

НЕСТАЦІОНАРНІ ПРОЦЕСИ КОНВЕКТИВНО-ДИФУЗІЙНОГО МАСОПЕРЕНОСУ У БІНАРНИХ РЕГУЛЯРНИХ СТРУКТУРАХ

В.Є. Гончарук^{a, b}, В.А. Дмитрук^{a, b}, О.Ю. Чернуха^a

^a Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
вул. Дж. Дудаєва 15, 79005, Львів, Україна

^b Національний університет “Львівська політехніка” МОНМС України
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 3 серпня 2012 р.)

Досліджено нестационарні процеси масопереносу домішкової речовини у двофазних регулярних структурах з урахуванням періодичного характеру конвективних явищ. Запропоновано метод побудови точних аналітичних розв'язків такого типу контактної-крайової задачі, який базується на використанні різних інтегральних перетворень окремо в контактуючих областях. Зв'язок між цими інтегральними перетвореннями знайдений з використанням неідеальних контактних умов, сформульованих на функцію концентрації. Отримано точний аналітичний розв'язок задачі нестационарної дифузії для двофазного шару регулярної структури з врахуванням конвективного переносу в одній з фаз. Знайдено та досліджено вирази для потоків домішкових частинок через міжфазну поверхню контакту тіла. Проведено числовий аналіз концентрації мігруючих частинок в структурних елементах тіла.

Ключові слова: дифузія, конвекція, контактна-крайова задача, двофазна регулярна структура, неідеальні контактні умови, потік маси, інтегральне перетворення

2000 MSC: 93A30; 35K20; 42A38; 45K05

УДК: 517.958:532.72

Вступ

Здебільшого виникає проблема математичного опису і оцінки впливу включень на процеси дифузії, фільтрації тощо в реальних середовищах. Якщо розміри включень є достатньо малими і вони розподілені так, що знаходяться в кожному фізично малому елементі тіла, то основні макроскопічні параметри процесу переносу домішкових компонент, зазвичай, можна визначати на основі континуальних моделей гетеродифузії [1–3]. Це характерно, зокрема, для дрібнодисперсних полікристалічних тіл та пористих середовищ [4].

Інтерпретація експериментальних досліджень процесів масопереносу в полікристалічних тілах та капілярно-пористих середовищах базується на розв'язках відповідних крайових задач математичної фізики, що враховують вплив внутрішньої структури [5–8]. Зокрема, певний інтерес становлять точні розв'язки конкретних контактної-крайової задачі процесів масопереносу для кусково-однорідних систем, наприклад, просторово регулярних. Таке середовище може складатися з областей з різними коефіцієнтами дифузії, між якими відбувається масообмін речовиною, причому конвективний перенос частинок може бути наявним в тілі, або в його структурному елементі. Оскільки побудова точних розв'язків такого типу задач навіть для найпростіших геометричних областей викликає значні труднощі, то, зазвичай, використовуються наближені аналітичні [9–12] або числові [13–16] розв'язки.

У роботі [17] запропоновано, а в праці [18] розвинуто метод побудови точних розв'язків контактної-крайової задачі дифузії в тілах регулярної структури на основі інтегральних перетворень за просторовими змінними окремо в контактуючих областях. Знайдено аналітичний розв'язок задачі дифузії для горизонтально-періодичної структури і на цій основі досліджено граничні переходи, які відповідають наближенню поодинокого включення [9] та континуальної гетеродифузії [3].

У роботі цей метод узагальнено на випадок, коли в підшарах одного з типів періодичної структури враховується конвективний перенос. Для нестационарних процесів масопереносу отримано аналітичні вирази для концентрації домішкової речовини та потоків маси, зокрема, через внутрішню поверхню контакту.

Об'єкт дослідження та постановка задачі

Нехай домішкова речовина одного хімічного типу мігрує в шарі товщини x_0 , який складається з періодично розташованих областей двох видів. Поверхні, що обмежують ці області, перпендикулярні до поверхонь шару (рис.1а) (вісь Ox перпендикулярна до поверхонь тіла, Oy – до поверхонь складових областей). При цьому області з коефіцієнтом дифузії D_1 мають ширину $2L$, а з коефіцієнтом $D_2 = 2l$, крім цього в областях з коефіцієнтом дифузії D_1 ма-

соперенос відбувається не тільки за дифузійним, а й конвективним механізмом з коефіцієнтом конвективного перенесення v , який приймається відомим і сталим. Така структура має сім'ю площин симетрії

($y = \pm n(L + l)$, $n = 0, 1, 2, \dots$), які ділять навпіл сусідні контактуючі області. Тому можемо виділити елемент тіла (рис.1b), на вертикальних границях якого потоки в напрямку осі Oy , дорівнюють нулю.

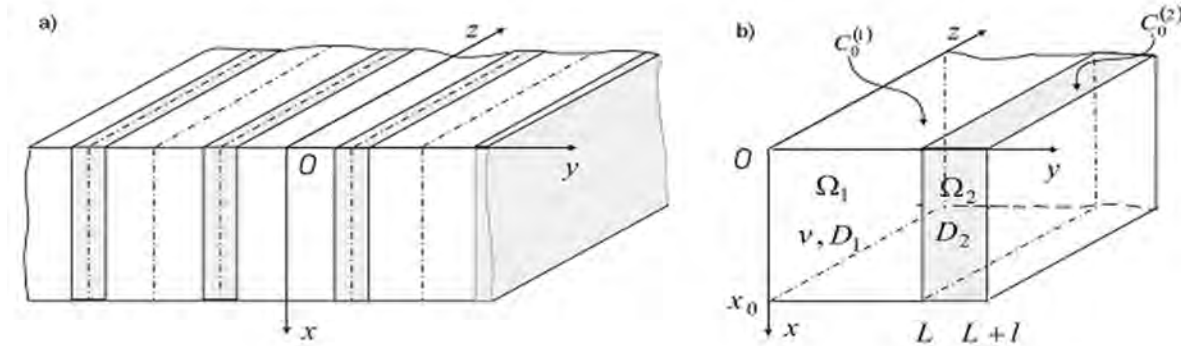


Рис. 1. Регулярна структура тіла, в якому мігрує домішкова речовина та виділений елемент такої структури

Концентрація домішкової речовини $c_1(x, y, t)$ в області $\Omega_1 =]0; x_0[\times]0; L[$ визначається з рівняння конвективної дифузії

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D_1 \left[\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} \right] - v \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad x, y \in \Omega_1. \quad (1)$$

В області $\Omega_2 =]0; x_0[\times]L; L + l[$ концентрація частинок домішки $c_2(x, y, t)$ задовольняє двовимірне рівняння дифузії

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = D_2 \left[\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} \right], \quad x, y \in \Omega_2. \quad (2)$$

Приймаємо, що в початковий момент часу в тілі відсутня домішкова речовина

$$c_1(x, y, t)|_{t=0} = c_2(x, y, t)|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

На поверхні шару $x = 0$ підтримуються постійні значення концентрацій, а на поверхні $x = x_0$ концентрації дорівнюють нулю:

$$c_1(x, y, t)|_{x=0} = c_0^{(1)} \equiv \text{const},$$

$$c_2(x, y, t)|_{x=0} = c_0^{(2)} \equiv \text{const};$$

$$c_1(x, y, t)|_{x=x_0} = c_2(x, y, t)|_{x=x_0} = 0. \quad (4)$$

На бічних поверхнях виділеного елемента $y = 0$, $y = L + l$ нулю дорівнюють горизонтальні складові потоку, тобто

$$\frac{\partial c_1(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial c_2(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=L+l} = 0. \quad (5)$$

На границі контакту $y = L$ задаємо умови рівності хімічних потенціалів і горизонтальні складові масових потоків домішкової речовини [11]:

$$\mu_1(x, y, t) \Big|_{y=L} = \mu_2(x, y, t) \Big|_{y=L},$$

$$\Lambda_1 \frac{\partial \mu_1(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=L} = \Lambda_2 \frac{\partial \mu_2(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=L}, \quad (6)$$

де $\mu_i(x, y, \tau)$ – хімічний потенціал в області Ω_i , Λ_i – кінетичні коефіцієнти ($i = 1; 2$).

У загальному випадку хімічний потенціал нелінійно (логарифмічно) залежить від концентрації [19]. Приймемо тут лінеаризований зв'язок [20] між хімічними потенціалами та концентраціями у вигляді

$$\mu_1(x, y, t) = \mu^0 - A(1 - \gamma_1 c_1(x, y, t)),$$

$$\mu_2(x, y, \tau) = \mu^0 - A(1 - \gamma_2 c_2(x, y, t)),$$

де μ^0 – хімічний потенціал для чистої речовини у стіні, який заданий значеннями абсолютної температури T і тиску P , $A = RT/M$ – коефіцієнт, в якому R – універсальна газова стала і M – атомна вага; γ_i – коефіцієнти активності.

Тоді зі співвідношень (6) отримаємо умови неідеального контакту для концентрації у вигляді

$$\eta_1 c_1(x, y, t) \Big|_{y=L} = \eta_2 c_2(x, y, t) \Big|_{y=L},$$

$$D_1 \frac{\partial c_1(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=L} = D_2 \frac{\partial c_2(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=L}, \quad (7)$$

де η_1 і η_2 ($\eta_1 \neq \eta_2$, $\eta_i = A\gamma_i$) – коефіцієнти концентраційної залежності хімічного потенціалу частинок в областях відповідно Ω_1 і Ω_2 .

Метод розв’язування контактної крайової задачі

Розв’язок контактної крайової задачі масопереносу (1)–(5), (7) будемо шукати за допомогою інтегральних перетворень за просторовими змінними окремо в контактуючих областях.

Виконаємо інтегральні перетворення за змінною y окремо в областях Ω_1 і Ω_2 . Для того, щоб застосувати інтегральне перетворення необхідно знати величину відповідних функцій або їхніх похідних на границях області перетворення [21]. При $y = 0$ і $y = L + l$ граничні умови (5) визначають значення функції $\partial c_1 / \partial y$ на границі області Ω_1 і $\partial c_2 / \partial y$ на границі Ω_2 . На інших границях областей Ω_1 і Ω_2 (поверхні контакту) величини $\partial c_i / \partial y$ є невідомими. Доозначимо їх, враховуючи другу контактну умову (7). Вона означає, що на границі контакту $y = L$ масові потоки рівні між собою і, своєю чергою, дорівнюють деякій функції $g(x, t)$, тобто

$$D_1 \frac{\partial c_1(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=L} = D_2 \frac{\partial c_2(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=L} = g(x, t).$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=L} &= \frac{1}{D_1} g(x, t), \\ \frac{\partial c_2(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=L} &= \frac{1}{D_2} g(x, t). \end{aligned} \quad (8)$$

Тоді можемо виконати скінченні інтегральні перетворення [21] окремо в контактуючих областях.

За змінною y в області Ω_1 застосуємо скінченне інтегральне кос-перетворення Фур’є

$$\tilde{c}_1(x, k, t) = \int_0^L c_1(x, y, t) \cos(y_k y) dy, \quad (9)$$

$$\bar{c}_1(x, y, t) = \frac{1}{L} \tilde{c}_1(x, 0, t) + \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_1(x, k, t) \cos(y_k y), \quad (10)$$

де $y_k = k\pi/L$.

Спочатку знайдемо інтегральне перетворення (9) від $\partial^2 c_1 / \partial y^2$. З урахуванням умов на границі області Ω_1 (5), (8) маємо

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial^2 c_1(x, y, t)}{\partial y^2} \cos(y_k y) dy &= \\ &= \frac{\partial c_1(x, y, t)}{\partial y} \cos(y_k y) \Big|_0^L + \end{aligned}$$

$$+ y_k c_1(x, y, t) \sin(y_k y) \Big|_0^L -$$

$$- y_k^2 \int_0^L c_1(x, y, t) \cos(y_k y) dy = \frac{(-1)^k}{D_1} g(x, t) -$$

$$- D_1 y_k^2 \tilde{c}_1(x, k, t).$$

Тоді в зображеннях крайова задача в області Ω_1 (1), (3)–(5) і (8) набуде вигляду

$$\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 \tilde{c}_1}{\partial x^2} - v \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial x} + (-1)^k g(x, t) - D_1 y_k^2 \tilde{c}_1, \quad (11)$$

$$\tilde{c}_1(x, k, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad (12)$$

$$\tilde{c}_1(x, k, t) \Big|_{x=0} = a_k c_0^{(1)}, \quad \tilde{c}_1(x, k, t) \Big|_{x=x_0} = 0,$$

$$\text{де } a_k = \begin{cases} L, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

До крайової задачі (11), (12) застосуємо таке інтегральне перетворення за змінною x [22]:

$$\bar{c}_1(n, k, t) = \int_0^{x_0} \tilde{c}_1(x, k, t) e^{-v_D x} \sin(x_n x) dx, \quad (13)$$

$$\tilde{c}_1(x, k, t) = \frac{2}{x_0} e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_1(n, k, t) \sin(x_n x), \quad (14)$$

де $v_D = v/2D_1$, $x_n = n\pi/x_0$.

Для функції $g(x, t)$ відповідно маємо

$$\tilde{g}_n(t) = \int_0^{x_0} g(x, t) e^{-v_D x} \sin(x_n x) dx, \quad (15)$$

$$g(x, t) = e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n(t) \sin(x_n x). \quad (16)$$

У результаті задача (11), (12) в зображеннях зводиться до звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d\bar{c}_1}{dt} = -D_1(v_D^2 + x_n^2 + y_k^2) \bar{c}_1 + D_1 a_k c_0^{(1)} x_n + (-1)^k \tilde{g}_n(t) \quad (17)$$

з початковою умовою

$$\bar{c}_1(n, k, t) \Big|_{t=0} = 0. \quad (18)$$

Розв’язок задачі (17), (18) має вигляд [23]

$$\bar{c}_1(n, k, t) = e^{-D_1(x_n^2 + y_k^2 + v_D^2)t} \times$$

$$\times \int_0^t \left[D_1 a_k c_0^{(1)} x_n + (-1)^k \tilde{g}_n(t') \right] e^{D_1(x_n^2 + y_k^2 + v_D^2)t'} dt'. \quad (19)$$

Значимо, що у виразі (19) залишається невідомим $\tilde{g}_n(t')$.

Розглянемо крайову задачу дифузії (2)–(5), (8) в області Ω_2 . За змінною y в області Ω_2 застосуємо наступне cos-перетворення Фур'є з зсувом [17]

$$\tilde{c}_2(x, j, t) = \int_L^{L+l} c_2(x, y, t) \cos(y_j(y-L)) dy, \quad (20)$$

$$\bar{c}_2(x, y, t) = \frac{1}{l} \tilde{c}_2(x, 0, t) + \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{c}_2(x, j, t) \cos(y_j(y-L)), \quad (21)$$

де $y_j = j\pi/l$.

З урахуванням умов на бічних границях області Ω_2 (5), (8) маємо:

$$\begin{aligned} & \int_L^{L+l} \frac{\partial^2 c_2(x, y, t)}{\partial y^2} \cos(y_j(y-L)) dy = \\ & = \frac{\partial c_2(x, y, t)}{\partial y} \cos(y_j(y-L)) \Big|_L^{L+l} + \\ & - y_j c_2(x, y, t) \sin(y_j(y-L)) \Big|_L^{L+l} - \\ & - y_j \int_L^{L+l} c_2(x, y, t) \cos(y_j(y-L)) dy = \\ & = -\frac{g(x, t)}{D_2} - y_j^2 \tilde{c}_2(x, j, t). \end{aligned}$$

Тоді рівняння (2) в зображеннях зведеться до такого рівняння:

$$\frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 \tilde{c}_2}{\partial x^2} - D_2 y_j^2 \tilde{c}_2 - g(x, t), \quad x \in]0; x_0[\quad (22)$$

з крайовими умовами

$$\tilde{c}_2(x, j, t) \Big|_{t=0} = 0,$$

$$\tilde{c}_1(x, j, t) \Big|_{x=0} = a_j c_0^{(2)}, \quad \tilde{c}_2(x, j, t) \Big|_{x=x_0} = 0, \quad (23)$$

де $a_j = \begin{cases} l, & j = 0 \\ 0, & j = 1, 2, \dots \end{cases}$.

За аналогією знаходимо розв'язок крайової задачі (28), (29) у вигляді

$$\bar{c}_2(m, j, t) = e^{-D_2(x_m^2 + y_j^2)t} \times$$

$$\times \int_0^t \left[D_2 a_j c_0^{(2)} x_m - \tilde{g}_m(t') \right] e^{D_2(x_m^2 + y_j^2)t'} dt'. \quad (24)$$

У виразах (19), (24) залишаються невідомими функції відповідно $\tilde{g}_n(t')$ і $\tilde{g}_m(t')$. Шукатимемо їх з першої контактної умови (7) стрибка функції концентрації на границі розділу областей Ω_1 та Ω_2 .

Виконаємо обернені перетворення за змінною y виразів (19) і (24). Враховуючи вирази для a_k і a_j , запишемо їх окремо для нульових і ненульових членів рядів по k і j :

$$\bar{c}_1(n, k, t) \Big|_{k=0} = e^{-D_1(v_D^2 + x_n^2)t} \times$$

$$\times \int_0^t \left\{ L c_0^{(1)} x_n D_1 e^{D_1(v_D^2 + x_n^2)t'} + \tilde{g}_n(t') e^{D_1(v_D^2 + x_n^2)t'} \right\} dt',$$

$$\bar{c}_1(n, k, t) \Big|_{k \neq 0} = e^{-D_1(v_D^2 + x_n^2 + y_k^2)t} \times$$

$$\times \int_0^t (-1)^k \tilde{g}_n(t') e^{D_1(v_D^2 + x_n^2 + y_k^2)t'} dt',$$

$$\bar{c}_2(m, j, t) \Big|_{j=0} = e^{-D_2 x_m^2 t} \times$$

$$\times \int_0^t \left\{ l c_0^{(2)} x_m D_2 e^{D_2 x_m^2 t'} - \tilde{g}_m(t') e^{D_2 x_m^2 t'} \right\} dt',$$

$$\bar{c}_2(m, j, t) \Big|_{j \neq 0} = e^{-D_2(x_m^2 + y_j^2)t} \int_0^t \tilde{g}_m(t') e^{D_2(x_m^2 + y_j^2)t'} dt'.$$

Після застосування відповідних обернених перетворень за змінною y (10) і (21) одержимо

$$\begin{aligned} \bar{c}_1(n, y, t) = & \int_0^t \left(\left[D_1 c_0^{(1)} x_n + \frac{\tilde{g}_n(t')}{L} \right] e^{-D_1(v_D^2 + x_n^2)(t-t')} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{L} \tilde{g}_n(t') \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(y_k y) e^{-D_1(v_D^2 + x_n^2 + y_k^2)(t-t')} \right) dt'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_2(m, y, t) = & \int_0^t \left(\left[D_2 c_0^{(2)} x_m - \frac{\tilde{g}_m(t')}{l} \right] e^{-D_2 x_m^2 (t-t')} - \right. \\ & \left. - \frac{2}{l} \tilde{g}_m(t') \sum_{j=1}^{\infty} \cos(y_j(y-L)) e^{-D_2(x_m^2 + y_j^2)(t-t')} \right) dt'. \end{aligned}$$

Виконаємо обернені перетворення (14) в області Ω_1 і (25) в області Ω_2 за змінною x , тоді отримаємо

$$c_1(x, y, t) = \int_0^t \frac{2}{x_0} e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x_n x) \times \left(\left[D_1 c_0^{(1)} x_n + \frac{\tilde{g}_n(t')}{L} \right] e^{-D_1(v_D^2 + x_n^2)(t-t')} + \frac{2}{L} \tilde{g}_n(t') \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(y_k y) e^{-D_1(v_D^2 + x_n^2 + y_k^2)(t-t')} \right) dt'; \quad (25)$$

$$c_2(x, y, t) = \int_0^t \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(x_m x) \times \left(\left[D_2 c_0^{(2)} x_m - \frac{\tilde{g}_m(t')}{l} \right] e^{-D_2 x_m^2 (t-t')} - \frac{2}{l} \tilde{g}_m(t') \sum_{j=1}^{\infty} \cos(y_j (y - L)) e^{-D_2(x_m^2 + y_j^2)(t-t')} \right) dt'. \quad (26)$$

Підставляємо вирази (31), (32) в умову (7) і одержуємо таке рівняння:

$$\int_0^t \eta_1 e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x_n x) \left(\left[D_1 c_0^{(1)} x_n + \frac{\tilde{g}_n(t')}{L} \right] e^{-D_1(v_D^2 + x_n^2)(t-t')} + \frac{2}{L} \tilde{g}_n(t') \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-D_1(v_D^2 + x_n^2 + y_k^2)(t-t')} \right) dt' = \int_0^t \eta_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(x_m x) \left(\left[D_2 c_0^{(2)} x_m - \frac{\tilde{g}_m(t')}{l} \right] e^{-D_2 x_m^2 (t-t')} - \frac{2}{l} \tilde{g}_m(t') \sum_{j=1}^{\infty} e^{-D_2(x_m^2 + y_j^2)(t-t')} \right) dt'. \quad (27)$$

Для того, щоб означені інтеграли від неперіодичних функцій були рівними, достатньо, щоб дорівнювали між собою підінтегральні функції. Тоді маємо

$$\eta_1 e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x_n x) \left(\left[D_1 c_0^{(1)} x_n + \frac{\tilde{g}_n(t')}{L} \right] e^{-D_1(v_D^2 + x_n^2)(t-t')} + \frac{2}{L} \tilde{g}_n(t') \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-D_1(v_D^2 + x_n^2 + y_k^2)(t-t')} \right) = \eta_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(x_m x) \left(\left[D_2 c_0^{(2)} x_m - \frac{\tilde{g}_m(t')}{l} \right] e^{-D_2 x_m^2 (t-t')} - \frac{2}{l} \tilde{g}_m(t') \sum_{j=1}^{\infty} e^{-D_2(x_m^2 + y_j^2)(t-t')} \right). \quad (28)$$

Для знаходження зв'язку між функціями $\tilde{g}_n(t')$ і $\tilde{g}_m(t')$ розглянемо співвідношення, обернене до (15), тобто (16)

$$g(x, t) = e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n(t) \sin(x_n x).$$

Домножимо обидві частини цієї рівності на $\sin(x_m x)$ і проінтегруємо по x від 0 до x_0 , тобто застосуємо скінченне інтегральне \sin -перетворення Фур'є за змінною x . Маємо

$$\int_0^{x_0} g(x, t) \sin(x_m x) dx = \int_0^{x_0} \frac{2}{x_0} e^{v_D x} \sin(x_m x) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n(t) \sin(x_n x) dx.$$

Ліва частина цієї рівності є $\tilde{g}_m(t')$. Тоді

$$\tilde{g}_m(t) = \frac{2}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n(t) \int_0^{x_0} e^{v_D x} \sin(x_m x) \sin(x_n x) dx,$$

і після інтегрування отримаємо

$$\tilde{g}_m(t) = \frac{2}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,m} \tilde{g}_n(t), \quad (29)$$

де коефіцієнти $A_{n,m}$ визначаються так:

$$A_{n,m} \equiv \frac{2v_D \pi^2}{x_0^2} \frac{nm [(-1)^{n+m} e^{v_D x_0} - 1]}{\left\{ v_D^2 + \frac{\pi^2}{x_0^2} (n-m)^2 \right\} \left\{ v_D^2 + \frac{\pi^2}{x_0^2} (n+m)^2 \right\}}. \quad (30)$$

З іншого боку, якщо розглянемо рівність

$$g(x, t) = \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{g}_m(t) \sin(x_m x),$$

і застосуємо до неї скінченне інтегральне перетворення (15), то отримаємо

$$\int_0^{x_0} g(x, t) e^{-v_D x} \sin(x_n x) dx =$$

$$= \int_0^{x_0} \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{g}_m(t) \sin(x_m x) e^{-v_D x} \sin(x_n x) dx.$$

Оскільки за формулою (15) ліва частина цієї рівності є $\tilde{g}_n(t)$, одержимо

$$\tilde{g}_n(t) = \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} \tilde{g}_m(t), \quad (31)$$

де

$$B_{n,m} \equiv -\frac{2v_D \pi^2}{x_0^2} \frac{nm [(-1)^{n+m} e^{-v_D x_0} - 1]}{\left\{v_D^2 + \frac{\pi^2}{x_0^2} (n-m)^2\right\} \left\{v_D^2 + \frac{\pi^2}{x_0^2} (n+m)^2\right\}}. \quad (32)$$

Зазначимо також, що

$$B_{n,m} = -\frac{(-1)^{n+m} e^{-v_D x_0} - 1}{(-1)^{n+m} e^{v_D x_0} - 1} A_{n,m}.$$

Зауважимо, що, зважаючи на співвідношення (35) і (37), для знаходження розв'язку задачі необхідно визначити лише одну з функцій $\tilde{g}_n(t')$ або $\tilde{g}_m(t')$.

Подамо перший доданок у правій частині (34) у вигляді розвинення за n . Тоді рівняння (28) з урахуванням співвідношення (29) можна звести до форми

$$\begin{aligned} & \eta_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x_n x) \left(\left[D_1 c_0^{(1)} x_n + \frac{\tilde{g}_n(t')}{L} \right] e^{-D_1 (v_D^2 + x_n^2)(t-t')} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{L} \tilde{g}_n(t') \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-D_1 (v_D^2 + x_n^2 + y_k^2)(t-t')} \right) = \\ & = \eta_2 \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} D_2 c_0^{(2)} x_m e^{-D_2 x_m^2 (t-t')} - \\ & - \eta_2 \left(\frac{2}{x_0} \right)^2 \frac{\tilde{g}_n(t')}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t-t') B_{n,m} A_{n,m}. \quad (33) \end{aligned}$$

Звідси знаходимо

$$\tilde{g}_n(t') = \frac{-\frac{\eta_1}{\eta_2} D_1 c_0^{(1)} x_n + \frac{2}{x_0} D_2 c_0^{(2)} \sum_{m=1}^{\infty} x_m B_{n,m} E_{n,m}(t-t')}{\frac{\eta_1}{\eta_2 L} \Theta_0 \left(0, e^{-D_1 \frac{\pi^2}{L^2} (t-t')} \right) + \frac{4}{x_0^2 l} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t-t') A_{n,m} B_{n,m} e^{D_1 (v_D^2 + x_n^2)(t-t')}}}, \quad (34)$$

де $E_{n,m}(t-t') = \exp \left\{ - [D_2 x_m^2 - D_1 (v_D^2 + x_n^2)] (t-t') \right\}$, $\Theta_0(v, x)$ – еліптична тета-функція [24].

Зауважимо, що інтегральне рівняння (27) має єдиний розв'язок, оскільки, зокрема, існують такі функції $F(t') \neq 0$, що $\int_0^t F(t') dt' = 0$. До того ж розв'язок вихідної задачі є єдиним незалежно від вибору способу розв'язання інтегрального рівняння (34), оскільки $\tilde{g}_n(t')$ і $\tilde{g}_m(t')$ в розв'язках $c_1(x, y, t)$ і $c_2(x, y, t)$ фігурують тільки під знаком інтеграла за змінною t' .

І остаточно функції концентрації домішкової речовини в областях Ω_1 і Ω_2 набудуть вигляду

$$\begin{aligned} c_1(x, y, t) &= c_0^{(1)} e^{v_D x} \frac{sh v_D (x_0 - x)}{sh (v_D x_0)} + \\ &+ \frac{2}{x_0} e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x_n x) \left[-\frac{c_0^{(1)} x_n}{v_D^2 + x_n^2} e^{-D_1 (v_D^2 + x_n^2) t} + \right. \\ &+ \frac{1}{L} \int_{k=1}^{\infty} \left\{ \tilde{g}_n(t') e^{-D_1 (v_D^2 + x_n^2)(t-t')} \times \right. \\ &\left. \left. \times \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(y_k y) e^{-D_1 y_k^2 (t-t')} \right) \right\} dt' \right], \quad (35) \end{aligned}$$

$$c_2(x, y, t) = c_0^{(2)} \left(1 - \frac{x}{x_0} \right) -$$

$$\begin{aligned} & - \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(x_m x) e^{-D_2 x_m^2 t} \left\{ \frac{c_0^{(2)}}{x_m} + \frac{1}{l} \int_0^t \tilde{g}_m(t') e^{D_2 x_m^2 t'} \times \right. \\ & \left. \times \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos(y_j (y - L)) e^{-D_2 y_j^2 (t-t')} \right) dt' \right\}. \quad (36) \end{aligned}$$

Зазначимо, що для знаходження $\tilde{g}_m(t)$ використовуємо співвідношення (29) разом з виразом (34).

Числовий аналіз потоку маси через внутрішню поверхню контакту та концентрації домішкової речовини в структурних елементах тіла

Наведемо приклад розподілів функції $g(\xi, \tau)$, яка є сумарним потоком маси через поверхню контакту $\zeta = \Lambda$ з протилежним знаком. А також проілюструємо та проаналізуємо характерні розподіли функцій концентрації домішкових частинок за глибиною тіла в областях Ω_1 і Ω_2 , обчислені за формулами (35) і (36) в безрозмірних змінних (3). Числові розрахунки проведено за формулами (29), (34) у безрозмірних змінних $\xi = (k/D_1)^{1/2} x$, $\zeta = (k/D_1)^{1/2} y$, $\tau = kt$, де k коефіцієнт, який має розмірність $[c^{-1}]$ [3]. Обчислення виконувались з точністю $\varepsilon = 10^{-7}$.

При цьому прийняті такі базові значення параметрів: $\xi_0 = (k/D_1)^{1/2}x_0 = 10$, $\Lambda = (k/D_1)^{1/2}L = 0.1$, $\lambda = (k/D_1)^{1/2}l = 0.9$, $d = D_2/D_1 = 0.01$, $\eta_1/\eta_2 = 0.1$, $c_0^{(2)}/c_0^{(1)} = 0.1$, $\tau = 5$. Рис. 2 ілюструє поведінку функції

$g(\xi, \tau)$ залежно від значення коефіцієнта конвективного переносу в області Ω_1 . Тут криві 1–5 відповідають $\bar{v} = (k_2 D_1)^{-1/2}v = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$ на рис.2a і $\bar{v} = 2.3; 2.4; 2.5; 2.7; 3; 4; 5$ на рис.2b.

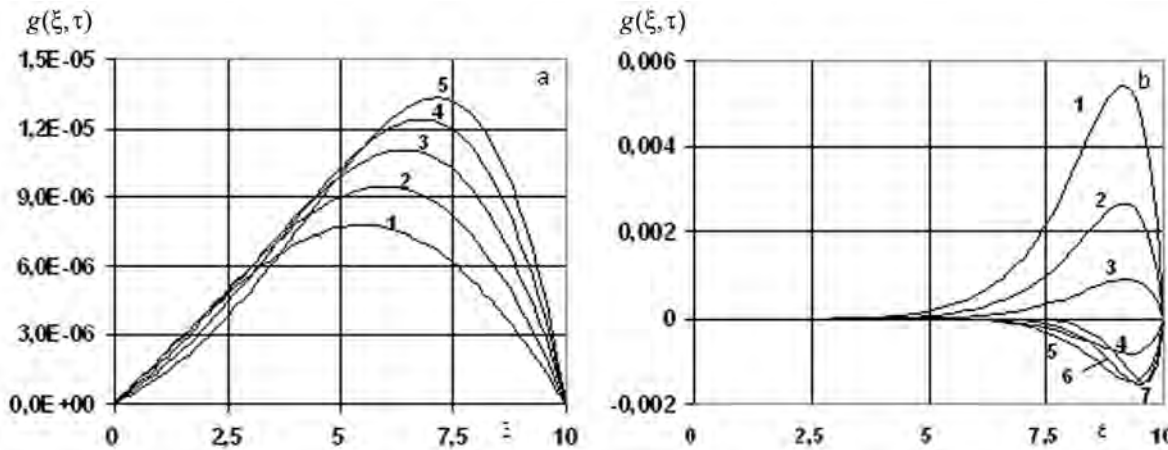


Рис. 2. Розподіли функції $g(\xi, \tau)$ для малих (рис. а) і великих (рис. б) значень швидкості конвективного перенесення

Зазначимо, що врахування конвективної складової в одній з областей приводить до істотного перерозподілу потоку маси через поверхню контакту на більшій частині цієї межі. Із зростанням значень швидкості конвективного перенесення спостерігається значне зменшення потоку домішки через контактну поверхню для $\xi \in [0; 4]$ (функція $g(\xi, \tau)$ приймає значення в межах похибки, рис. 2b), істотно зростаючи біля “нижньої” границі шару $\xi = \xi_0$. Причому чим більшою є швидкість конвективного перенесення, тим ближче до границі $\xi = \xi_0$ починається зростання потоку і тим більших значень досягає максимум $|g(\xi, \tau)|$ (рис. 2b). Також треба зазначити, що зростання значення \bar{v} на порядок веде до збільшення максимального абсолютного значення $g(\xi, \tau)$ на 2–3 порядки (наприклад, крива 2 на рис. 2a і крива 1 на рис. 2b). Значення коефіцієнта швидкості конвективного перенесення \bar{v} не тільки істотно впливає на величину потоку, але його зміна може привести до зміни знака функції $g(\xi, \tau)$, тобто до зміни напрямку сумарного потоку маси через поверхню контакту (рис. 2b). Зазначимо, що при малих значеннях \bar{v} максимум функції $|g(\xi, \tau)|$ знаходиться в околі $\xi \approx 5.5$ (крива 1 на рис. 2a) і із зростанням \bar{v} поступово зсувається до нижньої границі тіла $\xi = \xi_0$. З часом інтенсивність потоку маси через границю контакту істотно зменшується. При цьому для великих швидкостей конвективного перенесення перед виходом на усталений режим функція $g(\xi, \tau)$ змінює знак.

Інші коефіцієнти задачі також істотно впливають на поведінку функції $g(\xi, \tau)$. Такі параметри зада-

чі, як відношення коефіцієнтів дифузії $d = D_2/D_1$ і відношення потужностей джерел маси $c_0^{(2)}/c_0^{(1)}$ на поверхні областей Ω_1 і Ω_2 не тільки значно впливають на величину потоку, але їхня зміна може привести до зміни знака функції $g(\xi, \tau)$, тобто до зміни напрямку сумарного потоку маси через поверхню контакту $\zeta = \Lambda$. При цьому при зростанні d для малих і великих значень \bar{v} в області Ω_1 значення $|g(\xi, \tau)|$ зменшується, а для великих значень швидкості конвективного перенесення в області Ω_2 спостерігається протилежна закономірність: із зростанням d значення $|g(\xi, \tau)|$ також зростає (рис.7b). Щодо залежності $g(\xi, \tau)$ від потужності джерел маси на поверхні $\xi = 0$, то чим більшого значення набуває значення $c_0^{(2)}$ концентрація домішки в області Ω_2 , тим меншим є значення функції $|g(\xi, \tau)|$ в області Ω_1 . В області Ω_2 спостерігається протилежна закономірність: із зростанням $c_0^{(2)}/c_0^{(1)}$ значення $|g(\xi, \tau)|$ також зростає.

Зміна відношення коефіцієнтів концентраційної залежності хімічних потенціалів η_1/η_2 , які визначають величину стрибка концентрації на границі контакту, не приводить до зміни напрямку результуючого потоку через поверхню контакту, але треба зауважити, що значно впливає на інтенсивність потоку. Зростання значення η_1/η_2 на порядок веде до збільшення максимального абсолютного значення $|g(\xi, \tau)|$ на 1–2 порядки. При зміні товщин областей Ω_1 і Ω_2 , тобто якщо поверхню контакту зсувати до границі $\zeta = \Lambda + \lambda$, то величина потоку маси через цю границю спочатку зростає, а потім поступово спадає, при-

чому найбільших значень максимум функції $g(\xi, \tau)$ набуває, якщо границя контакту знаходиться в межах $[0.3; 0.4]$.

На рис. 3–7 показані характерні розподіли за глибиною шару концентрацій домішкової речовини $c_1(\xi, \zeta, \tau)$ в середині області Ω_1 при $\zeta_* = 0.05$ (рис. а) і $c_2(\xi, \zeta, \tau)$ в середині області Ω_2 $\zeta_* = 0.55$ (рис. б) в залежності від різних значень параметрів задачі.

На рис.3 показаний вплив швидкості конвективного перенесення частинок в області Ω_1 на значення і поведінку функцій $c_i(\xi, \zeta, \tau)$. Тут криві 1а–5а відповідають малим значенням $\bar{v} = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$, а криві 1б–5б – великим значенням $\bar{v} = 1; 1.5; 2; 3; 4$ на рис. 3а і криві 1б–4б - $\bar{v} = 1; 1.5; 2; 2.5$ на рис. 3б. Тут і надалі штрихові лінії описують відповідну функцію для $\bar{v} = 0.2$, а суцільні – для $\bar{v} = 2$.

На рис.4 подані розподіли концентрації домішкової речовини $c_i(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ в різні моменти часу τ .

На рис. 4а криві 1–5 відповідають значенням $\tau = 1; 3; 5; 10; 50$, а на рис. 4б – $\tau = 1; 3; 5; 10; 30$. Рис. 5 демонструє залежність функцій концентрацій від різних значень відношення коефіцієнтів концентраційної залежності хімічних потенціалів η_1/η_2 в областях Ω_1 та Ω_2 . На рис.5а криві 1–5 відповідають значенням $\eta_1/\eta_2 = 1; 2; 5; 8; 10$, а на рис.5б - $\eta_1/\eta_2 = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$. Рис.6 ілюструє поведінку концентрацій $c_i(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ для різних значень відношення потужностей джерел маси $c_0^{(2)}/c_0^{(1)}$ в областях Ω_1 та Ω_2 , де криві 1–5 відповідають значенням $c_0^{(2)}/c_0^{(1)} = 0.1; 0.5; 1; 5; 10$ для $\bar{v} = 2$, а штрихові криві 1а–5а відповідають $\bar{v} = 0.2$. На рис. 7 показані розподіли функцій концентрацій $c_i(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ для різних значень відношення коефіцієнтів дифузії $d = D_2/D_1$. Тут криві 1–5 відповідають $d = 0.001; 0.01; 0.1; 1; 5; 10$.

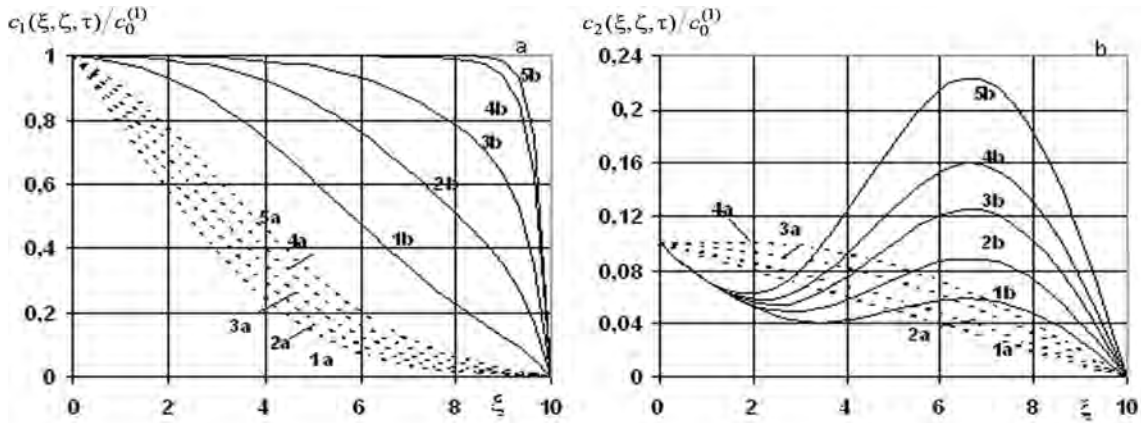


Рис. 3. Розподіли функцій концентрації домішки $c_1(\xi, \zeta, \tau)$ в області Ω_1 (рис. а) і $c_2(\xi, \zeta, \tau)$ в області Ω_2 (рис. б) для різних значень швидкості конвективного перенесення

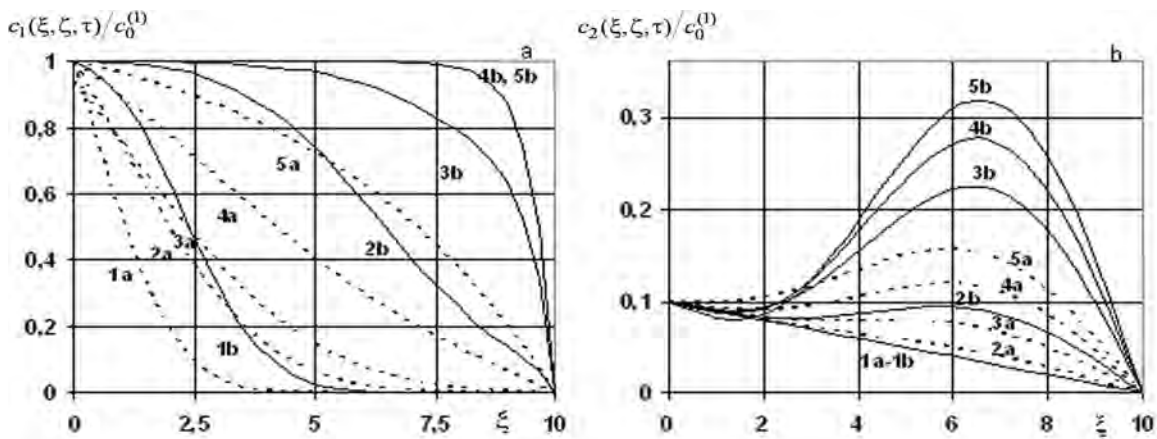


Рис. 4. Розподіли концентрацій домішкової речовини $c_i(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ в областях Ω_1 (рис. а) та Ω_2 (рис. б) в різні моменти часу ($\bar{v} = 2$ – суцільні лінії; для $\bar{v} = 0.2$ – штрихові лінії)

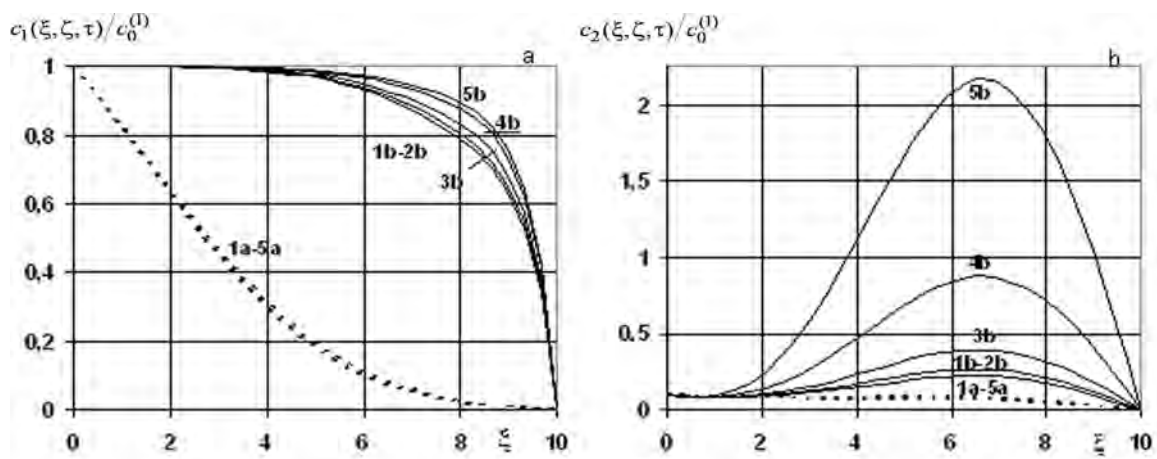


Рис. 5. Залежність функцій концентрації домішки $c_1(\xi, \zeta, \tau)$ в області Ω_1 (рис. а) і $c_2(\xi, \zeta, \tau)$ в області Ω_2 (рис. б) від різних значень відношення η_1/η_2 ($\bar{\nu}=2$ – суцільні лінії; для $\bar{\nu}=0.2$ – штрихові лінії)

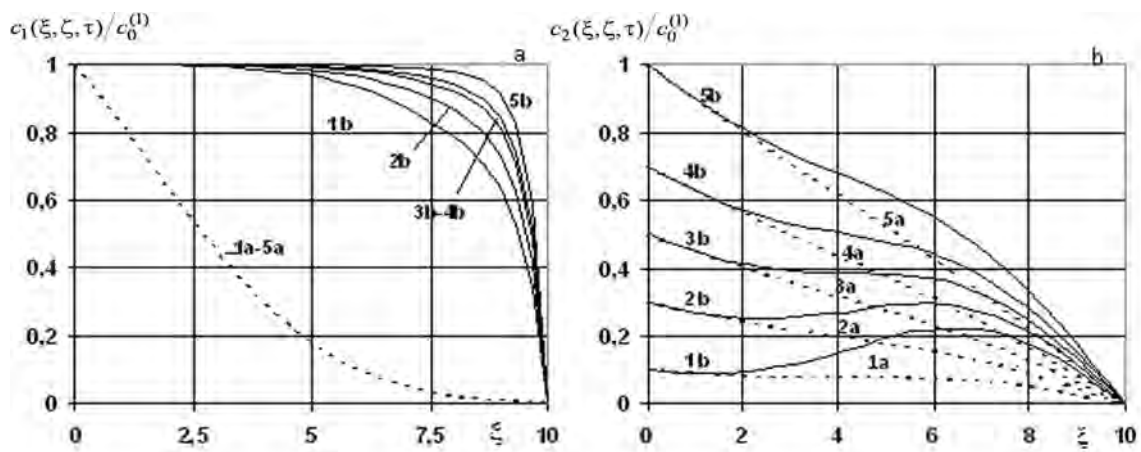


Рис. 6. Залежність функцій концентрації домішки $c_1(\xi, \zeta, \tau)$ в області Ω_1 (рис. а) і $c_2(\xi, \zeta, \tau)$ в області Ω_2 (рис. б) від різних значень відношення потужностей джерел маси ($\bar{\nu}=2$ – суцільні лінії; для $\bar{\nu}=0.2$ – штрихові лінії)

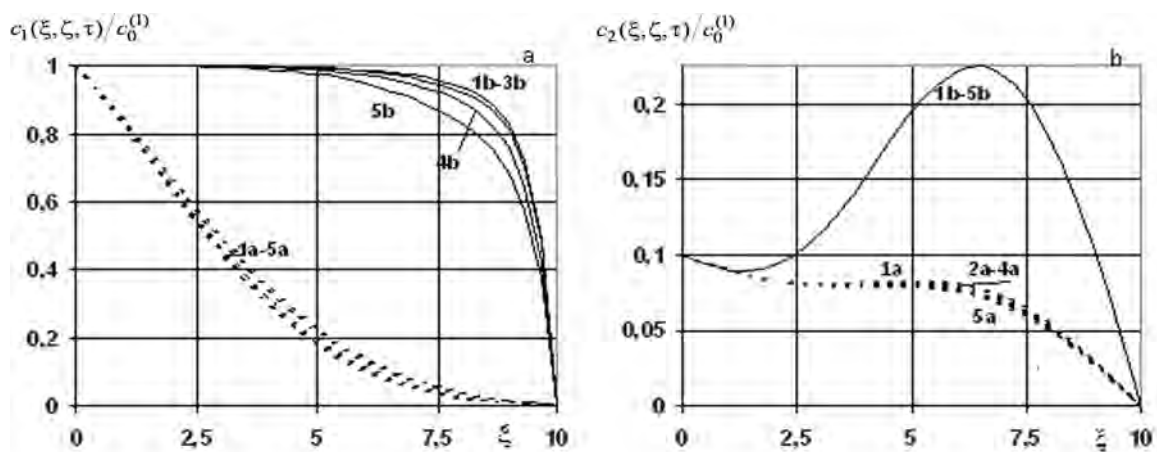


Рис. 7. Залежність функцій концентрації домішки $c_1(\xi, \zeta, \tau)$ в області Ω_1 (рис. а) і $c_2(\xi, \zeta, \tau)$ в області Ω_2 (рис. б) від відношення коефіцієнтів дифузії d ($\bar{\nu}=2$ – суцільні лінії; для $\bar{\nu}=0.2$ – штрихові лінії)

Зазначимо, що істотно відрізняються розподіли концентрації домішкової речовини в області Ω_1 , де масоперенос відбувається як дифузійним, так і конвективним механізмами, і в області Ω_2 , в якій враховано тільки дифузію частинок. При цьому в області Ω_1 функція $c_i(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ для більшості значень параметрів задачі має сталий або спадний характер (наприклад, рис. 3а–7а). До того ж в області Ω_2 для малих швидкостей конвективного перенесення в області Ω_1 спостерігається зростання концентрації $c_2(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ від верхньої поверхні $\xi = 0$, а для великих значень \bar{v} – у нижній частині шару $\xi = \xi_0$ (рис. 3б).

Для малих часів τ швидкість конвективного перенесення \bar{v} не впливає на значення концентрації $c_2(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ (криві 1а і 1б на рис. 4б). Зі збільшенням часу процесу масопереносу концентрація як в області Ω_1 так і в області Ω_2 збільшується (рис. 4а і 4б). Якщо протягом усього процесу масопереносу значення концентрації $c_1(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ в області Ω_1 не більше ніж її значення, яке підтримується на поверхні Ω_1 , то в області Ω_2 спостерігається наявність локального максимуму $c_2(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$, який з часом зростає і стає глобальним у нижній половині шару, перевищуючи значення, які підтримуються на поверхні Ω_2 в рази (рис. 4б). Зазначимо, що для малих \bar{v} функція $c_1(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ виходить на стаціонарний режим при $\tau = 50$ (крива 5а на рис. 4а), а для великих – при $\tau = 10$ (криві 4б, 5б на рис. 4б). В області Ω_2 функція $c_2(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ виходить на стаціонарний режим при $\tau = 100$ незалежно від коефіцієнта \bar{v} (рис. 4б).

Збільшення відношення коефіцієнтів η_1/η_2 , які визначають стрибок функції концентрації на границі контакту, зменшує значення $c_1(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ на певних інтервалах (рис. 5а) і істотно збільшує значення функції $c_2(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ в області Ω_2 на всьому проміжку $[0; \xi_0]$ (рис. 5б).

Зміна відношення коефіцієнтів дифузії $d = D_2/D_1$ не змінює поведінку функцій концентрації домішки (рис. 7). Зі зменшенням d значення $c_i(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ зростають як в області Ω_1 , так і в області Ω_2 (рис. 7). При цьому в області Ω_2 при великих значеннях швидкості конвективного перенесення в області Ω_1 зміна коефіцієнта дифузії d майже не впливає на значення $c_2(\xi, \zeta, \tau)/c_0^{(1)}$ (рис. 7б).

Зазначимо, що місце розташування поверхні контакту $\zeta = \Lambda$ практично не впливає на розподіл концентрації по глибині в області Ω_1 , а в області Ω_2 спостерігається незначний вплив у приповерхневих областях шару.

Висновки

Отже, у роботі отримано точні аналітичні розв'язки контактної-крайової задачі нестационарних процесів дифузії домішкової речовини у двофазній регулярній структурі за періодичного характеру конвективних явищ на основі застосування різних інтегральних перетворень за просторовими змінними окремо в кожній з областей, що контактують.

Зазначимо також, що запропонований метод побудови точних розв'язків контактної-крайових задач нестационарної конвективної дифузії не використовує умови на розміри областей, що контактують, тобто може бути застосований як для тіл зі співвимірними розмірами контактуючих областей, так і у випадку, якщо ширина областей, де масоперенос відбувається як дифузійним, так і конвективним механізмами, є набагато більшими або меншими за області, в яких відбувається процес дифузії домішки.

Зауважимо, зважаючи на вигляд рівнянь (1) і (2), розв'язки задачі масопереносу в регулярних структурах можна застосовувати для вивчення процесів теплопровідності, розглядаючи ідеальні умови контакту як частковий випадок щодо наведеного в статті, оскільки для теплових процесів характерні саме ідеальні умови на границях контакту областей.

Література

- [1] Aifantis E.C. Continuum basis for diffusion in regions with multiple diffusivity // J. Appl. Phys. – 1979. – Vol. 50, – № 3. – P. 1334–1338.
- [2] Бурак Я.И., Галапац Б.П., Чапля Е.Я. Деформация электропроводных тел с учетом гетеродиффузии заряженных примесных частиц // Физ.-хим. мех. материалов. – 1980. – № 5. – С. 8–14.
- [3] Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю. Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128 с.
- [4] Yoon D., Kim M., Choj C. Transport correlation of double-diffusive convection in darcy-extended porous layer // Journal of Chemical Engineering of Japan. – 2001. – Vol. 34. – P. 287–291.
- [5] Krishnamurti R. Double-diffusive transport in laboratory thermohaline staircases // J. Fluid Mech. – 2003. – Vol. 483. – P. 287–314.
- [6] Konstantinidis D., Eleftheriadis I., Aifantis E. On the experimental validation of the double diffusivity model // Scripta Materialia. – 1998. – Vol. 38. – P. 573–580.

- [7] *Baytas A., Baytas A., Ingham D., Pop I.* Double diffusive natural convection in an enclosure filled with a step type porous layer: Non-Darcy flow // *International Journal of Thermal Sciences.* – 2009. – Vol. 48 (4). – P. 665–673.
- [8] *Soares J.* Diffusion of a fluid through a spherical elastic solid undergoing large deformations // *International Journal of Engineering Science.* – 2009. – Vol. 47. – P. 50–63.
- [9] *Fisher J.S.* Calculation of diffusion penetration curves for surface and grain boundary diffusion // *J.Appl.Phys.* – 1951. – Vol. 22. – P. 74–77.
- [10] *Klinger L., Rabkin E.* Diffusion along the grain boundaries in crystals with dislocations // *Interface Science.* – 1998. – Vol. 6. – P. 197–203.
- [11] *Ху С.* Диффузия в кремнии и германии / В кн.: Атомная диффузия в полупроводниках. – Под ред. Шоу Д. – М.: Мир, 1975. – С. 248–405.
- [12] *Каповский И.Я., Ткаченко И.В.* Эффективный коэффициент диффузии в неоднородной среде // *УФЖ.* – 1991. – Т. 36. – № 3. – С. 432–434.
- [13] *Savula Y.H., Koukhariskiy V.M., Chaplya Y.Y.* Numerical analysis of advection diffusion in the continuum with thin canal // *Numerical Heat Transfer. Part A.* – 1998. – Vol. 38. – № 3. – P. 657–679.
- [14] *Abdel-Gawad H.* A model for a finite memory transport in the Fisher equation // *Applied Mathematical Modelling.* – 2008. – Vol. 32. – P. 1883–1893.
- [15] *Bonelli S.* Approximate solution for the diffusion equation and its application to seepage-related problems // *Applied Mathematical Modelling.* – 2009. – Vol. 33. – P. 110–126.
- [16] *Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
- [17] *Chernukha O.* Admixture mass transfer in a body with horizontally periodical structure // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* – 2005. – Vol. 48. – P. 2290–2298.
- [18] *Chaplya Y., Chernukha O.* Mathematical Modelling of Diffusion of Decaying Particles in Regular Structures // *Reviews on Advanced Materials Science.* – 2010. – Vol. 23 (1) – P. 21–31.
- [19] *Гиббс Дж.* Термодинамика. Статистическая механика. – М.: Наука, 1982. – 584 с.
- [20] *Бурак Я.Й., Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. – К.: Наук. думка, 2006. – 272 с.
- [21] *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. литературы, 1955. – 667 с.
- [22] *Мартынченко Н.А., Пустыльничков Л.М.* Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распространенными параметрами. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
- [23] *Камке Е.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1985. – 304 с.
- [24] *Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.* – М.: Мир, 1979. – 830 с.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ КОНВЕКТИВНО-ДИФфуЗИОННОГО МАССОПЕРЕНОСА В БИНАРНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ СТРУКТУРАХ

В.Е. Гончарук^{a,b}, В.А. Дмитрук^{a,b}, О.Ю. Чернуха^a

^a Центр математического моделирования ИППММ им. Я.С. Пидстригача НАН Украины, 79005, г. Львов, вул. Дж. Дудаева, 15

^b Национальный университет “Львовская политехника” МОНМС Украина, 79013, г. Львов, ул. С.Бандеры, 12

Исследованы нестационарные процессы массопереноса примесного вещества в двухфазных регулярных структурах с учетом периодического характера конвективных явлений. Предложен метод построения точных аналитических решений такого типа контактно-краевых задач, который базируется на использовании различных интегральных преобразований отдельно в контактирующих областях. Связь между этими интегральными преобразованиями найдена с использованием неидеальных контактных условий, сформулированных для функции концентрации. Получено точное аналитическое решение задачи нестационарной диффузии для двухфазного слоя регулярной структуры с учетом конвективного переноса в одной из фаз. Найдены и исследованы выражения для потоков примесных частиц через межфазную поверхность контакта. Проведен численный анализ концентрации мигрирующих частиц в структурных элементах тела.

Ключевые слова: диффузия, конвекция, контактно-краевая задача, двухфазная регулярная структура, неидеальные контактные условия, поток массы, интегральное преобразование.

2000 MSC: 93A30; 35K20; 42A38; 45K05

УДК: 517.958:532.72

NONSTATIONARY PROCESSES OF CONVECTIVE DIFFUSION MASS TRANSFER IN BINARY REGULAR STRUCTURES

V.Y. Goncharuk^{a, b}, V.A. Dmytruk^{a, b}, O.Y. Chernukha^a

^a*Centre of Mathematical Modelling of IAPMM of Ukrainian National Academy of Sciences
15 Dudayev Str., 79005, Lviv, Ukraine*

^b*National University "Lviv Polytechnic" of MESUS of Ukraine
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine*

Having analyzed the nonstationary processes of admixture transfer in two-phase regular structures with allowance for a periodical character of convective phenomena, we propose a method of constructing exact analytic solutions for such a class of problems. This technique is based on the usage of particular integral transformations separately in the contacting regions. The relation between the corresponding integral transformations is obtained from the nonideal contact conditions formulated for the function of concentration. We have obtained the analytic solution of the nonstationary diffusion problem for a two-phase layer of a regular structure with convective mass transfer mechanism in one of the phases. The expressions describing admixture flow through the interface are derived and investigated. Having analyzed the concentration of migratoring particles in the structural body elements and admixture flow through the body interface.

Key words: diffusion, convection, initial contact-boundary problem, two-phase regular structure, non-ideal contact conditions, mass flow, integral transformation

2000 MSC: 93A30; 35K20; 42A38; 45K05

УДК: 517.958:532.72