_\mu}{2\left(\frac{1}{R^2} - \overline{a}_\mu z\right)},$$

а це й доводить формулу (1) у випадку 2.

Випадок 3. Доведемо, що формула (1) не зміниться за наявності нулів функції на межі області $A(R)$. Для спрощення викладення, проведемо доведення за наявності єдиного нуля $z = a$ функції $f(z)$ на колі $|z| = R$. Нехай $a = Re^{i\theta_0}$. Розглянемо точку $a(\delta) = (R - \delta)e^{i\theta_0}$, де δ – доволі мале додатне число. Застосовуючи (1) до функції $\psi(z) = z - a(\delta)$ та користуючись класичною формулою для логарифмічної похідної для обчислення інтегралів подібно, як у випадку 2, отримаємо

$$\frac{1}{z - a(\delta)} = \frac{-\overline{a}(\delta)}{R^2 - \overline{a}(\delta)z} - \frac{1}{z(1 - \overline{a}(\delta)R^2z)} + \frac{1}{2z(1 - \overline{a}(\delta)R^2z)} - -\frac{1}{2(z - a(\delta)R^2)} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \log|\rho e^{i\theta} - a(\delta)|}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho=1} \left(\frac{1}{z - \frac{e^{i\theta}}{R^2}} - \frac{1}{z - R^2e^{i\theta}}\right) d\theta + + \frac{1}{z - a(\delta)} + \frac{\overline{a}(\delta)}{R^2 - \overline{a}(\delta)z}.$$

Звідси

$$I(z,\delta) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \log|\rho e^{i\theta} - a(\delta)|}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho=1} \left(\frac{1}{z - \frac{e^{i\theta}}{R^2}} - \frac{1}{z - R^2e^{i\theta}}\right) d\theta = \frac{1}{2z(1 - \overline{a}(\delta)R^2z)} + \frac{1}{2(z - a(\delta)R^2)}.$$

Позначимо

$$I(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \log|\rho e^{i\theta} - a|}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho=1} \left(\frac{1}{z - \frac{e^{i\theta}}{R^2}} - \frac{1}{z - R^2e^{i\theta}}\right) d\theta.$$

Знайдемо

$$|I(z) - I(z,\delta)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\delta^2 - 2R\delta + (\delta + R^2\delta - \delta^2R)\cos(\theta - \theta_0)}{(1 + R^2 - 2R\cos(\theta - \theta_0))(1 + (R - \delta)^2 - 2(R - \delta)\cos(\theta - \theta_0))} \left(\frac{1}{z - \frac{e^{i\theta}}{R^2}} - \frac{1}{z - R^2e^{i\theta}}\right) d\theta\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\delta^2 + 2R\delta + \delta + R^2\delta + \delta^2R}{(R-1)^2(R - \delta - 1)^2} \left(\frac{1}{\left||z| - \frac{1}{R^2}\right|} + \frac{1}{\left||z| - R^2\right|}\right) d\theta \le$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$\leq \frac{\delta^2+2R\delta+\delta+R^2\delta+\delta^2R}{(R-1)^2(R-\delta-1)^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{R}-\frac{1}{R^2}}+\frac{1}{R^2-R}\right)\to 0,\quad \delta\to 0.$$

Отже,

$$I(z)=\lim_{\delta\to 0} I(z,\delta)=\frac{1}{2z(1-\overline{a}R^2z)}+\frac{1}{2(z-aR^2)}. \tag{9}$$

Застосуємо формулу (8) до функції $f^*(z)=\dfrac{f(z)}{z-a}$. Користуючись класичною формулою для логарифмічної похідної для обчислення інтегралів, подібно як у випадку 2, та враховуючи рівність (9), після елементарних перетворень отримаємо формулу (1).

Випадок 4. Функція $f(z)$ має нулі та полюси в кільці $A(R)$. Твердження теореми є прямим наслідком результатів випадків 2 та 3, з огляду на можливість зображення функції f у вигляді $f=\dfrac{f_1}{f_2}$, де f_1 та f_2 – мероморфні в $A(R)$ функції без полюсів.

Література

[1] *Khrystiyanyn A., Kondratyuk A.* On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. I // Matematychni Studii 23. – 2005. – P. 19–30.

[2] *Khrystiyanyn A., Kondratyuk A.* On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. II , Matematychni Studii 24. – 2005. – P. 57–68.

[3] *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.

[4] *Кшановський І.* Властивості мероморфних функцій у двозв'язних областях: дис. ... канд. фіз-мат. наук : спец. 01.01.01 "Математичний аналіз". – Львів, 2008. – 138 с.

[5] *Хейман У.К.* Мероморфные функции. – М.: Мир, 1966. – 287 с.

ФОРМУЛА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ МЕРОМОРФНОЙ В КОЛЬЦЕ ФУНКЦИИ

О.В. Веселовска, И.П. Кшановский

Национальный университет "Львивська политехника",
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

Выведено формулу логарифмической производной мероморфной в кольце функции.

Ключевые слова: мероморфная функция, логарифмическая производная.

2000 MSC: 30D35

УДК: 517.53

FORMULA FOR THE LOGARITHMIC DERIVATIVE OF A MEROMORPHIC FUNCTION ON ANNULI

O.V. Veselovska, I.P. Kshanovskyy

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

A representation of the logarithmic derivative of a meromorphic function on annuli is obtained.

Key words: meromorphic function, logarithmic derivative.

2000 MSC: 30D35

УДК: 517.53

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua