ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
Вип.740 № 740, (2012) с. 5–10

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
“LVIVSKA POLITECHNIKA”
“Physical & mathematical sciences”
Vol.740 No 740, (2012) 5–10

КЛІТКОВО-ДІАГОНАЛЬНО ПАРАЛЕЛЬНІ ФАКТОРИЗАЦІЇ МАТРИЦЬ НАД ОБЛАСТЯМИ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ

Н. С. Джалюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
вул. Наукова, 3-б, 79060, Львів, Україна

(Отримано 27 червня 2012 р.)

Встановлено вигляд усіх з точністю до асоційовності клітково-діагонально паралельних факторизацій неособливих клітково-діагональних матриць над комутативними областями головних ідеалів. Вказано достатні умови, за яких кожна клітково-діагональна факторизація матриці є клітково-діагонально паралельною. Встановлено критерій однозначності з точністю до асоційовності таких факторизацій матриць.

Ключові слова: клітково-діагональні матриці, паралельні факторизації матриць.

2000 MSC: 15A23

УДК: 512.643

Вступ

Нехай R — комутативна область головних ідеалів, $U(R)$ — група одиниць кільця R, R_m — повна множина лишків за модулем ідеалу (m) породженого елементом $m \in R$ або повна множина лишків за модулем m. Елемент $a \in R$ називають асоційованим до $b \in R$, якщо $a = bu$, де $u \in U(R)$. Множину елементів з R по одному з кожного класу асоційованих елементів називають повною множиною неасоційованих елементів і позначають R' [1].

Нехай $M(n, R)$ — кільце $n \times n$-матриць над R, D^A — канонічна діагональна форма матриці $A \in M(n, R)$, тобто

$$D^A = UAV = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0),$$

де $\mu_i \mid \mu_{i+1}$ (ділить), $i = 1, \dots, r-1$, $U, V \in GL(n, R)$. Діагональну матрицю $\operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$, в якій $d_i \mid d_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, називають d-матрицею.

Нагадаємо, що матриці $B_1, B_2 \in M(n, R)$ називають асоційованими справа, якщо існує така матриця $V \in GL(n, R)$, що $B_2 = B_1 V$. Аналогічно формулюють означення асоційованих зліва матриць.

Відомо [1], що кожна матриця $A \in M(n, R)$ над R асоційована справа до верхньої трикутної матриці H^A, тобто існує матриця $V \in GL(n, R)$ така, що

$$AV = H^A = \left\| \begin{matrix} h^A_{11} & h^A_{12} & \dots & h^A_{1n} \\ 0 & h^A_{22} & \dots & h^A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h^A_{nn} \end{matrix} \right\|, \qquad (1)$$

де $h^A_{ss} \in R'$, $i = 1, 2, \dots, n$, і $h^A_{st} \in R_{h^A_{ss}}$ для всіх $s < t, s = 1, 2, \dots, n-1, t = 2, \dots, n$. Матрицю H^A вигляду (1) називають *формою Ерміта матриці* A або *ермітовою нормальною формою.* Аналогічно і для лівої асоційовності.

Відзначимо, що форма Ерміта H^A матриці A визначається однозначно [2], тому матриці асоційовані тоді і тільки тоді, коли вони асоційовані до однієї і тієї ж форми Ерміта.

Факторизації $A = B_1 C_1$, $A = B_2 C_2$, B_i, $C_i \in M(n, R), i = 1, 2$, матриці $A \in M(n, R)$ називають асоційованими, якщо існує така матриця $V \in GL(n, R)$, що $B_2 = B_1 V, C_2 = V^{-1} C_1$.

Задачу факторизації матриць над кільцями головних ідеалів сформулював З.І. Боревич [3]. Він запропонував описувати факторизації матриць над такими кільцями з точністю до асоційовності. У праці [3] З.І. Боревич, зокрема, вказав умови існування єдиного з точністю до асоційовності розкладу матриці на множники, які мають задані канонічні діагональні форми.

Усі з точністю до асоційовності факторизації матриць над комутативними областями головних ідеалів, паралельні до факторизацій їх канонічних діагональних форм, описані в [4].

Нагадаємо, що факторизацію $A = BC$, $B, C \in M(n, R)$, матриці A називають паралельною до факторизації $D^A = \Phi\Psi$, де Φ є d-матрицею, її канонічної діагональної форми D^A, якщо матриці B та C еквівалентні відповідно до матриць Φ та Ψ.

Відзначимо, що задача про опис факторизацій матриць певних виглядів над кільцем цілих чисел є актуальною і тепер [5, 6, 7, 8]. Багато авторів також розглядають певні типи факторизацій матриць блочної структури над різними областями [9, 10].

Поняття клітково-трикутних факторизацій клітково-трикутних матриць, паралельних до факторизацій визначників їх діагональних кліток та паралельних до факторизацій канонічних діагональних форм їх діагональних кліток, введені в [11]. Там же вказані критерії однозначності з точністю до асоційовності таких факторизацій матриць над адекватними кільцями. Умови існування кліткововотрикутних факторизацій кліткових матриць над кільцями головних ідеалів, паралельних до факторизацій визначників їх діагональних кліток, встановлені у праці [12].

У цій праці описуються всі з точністю до асоційовності клітково-діагонально паралельні факторизації неособливих клітково-діагональних матриць над кільцем R.

I. Деякі властивості клітково-діагональних матриць та їх факторизацій

Нехай $A \in M(n,R)$ — клітково-діагональна матриця, тобто

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{Vmatrix},$$

яку записуватимемо у вигляді

$$A = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k),$$

де $A_i \in M(n_i, R),\ i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k n_i = n.$

Позначимо через $\mathcal{M}_V$ множину матриць $V \in GL(n,R)$, що задовольняють співвідношення

$$AV = B. \tag{2}$$

Множину $\mathcal{M}_V$ називатимемо множиною правих перетворювальних матриць, що зводять матрицю A до матриці B.

Лема 1. *Нехай* $A = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k)$ *та* $B = \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_k)$, *де* $A_i, B_i \in M(n_i, R)$, $i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k n_i = n$. *Тоді такі твердження еквівалентні:*

а) *матриці* A *і* B *асоційовані справа;*

б) *відповідні діагональні клітки* A_i *та* B_i *матриць* A *і* B *асоційовані справа;*

в) *у множині* $\mathcal{M}_V$ *оборотних матриць* V, *які задовольняють співвідношення* (2), *існують клітково-діагональні матриці.*

□ *Доведення.* Досить показати, що з випадку а) випливає в). Тоді всі інші еквівалентності очевидні.

Нехай клітково-діагональні матриці A і B асоційовані справа, тобто виконується співвідношення (2). Покажемо, що серед матриць V, які задовольняють співвідношення (2), завжди існує клітково-діагональна матриця.

Відомо, що існують оборотні матриці U_i, W_i такі, що

$$A_i U_i = H^{A_i},$$

$$B_i W_i = H^{B_i}$$

— форми Ерміта матриць A_i та B_i відповідно, $i = 1, \dots, k$. Запишемо матриці

$$U = \operatorname{diag}(U_1, \dots, U_k)$$

та

$$W = \operatorname{diag}(W_1, \dots, W_k).$$

Тоді очевидно, що

$$AU = H^A = \operatorname{diag}(H^{A_1}, \dots, H^{A_k}),$$

$$BW = H^B = \operatorname{diag}(H^{B_1}, \dots, H^{B_k})$$

— це форми Ерміта матриць відповідно A та B. Звідси отримуємо, що матриця V із співвідношення (2) має вигляд

$$V = UW^{-1} = \operatorname{diag}(V_1, \dots, V_k),$$

де $V_i = U_i W_i^{-1},\ i = 1, \dots, k.$

Отже, в множині $\mathcal{M}_V$ існує клітково-діагональна матриця $V \in GL(n,R)$.

Лему доведено. ■

Зауважимо, що аналогічне твердження можна сформулювати і для асоційованих зліва матриць.

Наслідок 1. Якщо клітково-діагональні матриці A і B неособливі, то множина $\mathcal{M}_V$ складається лише з клітково-діагональних матриць.

Необхідною умовою існування клітково-діагональної факторизації

$$A = BC = \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_k)\operatorname{diag}(C_1, \dots, C_k),$$

де $B_i,\ C_i \in M(n_i, R), i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k n_i = n$, клітково-діагональної матриці A є існування деякого розкладу на множники $A_i = B_i C_i$ її діагональних кліток A_i, $i = 1, \dots, k$. Отже, як тільки діагональні клітки A_i клітково-діагональної матриці A мають розклади на множники, то матриця A має клітково-діагональну факторизацію.

Зрозуміло, що клітково-діагональна матриця може мати факторизацію, яка не є клітково-діагональною. До того ж така факторизація клітково-діагональної матриці може не бути асоційованою до жодної клітково-діагональної факторизації цієї матриці.

Приклад. Нехай $R = \mathbb{P}[\lambda]$, де $\mathbb{P}-$ поле, та

$$A = \left\Vert \begin{array}{cc|cc} \lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{array} \right\Vert = \operatorname{diag}(A_1, A_2),$$

де

$$A_1 = \begin{Vmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 \end{Vmatrix}.$$

Матриця A має факторизацію

$$A = BC =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc|cc} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc|cc} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{array} \right\|$$

Ця факторизація не є асоційованою до жодної клітково-діагональної факторизації матриці A, оскільки лівий множник B не є асоційованим справа до матриці

$$\widetilde{B} = \left\| \begin{array}{cc|cc} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{array} \right\|,$$

бо матриці B і $\widetilde{B}$ – це дві різні форми Ерміта.

Метою дослідження задачі про опис факторизацій кліткових матриць над кільцями є зведення її до задачі про опис факторизацій їх діагональних кліток, які мають менший порядок. Наприклад, у [12] з'ясовано, що опис факторизацій клітково-трикутних матриць зводиться до опису факторизацій їх діагональних кліток та розв'язків матричних лінійних рівнянь типу Сильвестра.

Задача про опис факторизацій клітково-діагональних матриць зводиться до опису факторизацій їх діагональних кліток у тих випадках, коли клітково-діагональні матриці мають з точністю до асоційовності лише клітково-діагональні факторизації. Класи клітково-діагональних матриць над комутативними областями головних ідеалів, які мають такі властивості, виділені у праці [12].

У цій праці за аналогією із [4] введено поняття клітково-діагонально паралельних факторизацій клітково-діагональних матриць над комутативними областями головних ідеалів. Встановлено вигляд усіх з точністю до асоційовності клітково-діагонально паралельних факторизацій неособливих клітково-діагональних матриць. Вказано достатні умови, за яких кожна клітково-діагональна факторизація матриці є клітково-діагонально паралельною. Встановлено також критерій однозначності з точністю до асоційовності клітково-діагонально паралельних факторизацій матриць.

II. Клітково-діагонально паралельні факторизації матриць

Нехай далі $A \in M(n, R)$ — неособлива клітково-діагональна матриця, тобто

$$A = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k), \tag{3}$$

де $A_i \in M(n_i, R),\ i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Позначимо через D клітково-діагональну матрицю вигляду

$$D = \operatorname{diag}(D^{A_1}, \dots, D^{A_k}), \tag{4}$$

де D^{A_i} — канонічні діагональні форми діагональних кліток A_i матриці A вигляду (3), тобто
.

$$D^{A_i} = U_i A_i V_i = \operatorname{diag}(\mu_{i1}, \dots, \mu_{i,n_i}), \tag{5}$$

$\mu_{ij} \mid \mu_{i,j+1},\ j = 1, \dots, n_i - 1, U_i,\ V_i \in GL(n_i, R),\ i = 1, \dots, k$.

Нехай матриця D вигляду (4) розкладена на клітково-діагональні множники:

$$D = \Phi\Psi = \operatorname{diag}(\Phi_1, \dots, \Phi_k)\operatorname{diag}(\Psi_1, \dots, \Psi_k), \tag{6}$$

де $\Phi_i = \operatorname{diag}(\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{i,n_i}),\ \Psi_i = \operatorname{diag}(\psi_{i1}, \dots, \psi_{i,n_i})$ та Φ_i — $d-$матриці, $i = 1, \dots, k$.

Означення 1. Клітково-діагональну факторизацію

$$A = BC = \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_k)\operatorname{diag}(C_1, \dots, C_k), \tag{7}$$

де $B_i,\ C_i \in M(n_i, R), i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^{k} n_i = n$, клітково-діагональної матриці A таку, що $D^{B_i} = \Phi_i$ та матриці C_i еквівалентні до $\Psi_i,\ i = 1, \dots, k$, називаємо клітково-діагонально паралельною до факторизації (6) матриці D або коротко клітково-діагонально паралельною факторизацією матриці A.

Теорема 1. *Нехай матриця* D *вигляду* (4), *що еквівалентна до неособливої клітково-діагональної матриці* A, *зображається у вигляді добутку* (6). *Тоді факторизації*

$$A = BC = \tag{8}$$

$$= \operatorname{diag}(U_1^{-1}\Phi_1, \dots, U_k^{-1}\Phi_k)\operatorname{diag}(\Psi_1 V_1^{-1}, \dots, \Psi_k V_k^{-1}),$$

де $U_i,\ V_i,\ i = 1, \dots, k,$ *— всеможливі пари оборотних матриць над* R *із співвідношення* (5), *це всі з точністю до асоційовності клітково-діагонально паралельні факторизації матриці* A.

☐ *Доведення.* Кожна факторизація вигляду (8) є клітково-діагонально паралельною до факторизації (6) матриці D.

Нехай маємо клітково-діагональну факторизацію вигляду (7) матриці A, яка є клітково-діагонально паралельною до факторизації (6) матриці D.

Із факторизації (7) отримуємо факторизації

$$A_i = B_i C_i,\ i = 1, \dots, k, \tag{9}$$

діагональних кліток матриці A. Тоді за теоремою 1 із праці [13], оскільки матриці C_i еквівалентні до $\Psi_i,\ i = 1, \dots, k$, то для кожної пари матриць $A_i,\ B_i,\ i = 1, \dots, k$, існують матриці $U_i,\ V_{1i},\ V_{2i} \in GL(n, R)$ такі, що $U_i A_i V_{1i} = D^{A_i},\ U_i B_i V_{2i} = D^{B_i} = \Phi_i,\ i = 1, \dots, k$. Із факторизацій (9) маємо

$$U_i A_i V_{1i} = U_i B_i V_{2i} V_{2i}^{-1} C_i V_{1i},\ i = 1, \dots, k.$$

Тобто $B_i = U_i^{-1}\Phi_i V_{2i}^{-1},\ C_i = V_{2i}\Psi_i V_{1i}^{-1},\ i = 1, \dots, k$. Отже, множники B і C у факторизації (7) мають з точністю до асоційовності такий вигляд як у факторизації (8).

Теорему доведено. ■

Теорема 2. *Нехай матриця* D *вигляду* (4), *що еквівалентна до неособливої клітково-діагональної матриці* A, *зображається у вигляді добутку* (6).

Якщо

$$\left(\frac{\varphi_{is}}{\varphi_{it}}, (\psi_{is}, \psi_{it})\right) = 1,\ s,t = 1,\dots,n_i, s > t, \qquad (10)$$

$i = 1,\dots,k$, *то кожна клітково-діагональна факторизація*

$$A = BC = \operatorname{diag}(B_1,\dots,B_k)\operatorname{diag}(C_1,\dots,C_k) \qquad (11)$$

така, що $D^{B_i} = \Phi_i,\ B_i,\ C_i \in M(n_i, R), i = 1,\dots,k,$ *матриці* A *є клітково-діагонально паралельною до факторизації* (6) *матриці* D.

☐ *Доведення.* Нехай маємо факторизацію (11) матриці A. Тоді, якщо виконуються умови (10), то за теоремою 2 із праці [13] існують матриці $U_i,\ V_{1i},\ V_{2i} \in GL(n,R)$ такі, що $U_iA_iV_{1i} = D^{A_i}$, $U_iB_iV_{2i} = D^{B_i} = \Phi_i$, $i = 1,\dots,k$. Тому із (11) можемо записати $U_iA_iV_{1i} = U_iB_iV_{2i}V_{2i}^{-1}C_iV_{1i}$, $i = 1,\dots,k$, або $D^{A_i} = \Phi_i\Psi_i$, де $\Psi_i = V_{2i}^{-1}C_iV_{1i}$, $i = 1,\dots,k$. Отже, діагональна клітка C_i еквівалентна до матриці Ψ_i, для всіх $i = 1,\dots,k$, тобто факторизація (11) матриці A є клітково-діагонально паралельною до факторизації (6) матриці D.

Теорему доведено. ■

Теорема 3. *Нехай* $A \in M(n,R)$ — *неособлива клітково-діагональна матриця вигляду* (3) *і*

$$\det A = \varphi\psi,\ \varphi = \prod_{i=1}^{k}\varphi_i,\ \psi = \prod_{i=1}^{k}\psi_i,\ \varphi_i\psi_i = \det A_i,$$

$i = 1,\dots,k$, *і нехай матриця* D *вигляду* (4), *що еквівалентна до матриці* A, *зображається у вигляді добутку* (6).

Якщо виконуються умови

а) $((\det A_i, \det A_j), (\varphi, \psi)) = 1,\ i,j = 1,\dots,k,\ i \neq j;$

б) $\left(\frac{\varphi_{is}}{\varphi_{it}}, (\psi_{is}, \psi_{it})\right) = 1,\ s,t = 1,\dots,n_i,\ s > t,\ i = 1,\dots,k,$

то матриця A *має з точністю до асоційовності лише клітково-діагональні факторизації, які є клітково-діагонально паралельними до факторизації* (6) *матриці* D.

☐ *Доведення.* За теоремою 1 із праці [12] при виконанні умови а) кожна з точністю до асоційовності факторизація матриці A є клітково-діагональною, тобто

$$A = \widetilde{B}\widetilde{C}, \qquad (12)$$

де $\widetilde{B} = BV = \operatorname{diag}(B_1,\dots,B_k)$, $\widetilde{C} = V^{-1}C = \operatorname{diag}(C_1,\dots,C_k)$, $V \in GL(n,R)$, $B_i, C_i \in M(n_i,R)$, і $\det B_i = \varphi_i$, $\det C_i = \psi_i$, $i = 1,\dots,k$.

Із факторизації (12) отримуємо, що $A_i = B_iC_i$, $i = 1,\dots,k$. Тоді, як відомо, канонічна діагональна форма D^{B_i} матриці B_i ділить канонічну діагональну форму D^{A_i} матриці A_i, тобто $D^{A_i} = D^{B_i}\Psi_i$ або $D^{A_i} = \Phi_i\Psi_i$, де Φ_i – d-матриці, $i = 1,\dots,k$. Тоді за теоремою 2, оскільки виконується умова б), то кожна клітково-діагональна факторизація вигляду (12) матриці A є клітково-діагонально паралельною до факторизації (6) матриці D.

Теорему доведено. ■

III. Однозначність клітково-діагонально паралельних факторизацій матриць

Теорема 1. *Клітково-діагональна факторизація вигляду* (7) *матриці* A *клітково-діагонально паралельна до факторизації* (6) *матриці* D, *що має вигляд* (4), *є єдиною з точністю до асоційовності тоді і тільки тоді, коли матриці* Ψ_i *є* d-*матрицями,* $i = 1,\dots,k$.

☐ *Доведення.* Нехай матриці Ψ_i є d-матрицями, $i = 1,\dots,k$, та існують дві різні клітково-діагональні факторизації матриці A :

$$A = BC = \operatorname{diag}(B_1,\dots,B_k)\operatorname{diag}(C_1,\dots,C_k), \qquad (13)$$

$$A = \widetilde{B}\widetilde{C} = \operatorname{diag}(\widetilde{B}_1,\dots,\widetilde{B}_k)\operatorname{diag}(\widetilde{C}_1,\dots,\widetilde{C}_k), \qquad (14)$$

які є клітково-діагонально паралельними до факторизації (6) матриці D. Покажемо, що факторизації (13) та (14) асоційовані.

Із факторизацій (13) та (14) маємо факторизації діагональних кліток A_i матриці A :

$$A_i = B_iC_i, \qquad (15)$$

$$A_i = \widetilde{B}_i\widetilde{C}_i, \qquad (16)$$

$i = 1,\dots,k$. Причому факторизації (15) та (16) паралельні до відповідних факторизацій

$$D^{A_i} = \Phi_i\Psi_i,\ i = 1,\dots,k, \qquad (17)$$

діагональних кліток D^{A_i} матриці D вигляду (4). Тоді за лемою 3 із праці [4] існують матриці $U_i,\ V_i,\ V_{1i},\ V_{2i} \in GL(n,R)$ такі, що $U_iA_iV_i = D^{A_i}$, $U_iB_iV_{1i} = D^{B_i} = \Phi_i$, $U_i\widetilde{B}_iV_{2i} = D^{\widetilde{B}_i} = \Phi_i$, $i = 1,\dots,k$. Тоді із факторизацій (15) та (16) маємо

$$U_iA_iV_i = U_iB_iV_{1i}V_{1i}^{-1}C_iV_i,$$

$$U_iA_iV_i = U_i\widetilde{B}_iV_{2i}V_{2i}^{-1}\widetilde{C}_iV_i,\ i = 1,\dots,k.$$

Із цих рівностей та паралельності факторизацій (15) та (16) до відповідних факторизацій вигляду (17) видно, що відповідні діагональні клітки B_i та $\widetilde{B}_i$ матриць B та $\widetilde{B}$ асоційовані справа, а клітки C_i та $\widetilde{C}_i$ матриць C та $\widetilde{C}$ асоційовані зліва. Тоді за лемою 1 клітково-діагональні матриці B та $\widetilde{B}$ асоційовані справа, а матриці C та $\widetilde{C}$ — зліва. Отже, факторизації (13) та (14) матриці A асоційовані.

Якщо хоча б одна з матриць Ψ_i, $i = 1, \ldots, k$, не є d-матрицею, то, враховуючи доведення теореми 3 із [4], стає зрозуміло, що існують дві різні неасоційовані між собою клітково-діагональні факторизації матриці A, які є клітково-діагонально паралельними до факторизації (6) матриці D.

Теорему доведено. ■

Дослідження виконано за фінансової підтримки гранту НАН України для молодих учених (Державний реєстраційний номер 0112U005004).

Література

[1] *Newman M.* Integral matrices. — New York : Academic Press. 1972. — 224 p.

[2] *Friedland S.* Matrices over integral domains // CRC Handbook of Linear Algebra, New York: Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group. 2007. — P. 23-1–11.

[3] *Боревич З.И.* О факторизациях матриц над кольцом главных идеалов // III Всес. симп. по теории колец, алгебр и модулей: Тез. докл. — Тарту: Тартусский ун-т, 1976. — С. 19.

[4] *Петричкович В.М.* Про паралельні факторизації матриць над кільцями головних ідеалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1997. — 40, №4. — С. 96—100.

[5] *Bhowmik G., Ramare O.* Algebra of matrix arithmetic // J. of Algebra. — 1998. — 210. — P. 194—215.

[6] *Lenders P., Xue J.* Factorization of singular integer matrices // Linear Algebra and Appl. — 2008. — 428. — P. 1046—1055.

[7] *Wallace D., White W.* Pseudoprime factorizations of integer matrices // Linear Algebra and Appl. — 2008. — 429. — P. 142—155.

[8] *Baeth N., Ponomarenko V., Adams D., Ardila R., Hannasch D., Kosh A., McCarthy H., Rosenbaum R.* Number theory of matrix semigroups // Linear Algebra and Appl. — 2011. — 434. — P. 694—711.

[9] *Ellis R.L., Gohberg I., Lay D.* Factorization of block matrices // Linear Algebra and its Appl. – 1985. — 69. — P. 71—93.

[10] *Yang Y., Holtti H.* The factorization of block matrices with generalized geometric progression rows // Linear Algebra and its Appl. – 2004. — 287. — P. 51—67.

[11] *Джалюк Н.С., Петричкович В.М.* Паралельні факторизації матриць над кільцями та їх зв'язки // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2010. — Вип. 8. — С. 7—17.

[12] *Джалюк Н., Петричкович В.* Факторизація клітково-діагональних та клітково-трикутних матриць над кільцями головних ідеалів // Математичний вісник НТШ. — 2007. — 4. — С. 79—89.

[13] *Петричкович В.М.* Критерій діагоналізовності пари матриць над кільцем головних ідеалів спільними рядковими і різними стовпцевими перетвореннями // Укр. мат. журн. — 1997. — 49, № 6. — С. 860—862.

КЛЕТОЧНО-ДИАГОНАЛЬНЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦ НАД ОБЛАСТЯМИ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

Н.С. Джалюк

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Пидстрыгача НАН Украины,
ул. Наукова, 3-б, Львов, 79060, Украина

Установлен вид всех с точностью до ассоциированности клеточно-диагональных параллельных факторизаций неособенных клеточно-диагональных матриц над областями главных идеалов. Указаны достаточные условия, при которых каждая клеточно-диагональная факторизация матрицы есть клеточно-диагонально параллельной. Установлен критерий единственности с точностью до ассоциированности таких факторизаций матриц.

Ключевые слова: клеточно-диагональные матрицы, параллельные факторизации матриц.

2000 MSC: 15A23

УДК: 512.643

THE BLOCK DIAGONAL PARALLEL FACTORIZATIONS OF MATRICES OVER PRINCIPAL IDEAL DOMAINS

N. S. Dzhaliuk

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU,
3-b Naukova Str., 79060, Lviv, Ukraine

We describe all up to the association block diagonal parallel factorizations of nonsingular block diagonal matrices over commutative principal ideal domains. The sufficient conditions, under which each block diagonal factorization of matrix is the block diagonal parallel factorization, were obtained. The criterion of uniqueness up to the association of such factorizations was established.

Key words: block diagonal matrices, parallel factorizations of matrices.

2000 MSC: 15A23

УДК: 512.643