ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
Вип.740 № 740, (2012) с. 61–64

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
“LVIVSKA POLITECHNIKA”
“Physical & mathematical sciences”
Vol.740 No 740, (2012) 61–64

ІТЕРАЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ З ПОРЯДКОМ ЗБІЖНОСТІ 1,839... ЗА УЗАГАЛЬНЕНИХ УМОВ ЛІПШИЦЯ ДЛЯ ПОДІЛЕНИХ РІЗНИЦЬ

С.М. Шахно

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська 1, 79000, Львів, Україна

(Отримано 26 вересня 2012 р.)

Досліджено збіжність методу з порядком збіжності 1,839... для розв'язування нелінійних операторних рівнянь у банахових просторах за узагальнених умов Ліпшиця для поділених різниць першого та другого порядку. Встановлено умови та швидкість збіжності цього методу, знайдено область єдиності розв'язку задачі.

Ключові слова: нелінійне рівняння, поділена різниця, умова Ліпшиця, порядок збіжності.

2000 MSC: 65J15, 65H10

УДК: 519.6

Вступ

Нехай задане рівняння

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

де $F : D \subseteq X \to Y$ – нелінійний оператор, X, Y – банахові простори.

Нехай x, y дві фіксовані точки з D. Лінійний оператор $F(x, y)$ з X в Y називатимемо поділеною різницею першого порядку для оператора F за точками x і y, якщо справедлива рівність [1]

$$F(x, y)(x - y) = F(x) - F(y) \tag{2}$$

Будемо вважати, що існує похідна Фреше оператора F в D, причому $F(x, x) = F'(x)$.

Поділеною різницею другого порядку від функції F за точками x, y та z називатимемо оператор $F(x, y, z)$, який задовольняє умову

$$F(x, y, z)(y - z) = F(x, y) - F(x, z). \tag{3}$$

Найпростішим різницевим методом розв'язування нелінійних рівнянь є метод хорд

$$x_{n+1} = x_n - (F(x_n, x_{n-1}))^{-1} F(x_n),\ n = 0,1,2, \dots, \tag{4}$$

де $F(x_n, x_{n-1})$ – поділена різниця першого порядку, x_0, x_{-1} – задані.

Метод хорд для розв'язування нелінійних операторних рівнянь в банаховому просторі досліджували автори [1–5] за умови, що поділені різниці нелінійного оператора F задовольняють умову Ліпшиця (Гьольдера) з невід'ємною постійною L. У [9] досліджено метод Курчатова за звичайних умов Ліпшиця на поділені різниці першого та другого порядків і встановлено квадратичну збіжність його. Ітераційна формула методу Курчатова має вигляд

$$\begin{aligned} &x_{n+1} = x_n - (F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}))^{-1} F(x_n),\\ &n = 0,1,2, \dots, \end{aligned} \tag{5}$$

де $F(u, v)$ – поділена різниця першого порядку, x_0, x_{-1} – задані.

У праці [11] запропоновано ітераційний процес

$$x_{n+1} = x_n - \left[F(x_n, x_{n-1}) + F(x_{n-2}, x_n) - F(x_{n-2}, x_{n-1})\right]^{-1} F(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{6}$$

де $F(\cdot,\ \cdot)$ – поділена різниця першого порядку від оператора F. Встановлено локальну та напівлокальну збіжність (6) за класичних умов Ліпшиця для поділених різниць першого та другого порядку, x_0, x_{-1}, x_{-2} – задані.

У праці [6] під час дослідження методу Ньютона запропоновано узагальнені умови Ліпшиця для оператора похідної, в яких замість константи L використано деяку додатну інтегровну функцію. У нашій праці [10] введено аналогічну узагальнену умову Ліпшиця для оператора поділеної різниці першого порядку і за цієї умови досліджено збіжність методу хорд та встановлено порядок збіжності $(1 + \sqrt{5})/2$. У цій статті ми вводимо узагальнену умову Ліпшиця також для поділеної різниці другого порядку і вивчаємо збіжність методу Потра (6).

Позначимо $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\} \subset D$ – кулю радіуса r з центром в точці x_0.

Умову на оператор поділеної різниці $F(x, y)$

$$\begin{aligned} &\|F(x, y) - F(u, v)\| \le L(\|x - u\| + \|y - v\|)\\ &\forall x, y, u, v \in B(x_0, r) \end{aligned} \tag{7}$$

називають умовою Ліпшиця в області $B(x_0, r)$ з постійною L.

Якщо виконується умова

$$\|F(x,y) - F'(x_0)\| \leq L(\|x - x_0\| + \|y - x_0\|) \quad \forall x, y \in B(x_0, r), \tag{8}$$

то ми називаємо її центральною умовою Ліпшиця в кулі $B(x_0, r)$ з константою L.

Проте L в умовах Ліпшиця не обов'язково має бути константою, а може бути додатною інтегровною функцією. У цьому випадку (7) і (8) для $x_0 = x^*$ будуть замінені відповідно на

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x,y) - F(u,v))\| \leq \leq \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(u)du \quad \forall x, y, u, v \in B(x^*, r) \tag{9}$$

та

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x,y) - F'(x^*))\| \leq \leq \int_0^{\|x-x^*\|+\|y-x^*\|} L(u)du \quad \forall x, y \in B(x^*, r). \tag{10}$$

Одночасно умови Ліпшиця (9) і (10) називаються узагальненими умовами Ліпшиця.

Аналогічно вводимо узагальнену умову Ліпшиця для поділеної різниці другого порядку

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(u,x,y) - F(v,x,y))\| \leq \leq \int_0^{\|u-v\|} N(u)du \; \forall x, y, u, v \in B(x^*, r), \tag{11}$$

де N – додатна інтегровна функція.

I. Збіжність методу Потра (6)

Радіус області збіжності і порядок збіжності методу Потра встановлює

Теорема 1. *Нехай F – нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій області D банахового простору X зі значеннями у банаховому просторі Y. Припустимо, що: 1) $F(x) = 0$ має розв'язок $x^* \in D$, у якому існує похідна Фреше $F'(x^*)$ і вона є оборотна; 2) F має поділені різниці першого та другого порядку в $B(x^*, r) \subset D$, які задовольняють узагальнені умови Ліпшиця*

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x,y) - F(u,v))\| \leq \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(u)du, \tag{12}$$

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(u,x,y) - F(v,x,y))\| \leq \int_0^{\|u-v\|} N(u)du, \tag{13}$$

де $x, y, u, v \in B(x^*, r)$, $\varrho(y) = \|y - x^*\|$, L і N – неспадні функції. Нехай r задовольняє рівняння

$$\frac{\int_0^r L(u)du + r\int_0^{2r} N(u)du}{1 - \Big(2\int_0^r L(u)du + r\int_0^{2r} N(u)du\Big)} = 1. \tag{14}$$

Тоді для всіх $x_0, x_{-1}, x_{-2} \in B(x^*, r)$ ітераційний процес (6) коректно визначений і генерована ним послідовність $\{x_n\}_{n\geq 0}$, яка належить $B(x^*, r)$, збігається до x^* і задовольняє нерівність

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \frac{\int_0^{\rho(x_n)} L(u)du + \int_0^{\|x_n - x_{n-2}\|} N(u)du\|x_{n-1} - x^*\|}{1 - \Big(2\int_0^{\rho(x_n)} L(u)du + \int_0^{\|x_n - x_{n-2}\|} N(u)du\|x_{n-1} - x^*\|\Big)}\|x_n - x^*\|. \tag{15}$$

□ *Доведення.* Покажемо, що $g(t) = \frac{1}{t}\int_0^t L(u)du$ та $h(t) = \frac{1}{t}\int_0^t N(u)du$ монотонно неспадні відносно t. Дійсно, при монотонності L ми маємо

$$\Big(\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} - \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\Big)L(u)du =$$
$$= \Big(\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} + \Big(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\Big)\int_0^{t_1}\Big)L(u)du \geq$$
$$\geq L(t_1)\Big(\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} + \Big(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\Big)\int_0^{t_1}\Big)du =$$
$$= L(t_1)\Big(\frac{t_2 - t_1}{t_2} + t_1\Big(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\Big)\Big) = 0$$

для $0 < t_1 < t_2$. Отже, $g(t)$ є неспадна відносно t. Аналогічно отримуємо для $h(t)$.

Позначимо через A_n лінійний оператор $A_n = A(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$. Якщо $x_n, x_{n-1}, x_{n-2} \in B(x^*, r)$, то A_n є оборотний і виконується нерівність

$$\|A_n^{-1}F'(x^*)\| = \|[I - (I - F'(x^*)^{-1}A_n)]^{-1}\| \leq$$
$$\leq \Big(1 - \Big(2\int_0^{\rho(x_n)} L(u)du + \int_0^{\|x_n - x_{n-2}\|} N(u)du\|x^* - x_{n-1}\|\Big)\Big)^{-1}. \tag{16}$$

Дійсно, з формул (12) і (13) отримаємо

$$\|I - F'(x^*)^{-1}A_n\| = \|F'(x^*)^{-1}(F(x^*, x^*) - F(x_n, x^*) +$$
$$+ F(x_{n-2}, x^*) - F(x_{n-2}, x_n) + F(x_n, x^*) -$$
$$- F(x_n, x_{n-1}) - F(x_{n-2}, x^*) + F(x_{n-2}, x_{n-1}))\| =$$
$$= \|F'(x^*)^{-1}(F(x^*, x^*) - F(x_n, x^*) + (F(x_{n-2}, x^*) -$$
$$- F(x_{n-2}, x_n) + (F(x_n, x^*, x_{n-1}) -$$
$$- F(x_{n-2}, x^*, x_{n-1}))(x^* - x_{n-1})\| \leq$$
$$\leq 2\int_0^{\rho(x_n)} L(u)du + \int_0^{\|x_n - x_{n-2}\|} N(u)du\|x^* - x_{n-1}\|.$$

З означення r маємо

$$0 < 2\int_0^r L(u)du + r\int_0^{2r} N(u)du = 1 - \int_0^r L(u)du - r\int_0^{2r} N(u)du < 1. \tag{17}$$

Використовуючи теорему Банаха, ми отримуємо формулу (16). Далі можна записати

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-x^*\| = \|x_n - x^* - A_n^{-1}(F(x_n)-F(x^*))\| = \\ &= \|-A_n^{-1}(F(x_n,x^*)-A_n)(x_n-x^*)\| \le \\ &\le \|A_n^{-1}F^{'}(x^*)\|\|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x_n,x^*)-A_n)\|\|x_n-x^*\|.\end{aligned} \tag{18}$$

Згідно з умовами (12) і (13) теореми маємо

$$\begin{aligned}&\|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x_n,x^*)-A_n)\| = \\ &= \|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x_n,x^*)-F(x_n,x_n)+F(x_n,x_n)- \\ &-F(x_n,x_{n-1})-F(x_{n-2},x_n)+F(x_{n-2},x_{n-1})\|) = \\ &\|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x_n,x^*)-F(x_n,x_n)\|+ \\ &+\|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x_n,x_n,x_{n-1})- \\ &-F(x_{n-2},x_n,x_{n-1})(x_n-x_{n-1})\| \le \\ &\le \int_0^{\rho(x_n)} L(u)du + \int_0^{\|x_n-x_{n-2}\|} N(u)du\|x_n-x_{n-1}\|.\end{aligned}$$

З (16) і (18) видно, що виконується (15). Далі з (15) і (17) отримаємо

$$\|x_{n+1}-x^*\| < \|x_n-x^*\| < r^*. \tag{19}$$

Отже, ітераційний алгоритм (6) є коректно визначений і послідовність, яку вона породжує, належить $B(x^*,r)$. З (15) і (19) випливає $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|=0$. Теорему доведено. ■

Наслідок 1. Порядок збіжності ітераційного процесу (6) дорівнює 1,839... .

З оцінки (15) маємо, що існують $C \ge 0$ і натуральне N такі, що виконується нерівність

$$\|x_{n+1}-x^*\| \le C\,\|x_n-x^*\|\,\|x_{n-1}-x^*\|\,\|x_{n-2}-x^*\|, \quad n \ge N.$$

Звідси отримуємо рівняння $m^3-m^2-m-1=0$, єдиний додатний корінь якого $m_P = 1,839...$ є порядком збіжності методу (6).

II. Область єдиності розв'язку рівняння

Теорема 2. *Припустимо, що: 1) $F(x)=0$ має розв'язок $x^* \in D$, у якому існує похідна Фреше $F'(x^*)$ і вона є оборотна; 2) F має поділені різниці першого порядку $F(x,x^*)$ в $B(x^*,r) \subset D$, які задовольняють узагальнену умову Ліпшиця*

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x,x^*)-F'(x^*))\| \le \le \int_0^{\rho(x)} L(u)du \quad \forall x \in B(x^*,r),$$

де $\rho(x)=\|x-x^*\|$ і L – додатна інтегровна функція. Нехай r задовольняє

$$\int_0^r L(u)du \le 1.$$

Тоді рівняння $F(x)=0$ має єдиний розв'язок x^* в $B(x^*,r)$.

Доведення аналогічне [10].

III. Наслідки

Під час вивчення різницевих методів традиційними є припущення, що поділені різниці задовольняють умови Ліпшиця. Вважаючи, що L і N є константами, ми отримаємо з теорем 1 та 2 наслідки.

Наслідок 2. Припустимо, що: 1) $F(x)=0$ має розв'язок $x^* \in D$, у якому існує похідна Фреше $F'(x^*)$ і вона є оборотна; 2) F має поділені різниці першого та другого порядку $F(x,y)$ і $F(x,y,z)$ в $B(x^*,r) \subset D$, які задовольняють умови Ліпшиця

$$\begin{aligned}&\|F'(x^*)^{-1}(F(x,y)-F(x^*,x^*))\| \le \\ &\le L(\|x-x^*\|+\|y-x^*\|) \quad \forall x,y \in B(x^*,r),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|F'(x^*)^{-1}(F(u,x,y)-F(v,x,y))\| \le N\|u-v\| \\ &\forall x,y,u,v \in B(x^*,r),\end{aligned}$$

де L, N – додатні числа і r є додатним коренем рівняння $4Nr^2+3Lr-1=0$. Тоді метод Потра (6) збігається для всіх $x_{-1},x_0 \in B(x^*,r)$ і виконується (15).

Зауважимо, що отримане r збігається зі значенням, наведеним в [11].

Наслідок 3. Припустимо, що: 1) $F(x)=0$ має розв'язок $x^* \in D$, у якому існує похідна Фреше $F'(x^*)$ і вона є оборотна; 2) F має поділені різниці першого порядку $F'(x^*)^{-1}F(x,x^*)$ в $B(x^*,r) \subset D$, які задовольняють умову Ліпшиця

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x,x^*)-F'(x^*))\| \le L\|x-x^*\| \quad \forall x \in B(x^*,r),$$

де L – додатне число і $r = \dfrac{1}{L}$. Тоді рівняння $F(x)=0$ має єдиний розв'язок x^* у відкритій кулі $B(x^*,r)$. Більше того, дане r залежить тільки від L і не залежить від F.

Висновки

У роботах [1, 3, 5, 9, 8, 11] досліджено локальну збіжність методів хорд, Курчатова та Потра у разі виконання умов Ліпшиця для поділених різниць, які містять деякі постійні Ліпшиця. Ми дослідили локальну збіжність методу Потра за загальніших умов Ліпшиця, в яких замість сталих Ліпшиця використовуються деякі додатні інтегровні функції. Отримані результати містять відомі [11] як частинні випадки.

Література

[1] *Argyros I.K.* On an Algorithm for Solving Nonlinear Operator Equation // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. – 1991. – Vol. 10, № 1. – P. 83–92.

[2] *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.

[3] *Шахно С.М.* Застосування нелінійних мажорант для дослідження методу хорд розв'язування нелінійних рівнянь // Математичні студії. – 2004, – **22**, № 1. – С.79–86.

[4] *Шахно С., Макух О.* Локальна збіжність ітераційно-різницевих методів розв'язування нелінійних операторних рівнянь // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2003. – Вип. 7. – С. 124–131.

[5] *Hernandez M.A., Rubio M.J.* The Secant method and divided differences Hölder continuous // Applied Mathematics and Computation. – 2001. – Vol. 124. – P. 139–149.

[6] *Wang X.* Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space // IMA Journal of Numerical Analysis. – 2000. – Vol. 20. – P. 123–134.

[7] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

[8] *Шахно С.М.* Про різницевий метод з квадратичною збіжністю для розв'язування нелінійних операторних рівнянь // Математичні студії. – 2006. – **26**. № 1. – С. 105–110.

[9] *Shakhno S.M.* On a Kurchatov's method of linear interpolation for Solving Nonlinear Equations // Proc. Appl. Math. Mech. – 2004. – V. 4. – P. 650–651.

[10] *Шахно С.М.* Метод хорд при узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку // Матем. вісник НТШ. – 2007. – **4**. – С. 296–305.

[11] *Potra F. A.* On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear operator equations. // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 7(1) (1984–85) 75–106.

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ С ПОРЯДКОМ СХОДИМОСТИ 1,839... ПРИ ОБОБЩЕННЫХ УСЛОВИЯХ ЛИПШИЦА ДЛЯ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

С.М. Шахно

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, Украина

Исследовано сходимость метода с порядком сходимости 1,839... для решения нелинейных операторных уравнений при обобщенных условиях Липшица для разделенных разностей первого и второго порядков. Получены условия и скорость сходимости этого метода, найдено область единственности решения задачи.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, разделенная разность, условие Липшица, порядок сходимости.

2000 MSC: 65J15, 65H10

УДК: 519.6

ITERATIVE ALGORITHM WITH CONVERGENCE ORDER 1,839... UNDER THE GENERALIZED LIPSCHITZ CONDITIONS FOR THE DIVIDED DIFFERENCES

S.M. Shakhno

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

Convergence of the method with convergence order 1,839... for solving nonlinear operator equations in the Banach spaces under the generalized Lipschitz condition for the first- and second-order divided differences is investigated. The conditions and speed of convergence of this method are found. The uniqueness ball for solution of operator equations is determined.

Key words: nonlinear equation, divided difference, Lipschitz condition, convergence order.

2000 MSC: 65J15, 65H10

УДК: 519.6