ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.740 № 740, (2012) с. 49–60

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.740 No 740, (2012) 49–60

ТОЧНА ТРИТОЧКОВА РІЗНИЦЕВА СХЕМА ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПІВПРЯМІЙ

О.І. Паздрій

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 5 вересня 2012 р.)

Побудовано та обґрунтовано точну триточкову різницеву схему для чисельного розв'язування крайових задач на півпрямій для систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. За умов існування та єдиності розв'язку крайової задачі доведено існування та єдиність розв'язку точної триточкової різницевої схеми. Доведено збіжність методу послідовних наближень для її розв'язування.

Ключові слова: система нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, крайова задача, точна триточкова різницева схема.

2000 MSC: 65L10, 65L12, 34B15, 34B40

УДК: 519.62

Вступ

Точну триточкову різницеву схему (ТТРС) та триточкові різницеві схеми (ТРС) високого порядку точності чисельного розв'язування крайових задач на півпрямій для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку побудовано та досліджено у працях [1, 2]. У [3, 4] для задачі

$$\frac{d^2u}{dx^2} + m^2\frac{du}{dx} = -f(x,u), \quad x \in (0,\infty),\ m = const > 0,$$
$$u(0) = \mu_1, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0$$

розроблено та обґрунтовано ТТРС та її алгоритмічну реалізацію через ТРС високого порядку точності. У цій роботі результати, отримані в [3], узагальнено на випадок крайової задачі для системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} + \mathcal{A}\frac{d\mathbf{u}}{dx} = -\mathbf{f}(x,\mathbf{u}), \quad x \in (0,\infty), \\ \mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\mu}_1, \quad \lim_{x\to\infty}\mathbf{u}(x) = 0,\end{gathered} \qquad (1)$$

де $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\mu}_1 \in \mathbb{R}^n$, матриця $\mathcal{A} = [\mathrm{a_{is}}]_{\mathrm{i,s=1}}^{\mathrm{n}}$ і вектор-функція $\mathbf{f}(x,\mathbf{u}(x)) = \{f_i(x,\mathbf{u}(x))\}_{i=1}^n$. Для задачі (1) на нерівномірній сітці побудовано та обгрунтовано ТТРС з точною нелінійною крайовою умовою на правому граничному кінці сітки x_N.

I. Існування та єдиність розв'язку задачі

Наведемо достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі (1), які випливають із методу лінеаризації та принципу стискувальних відображень (див., наприклад, [6, 7]).

Задамо початкове наближення $\mathbf{u}^{(0)}(x) = \exp(-\mathcal{A}x)\boldsymbol{\mu}_1$ і множину

$$\begin{gathered}\Omega(D,\beta) = \big\{\mathbf{u}(x) : \mathbf{u}(x) \in C^1[0,\infty), \\ \big\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(0)}\big\|_{1,\infty,D} \le \beta, \quad D \subseteq [0,\infty)\big\}, \\ \|\mathbf{u}\|_{1,\infty,D} = \max\left\{\|\mathbf{u}\|_{0,\infty,D}, \left\|\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right\|_{0,\infty,D}\right\}, \\ \|\mathbf{u}\|_{0,\infty,D} = \max_{x\in D}\|\mathbf{u}(x)\|.\end{gathered}$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*,\ m^2\|\mathbf{v}\|^2 \le (\mathcal{A}\mathbf{v},\mathbf{v}) \le M^2\|\mathbf{v}\|^2,\ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \qquad (2)$$

$$\begin{gathered}f_{i\mathbf{u}}(x) \equiv f_i(x,\mathbf{u}) \in Q^0[0,\infty), \\ |f_i(x,\mathbf{u})| \le K_i(x) \in L_2[0,\infty), \\ \mathbf{K}(x) = \{K_i(x)\}_{i=1}^n \\ \forall x \in [0,\infty), \quad \mathbf{u} \in \Omega([0,\infty), r), \\ r = \max\left\{\frac{1}{m^2}, 1\right\}\int_0^\infty \|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi,\end{gathered} \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to\infty}\exp(-\mathcal{A}x)\int_0^x \exp(\mathcal{A}\xi)\mathbf{K}(\xi)d\xi = 0 \qquad (4)$$

$$\begin{gathered}\|\mathbf{f}(x,\mathbf{u}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{v})\| \le L(x)\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|\ \forall x \in [0,\infty), \\ \mathbf{u},\mathbf{v} \in \Omega([0,\infty), r),\end{gathered} \qquad (5)$$

$$L(x) \in L_1[0,\infty),\ q = \max\left\{\frac{1}{m^2}, 1\right\}\int_0^\infty L(\xi)d\xi < 1, \qquad (6)$$

тоді задача (1) *у* $\Omega([0,\infty),r)$ *має єдиний розв'язок* $\mathbf{u}(x)$*, який можна знайти методом послідовних наближень*

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\mathbf{u}^{(k)}}{dx^2}+\mathcal{A}\frac{d\mathbf{u}^{(k)}}{dx}=-\mathbf{f}(x,\mathbf{u}^{(k-1)}), \quad x\in(0,\infty),\\ &\mathbf{u}^{(k)}(0)=\boldsymbol{\mu}_1, \quad \lim_{x\to\infty}\mathbf{u}^{(k)}(x)=0, \quad k=1,2,...\end{aligned} \tag{7}$$

з оцінкою похибки

$$\left\|\mathbf{u}^{(k)}-\mathbf{u}\right\|_{1,\infty,[0,\infty)}\le\frac{q^k}{1-q}r. \tag{8}$$

Тут $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ *— скалярний добуток двох векторів* $\mathbf{u},\ \mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{v}\|=(\mathbf{v},\mathbf{v})^{1/2}$ *— норма вектора,* $Q^0[0,\infty)$ *— клас кусково-неперервних функцій зі скінченною кількістю точок розриву першого роду,* m *та* M *— дійсні сталі.*

□ *Доведення.* Задачу (1) можна записати в еквівалентному інтегральному вигляді

$$\mathbf{u}(x)=\Re(x,\mathbf{u}(\cdot))=\int_0^\infty G(x,\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))d\xi+\mathbf{u}^{(0)}(x), \quad x\ge 0, \tag{9}$$

де функція Гріна задачі (1) має вигляд

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\mathcal{A}^{-1}\left(I-\exp(-\mathcal{A}x)\right), & 0\le x\le\xi,\\ \mathcal{A}^{-1}\exp(-\mathcal{A}x)\left(\exp(\mathcal{A}\xi)-I\right), & x\ge\xi,\end{cases}$$

а I — одинична матриця розміру $n\times n$.

Оскільки

$$|\mathbf{u}(x)|\le\mathcal{A}^{-1}\exp(-\mathcal{A}x)\int_0^x\left(\exp(\mathcal{A}\xi)-I\right)\mathbf{K}(\xi)d\xi+$$

$$+\mathcal{A}^{-1}\left(I-\exp(-\mathcal{A}x)\right)\int_x^\infty\mathbf{K}(\xi)d\xi+\exp(-\mathcal{A}x)\left|\boldsymbol{\mu}_1\right|,$$

то за умов теореми функція (9) задовольняє крайову умову.

З рівності (9) з врахуванням (3) отримаємо

$$\left\|\Re(x,\mathbf{v}(\cdot))-\mathbf{u}^{(0)}\right\|_{1,\infty,[0,\infty)}=$$

$$=\int_0^\infty\|G(x,\xi)\|_{1,\infty,[0,\infty)}\|\mathbf{f}(\xi,\mathbf{v}(\xi))\|\,d\xi\le$$

$$\le\int_0^\infty\|G(x,\xi)\|_{1,\infty,[0,\infty)}\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi.$$

Оскільки для матриці $\mathcal{A}$ виконуються умови (2), $\exp(\pm\lambda x)\ge 0$, $\exp(\lambda\xi)\le\exp(\lambda x)$ для $\forall\lambda\in[m^2,M^2]$, $\xi\in[0,x]$, то $\exp(\mathcal{A}\xi)\le\exp(\mathcal{A}x)$ (див. [5]). Звідси

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\|G(x,\xi)\|\,\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi&=\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\left[\int_0^x\|\exp(-\mathcal{A}x)\left(\exp(\mathcal{A}\xi)-I\right)\|\,\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi+\int_x^\infty\|I-\exp(-\mathcal{A}x)\|\,\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi\right]\le\\ &\le\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\left[\|\exp(-\mathcal{A}x)\left(\exp(\mathcal{A}x)-I\right)\|\int_0^x\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi+\|I-\exp(-\mathcal{A}x)\|\int_x^\infty\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi\right]=\\ &=\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\,\|I-\exp(-\mathcal{A}x)\|\int_0^\infty\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi\le\\ &\le\frac{1}{m^2}\max_{m^2\le\lambda\le M^2}|1-\exp(-\lambda x)|\int_0^\infty\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi\le\frac{1}{m^2}\int_0^\infty\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\left\|\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right\|\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi&==\int_0^x\|\exp(-\mathcal{A}x)\left(I-\exp(\mathcal{A}\xi)\right)\|\,\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi+\int_x^\infty\|\exp(-\mathcal{A}x)\|\,\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi\le\\ &\le\|\exp(-\mathcal{A}x)\left(I-\exp(\mathcal{A}x)\right)\|\int_0^x\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi+\|\exp(-\mathcal{A}x)\|\int_x^\infty\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi=\\ &=\|\exp(-\mathcal{A}x)-I\|\int_0^x\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi+\|\exp(-\mathcal{A}x)\|\int_x^\infty\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi\le\\ &\le\max_{m^2\le\lambda\le M^2}|1-\exp(-\lambda x)|\int_0^x\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi+\max_{m^2\le\lambda\le M^2}|\exp(-\lambda x)|\int_x^\infty\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi\le\\ &\le\int_0^\infty\|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi.\end{aligned}$$

Отже, для $\forall \mathbf{v} \in \Omega([0,\infty), r)$

$$\left\| \Re(x, \mathbf{v}(\cdot)) - \mathbf{u}^{(0)} \right\|_{1,\infty,[0,\infty)} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{1}{m^2}, 1\right\} \int\limits_0^\infty \|\mathbf{K}(\xi)\|\, d\xi = r,$$

тобто оператор (9) переводить множину $\Omega([0,\infty), r)$ в себе.

Крім того, оскільки

$$\|\Re(x,\mathbf{u}(\cdot)) - \Re(x,\mathbf{v}(\cdot))\|_{1,\infty,[0,\infty)} =$$
$$= \int\limits_0^\infty \|G(x,\xi)\|_{1,\infty,[0,\infty)} \|\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi)) - \mathbf{f}(\xi,\mathbf{v}(\xi))\|\, d\xi \le$$
$$\le \int\limits_0^\infty \|G(x,\xi)\|_{1,\infty,[0,\infty)} L(\xi) d\xi\, \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{1,\infty,[0,\infty)} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{1}{m^2}, 1\right\} \int\limits_0^\infty L(\xi) d\xi\, \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{1,\infty,[0,\infty)} =$$
$$= q\, \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{1,\infty,[0,\infty)} \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \Omega([0,\infty), r),$$

то $\Re(x,\mathbf{u}(\cdot))$ на $\Omega([0,\infty), r)$ є стискувальним оператором.

Отже, при $q = \max\left\{\frac{1}{m^2}, 1\right\} \int\limits_0^\infty L(\xi) d\xi < 1$ для оператора $\Re(x,\mathbf{u}(\cdot))$ виконані всі умови принципу стискувальних відображень, а тому рівняння (9) має єдиний розв'язок, який можна одержати методом послідовних наближень (7) з оцінкою похибки (8). ■

II. Існування точної триточкової різницевої схеми

Аналогічно, як у [1, 2], введемо на інтервалі $[0,\infty)$ нерівномірну сітку

$$\hat{\hat{\omega}}_N = \{x_j \in [0,\infty),\ j = 0,1,...,N,\ x_0 = 0,$$
$$h_j = x_j - x_{j-1} > 0,\ h_1 + h_2 + ... + h_N = x_N\}$$

так, щоб точки розриву компонент вектора $\mathbf{f}(x,\mathbf{u})$ збігались з вузлами сітки. Будемо вимагати, щоб справджувались нерівності

$$\begin{gathered} h_{\max} \le \frac{c_2}{\sqrt{N}}, \quad h_{\min} \ge \frac{1}{c_2\sqrt{N}}, \\ \frac{\sqrt{N}}{c_2} \le h_{\min}N \le x_N \le h_{\max}N \le c_2\sqrt{N}, \end{gathered} \tag{10}$$

які забезпечують виконання умови, що $h_{\max} \to 0$, $x_N \to \infty$ при $N \to \infty$.

Введемо множину сіткових функцій

$$\Omega(\hat{\hat{\omega}}_N, \beta) = \left\{ \mathbf{v}(x),\ x \in \hat{\hat{\omega}}_N : \left\| \mathbf{v} - \mathbf{u}^{(0)} \right\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N} \le \beta \right\},$$

де

$$\begin{gathered} \|\mathbf{y}\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N} = \max_{0\le j\le N} \|\mathbf{y}_j\|, \\ \|\mathbf{y}\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+} = \max_{1\le j\le N} \|\mathbf{y}_j\|, \\ \|\mathbf{y}\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} = \max\left\{ \|\mathbf{y}\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+}, \left\|\frac{d\mathbf{y}}{dx}\right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+} \right\}, \\ \hat{\omega}_N^+ = \hat{\omega}_N \cup x_N. \end{gathered}$$

Лема 1. *Нехай виконані умови* (2)–(5), *тоді задачі*

$$\begin{gathered} \frac{d^2\mathbf{Y}^j_\alpha(x,\mathbf{v})}{dx^2} + \mathcal{A}\frac{d\mathbf{Y}^j_\alpha(x,\mathbf{v})}{dx} = -\mathbf{f}(x, \mathbf{Y}^j_\alpha(x,\mathbf{v})), \\ x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, \\ \mathbf{Y}^j_\alpha(x_{j-2+\alpha},\mathbf{v}) = \mathbf{v}(x_{j-2+\alpha}), \\ \mathbf{Y}^j_\alpha(x_{j-1+\alpha},\mathbf{v}) = \mathbf{v}(x_{j-1+\alpha}), \quad \alpha = 1,2, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \frac{d^2\mathbf{Y}^N_2(x,\mathbf{v})}{dx^2} + \mathcal{A}\frac{d\mathbf{Y}^N_2(x,\mathbf{v})}{dx} = -\mathbf{f}(x, \mathbf{Y}^N_2(x,\mathbf{v})),\ x > x_N, \\ \mathbf{Y}^N_2(x_N,\mathbf{v}) = \mathbf{v}(x_N), \quad \lim_{x\to\infty} \mathbf{Y}^N_2(x,\mathbf{v}) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

матимуть єдиний розв'язок $\mathbf{Y}^j_\alpha(x,\mathbf{v})$, $j = 2-\alpha, 3-\alpha, ..., N+1-\alpha$, $\alpha = 1,2$, $\mathbf{Y}^N_2(x,\mathbf{v})$, *причому для розв'язку задачі* (1) *справджується зображення*

$$\begin{gathered} \mathbf{u}(x) = \mathbf{Y}^j_\alpha(x,\mathbf{u}), \quad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \\ j = 2-\alpha, 3-\alpha, ..., N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2, \\ \mathbf{u}(x) = \mathbf{Y}^N_2(x,\mathbf{u}), \quad x \in [x_N, \infty). \end{gathered} \tag{13}$$

□ *Доведення.* Крайові задачі (11), (12) запишемо в еквівалентній формі

$$\begin{gathered} \mathbf{Y}^j_\alpha(x,\mathbf{u}) = \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} G^{j-1+\alpha}(x,\xi)\mathbf{f}(\xi, \mathbf{Y}^j_\alpha(\xi,\mathbf{u}))d\xi + \hat{\mathbf{u}}(x), \\ x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \quad j = 2-\alpha,\ 3-\alpha, ..., N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2, \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(x) = {} & (\exp(-\mathcal{A}x_{j-2+\alpha}) - \exp(-\mathcal{A}x))\,(\exp(-\mathcal{A}x_{j-2+\alpha}) - \exp(-\mathcal{A}x_{j-1+\alpha}))^{-1}\,\mathbf{u}(x_{j-1+\alpha}) + \\ & + (\exp(-\mathcal{A}x) - \exp(-\mathcal{A}x_{j-1+\alpha}))\,(\exp(-\mathcal{A}x_{j-2+\alpha}) - \exp(-\mathcal{A}x_{j-1+\alpha}))^{-1}\,\mathbf{u}(x_{j-2+\alpha}), \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y}^N_2(x,\mathbf{u}) = \int\limits_{x_N}^\infty G^\infty(x,\xi)\mathbf{f}(\xi, \mathbf{Y}^N_2(\xi,\mathbf{u}))d\xi + \exp(-\mathcal{A}(x - x_N))\mathbf{u}_N, \quad x \in [x_N, \infty), \tag{15}$$

де

$$G^{j-1+\alpha}(x,\xi)=\begin{cases}\mathcal{A}^{-1}\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-2+\alpha})-\exp(-\mathcal{A}x)\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-2+\alpha})-\exp(-\mathcal{A}x_{j-1+\alpha})\right)^{-1}\times\\ \qquad\times\left(I-\exp(\mathcal{A}(\xi-x_{j-1+\alpha}))\right), \quad x_{j-2+\alpha}\le x\le\xi,\\ \mathcal{A}^{-1}\left(\exp(-\mathcal{A}x)-\exp(-\mathcal{A}x_{j-1+\alpha})\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-2+\alpha})-\exp(-\mathcal{A}x_{j-1+\alpha})\right)^{-1}\times\\ \qquad\times\left(\exp(\mathcal{A}(\xi-x_{j-2+\alpha}))-I\right), \quad \xi\le x\le x_{j-1+\alpha},\end{cases}$$

$$G^{\infty}(x,\xi)=\begin{cases}\mathcal{A}^{-1}\left(I-\exp(\mathcal{A}(x_N-x)\right), \qquad x_N\le x\le\xi,\\ \mathcal{A}^{-1}\exp(-\mathcal{A}x)\left(\exp(\mathcal{A}\xi)-\exp(\mathcal{A}x_N)\right), \quad x\ge\xi.\end{cases} \tag{16}$$

При $\alpha=1$ отримуємо

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}(x)&=\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x)\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x_j)\right)^{-1}\times\\ &\times\left[\int_0^\infty G(x_j,\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi+\exp(-\mathcal{A}x_j)\boldsymbol{\mu}_1\right]+\\ &+\left(\exp(-\mathcal{A}x)-\exp(-\mathcal{A}x_j)\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x_j)\right)^{-1}\times\\ &\times\left[\int_0^\infty G(x_{j-1},\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi+\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})\boldsymbol{\mu}_1\right],\end{aligned}$$

$$\exp(-\mathcal{A}(x-x_N))\mathbf{u}_N(x)=\exp(-\mathcal{A}(x-x_N))\left[\int_0^\infty G(x_N,\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi+\exp(-\mathcal{A}x_N)\boldsymbol{\mu}_1\right].$$

Оскільки

$$\begin{aligned}&\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x)\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x_j)\right)^{-1}\exp(-\mathcal{A}x_j)+\\ &+\left(\exp(-\mathcal{A}x)-\exp(-\mathcal{A}x_j)\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x_j)\right)^{-1}\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})=\\ &=\left(\exp(-\mathcal{A}(x_{j-1}+x))-\exp(-\mathcal{A}(x_j+x))\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x_j)\right)^{-1}=\exp(-\mathcal{A}x),\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}(x)&=\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x)\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x_j)\right)^{-1}\int_0^\infty G(x_j,\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi+\\ &+\left(\exp(-\mathcal{A}x)-\exp(-\mathcal{A}x_j)\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x_j)\right)^{-1}\int_0^\infty G(x_{j-1},\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi+\\ &+\mathbf{u}^{(0)}(x), \quad x\in[x_{j-1},x_j],\end{aligned}$$

$$\exp(-\mathcal{A}(x-x_N))\mathbf{u}_N(x)=\exp(-\mathcal{A}(x-x_N))\int_0^\infty G(x_N,\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi+\exp(-\mathcal{A}x)\boldsymbol{\mu}_1, \ \ x>x_N.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_1^j(x,\mathbf{u})&=\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x)\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x_j)\right)^{-1}\int_0^\infty G(x_j,\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi+\\ &+\left(\exp(-\mathcal{A}x)-\exp(-\mathcal{A}x_j)\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x_j)\right)^{-1}\int_0^\infty G(x_{j-1},\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi+\\ &+\int_{x_{j-1}}^{x_j} G^j(x,\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{Y}_1^j(\xi,\mathbf{u}))d\xi+\mathbf{u}^{(0)}(x), \quad x\in[x_{j-1},x_j],\end{aligned}$$

$$\mathbf{Y}_2^N(x,\mathbf{u})=\exp(-\mathcal{A}(x-x_N))\int_0^\infty G(x_N,\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi+\int_{x_N}^\infty G^\infty(x,\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{Y}_2^N(\xi,\mathbf{u}))d\xi+\mathbf{u}^{(0)}(x).$$

На підставі рівності $\mathbf{Y}_2^j(x,\mathbf{u}) = \mathbf{Y}_1^{j+1}(x,\mathbf{u})$ маємо

$$\mathbf{Y}_2^j(x,\mathbf{u}) = \left(\exp(-\mathcal{A}x_j) - \exp(-\mathcal{A}x)\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_j) - \exp(-\mathcal{A}x_{j+1})\right)^{-1}\int\limits_0^\infty G(x_{j+1},\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi +$$
$$+ \left(\exp(-\mathcal{A}x) - \exp(-\mathcal{A}x_{j+1})\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_j) - \exp(-\mathcal{A}x_{j+1})\right)^{-1}\int\limits_0^\infty G(x_j,\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi +$$
$$+ \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} G^{j+1}(x,\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{Y}_2^j(\xi,\mathbf{u}))d\xi + \mathbf{u}^{(0)}(x).$$

Тобто, питання існування та єдиності розв'язку задачі (14), (15) еквівалентне до аналогічної проблеми для рівнянь

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_\alpha^j(x) &= \Im_\alpha^j(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_\alpha^j) = \\ &= \left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-2+\alpha}) - \exp(-\mathcal{A}x)\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-2+\alpha}) - \exp(-\mathcal{A}x_{j-1+\alpha})\right)^{-1}\int\limits_0^\infty G(x_{j-1+\alpha},\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi + \\ &+ \left(\exp(-\mathcal{A}x) - \exp(-\mathcal{A}x_{j-1+\alpha})\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-2+\alpha}) - \exp(-\mathcal{A}x_{j-1+\alpha})\right)^{-1}\int\limits_0^\infty G(x_{j-2+\alpha},\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi + \\ &+ \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} G^{j-1+\alpha}(x,\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{U}_\alpha^j(\xi,\mathbf{u}))d\xi + \mathbf{u}^{(0)}(x), \quad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \\ &\qquad j = 2-\alpha,\ 3-\alpha, ..., N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2,\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_2^N(x) = \Im_2^N(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_2^N) &= \exp(-\mathcal{A}(x-x_N))\int\limits_0^\infty G(x_N,\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi + \\ &+ \int\limits_{x_N}^\infty G^\infty(x,\xi)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{U}_2^N(\xi,\mathbf{u}))d\xi + \mathbf{u}^{(0)}(x).\end{aligned} \tag{18}$$

Нехай $\mathbf{U}_\alpha^j(x) \in \Omega\left([x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], r\right)$, $\mathbf{U}_2^\infty(x) \in \Omega\left([x_N,\infty), r\right)$.

$$\begin{aligned}&\left|\Im_\alpha^j(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_\alpha^j) - \mathbf{u}^{(0)}(x)\right| \le \\ &\le \left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-2+\alpha}) - \exp(-\mathcal{A}x)\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-2+\alpha}) - \exp(-\mathcal{A}x_{j-1+\alpha})\right)^{-1}\int\limits_0^\infty G(x_{j-1+\alpha},\xi)\left|\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})\right| d\xi + \\ &+ \left(\exp(-\mathcal{A}x) - \exp(-\mathcal{A}x_{j-1+\alpha})\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-2+\alpha}) - \exp(-\mathcal{A}x_{j-1+\alpha})\right)^{-1}\int\limits_0^\infty G(x_{j-2+\alpha},\xi)\left|\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})\right| d\xi + \\ &+ \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} G^{j-1+\alpha}(x,\xi)\left|\mathbf{f}(\xi,\mathbf{U}_\alpha^j(\xi,\mathbf{u}))\right| d\xi \le \\ &\le \mathcal{A}^{-1}\int\limits_0^x \exp(-\mathcal{A}x)\left(\exp(\mathcal{A}x) - I\right)\mathbf{K}(\xi)d\xi + \mathcal{A}^{-1}\int\limits_x^\infty \left(I - \exp(-\mathcal{A}x)\right)\mathbf{K}(\xi)d\xi = \\ &= \mathcal{A}^{-1}\left(I - \exp(-\mathcal{A}x)\right)\int\limits_0^\infty \mathbf{K}(\xi)d\xi,\end{aligned}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\Im_\alpha^j(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_\alpha^j)-\frac{d\mathbf{u}^{(0)}(x)}{dx}\right|\le\int\limits_0^x\exp(-\mathcal{A}x)\left(\exp(\mathcal{A}\xi)-I\right)\mathbf{K}(\xi)d\xi+\int\limits_x^\infty\left(I-\exp(-\mathcal{A}x)\right)\mathbf{K}(\xi)d\xi\le$$

$$\le\left(I-\exp(-\mathcal{A}x)\right)\int\limits_0^\infty\mathbf{K}(\xi)d\xi,$$

$$\left|\Im_2^N(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_2^N)-\mathbf{u}^{(0)}(x)\right|\le\exp(-\mathcal{A}(x-x_N))\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^{x_N}\mathcal{A}^{-1}\exp(-\mathcal{A}x_N)\left(\exp(\mathcal{A}\xi)-I\right)\mathbf{K}(\xi)d\xi+\int\limits_{x_N}^\infty\mathcal{A}^{-1}\left(I-\exp(-\mathcal{A}x_N)\right)\mathbf{K}(\xi)d\xi\right]+$$

$$+\mathcal{A}^{-1}\exp(-\mathcal{A}x)\int\limits_{x_N}^x\left(\exp(\mathcal{A}\xi)-\exp(\mathcal{A}x_N)\right)\mathbf{K}(\xi)d\xi+\mathcal{A}^{-1}\left(I-\exp(-\mathcal{A}(x-x_N))\right)\int\limits_x^\infty\mathbf{K}(\xi)d\xi=$$

$$=\mathcal{A}^{-1}\exp(-\mathcal{A}x)\int\limits_0^x\left(\exp(\mathcal{A}\xi)-I\right)\mathbf{K}(\xi)d\xi+\mathcal{A}^{-1}\left(I-\exp(-\mathcal{A}x)\right)\int\limits_x^\infty\mathbf{K}(\xi)d\xi\le$$

$$\le\mathcal{A}^{-1}\left(I-\exp(-\mathcal{A}x)\right)\int\limits_0^\infty\mathbf{K}(\xi)d\xi,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\Im_2^N(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_2^N)-\frac{d\mathbf{u}^{(0)}(x)}{dx}\right|\le\int\limits_0^x\exp(-\mathcal{A}x)\left(\exp(\mathcal{A}\xi)-I\right)\mathbf{K}(\xi)d\xi+\int\limits_x^\infty\left(I-\exp(-\mathcal{A}x)\right)\mathbf{K}(\xi)d\xi\le$$

$$\le\left(I-\exp(-\mathcal{A}x)\right)\int\limits_0^\infty\mathbf{K}(\xi)d\xi.$$

Оскільки для матриці $\mathcal{A}$ виконуються умови (2), то

$$\left\|\Im_\alpha^j(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_\alpha^j)-\mathbf{u}^{(0)}(x)\right\|\le\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\left\|I-\exp(-\mathcal{A}x)\right\|\int\limits_0^\infty\left\|\mathbf{K}(\xi)\right\|d\xi\le$$

$$\le\frac{1}{m^2}\max_{m^2\le\lambda\le M^2}\left|1-\exp(-\lambda x)\right|\int\limits_0^\infty\left\|\mathbf{K}(\xi)\right\|d\xi\le\frac{1}{m^2}\int\limits_0^\infty\left\|\mathbf{K}(\xi)\right\|d\xi,$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}\Im_\alpha^j(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_\alpha^j)-\frac{d\mathbf{u}^{(0)}(x)}{dx}\right\|\le\left\|I-\exp(-\mathcal{A}x)\right\|\int\limits_0^\infty\left\|\mathbf{K}(\xi)\right\|d\xi\le$$

$$\le\max_{m^2\le\lambda\le M^2}\left|1-\exp(-\lambda x)\right|\int\limits_0^\infty\left\|\mathbf{K}(\xi)\right\|d\xi\le\int\limits_0^\infty\left\|\mathbf{K}(\xi)\right\|d\xi,$$

$$\left\|\Im_2^N(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_2^N)-\mathbf{u}^{(0)}(x)\right\|\le\frac{1}{m^2}\int\limits_0^\infty\left\|\mathbf{K}(\xi)\right\|d\xi,$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}\Im_2^N(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_2^N)-\frac{d\mathbf{u}^{(0)}(x)}{dx}\right\|\le\int\limits_0^\infty\left\|\mathbf{K}(\xi)\right\|d\xi,$$

і тоді

$$\left\|\Im_\alpha^j(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_\alpha^j)-\mathbf{u}^{(0)}(x)\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\le\max\left\{\frac{1}{m^2},1\right\}\int\limits_0^\infty\left\|\mathbf{K}(\xi)\right\|d\xi=r,$$

$$\left\|\Im_2^N(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_2^N)-\mathbf{u}^{(0)}(x)\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)}\le\max\left\{\frac{1}{m^2},1\right\}\int\limits_0^\infty\left\|\mathbf{K}(\xi)\right\|d\xi=r,$$

тобто оператори $\Im_1^j(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_1^j)$, $\Im_2^N(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_2^N)$ переводять множини $\Omega\left([x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],r\right)$, $\Omega\left([x_N,\infty),r\right)$ відповідно в себе. Крім того

$$\left\|\Im_\alpha^j(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_\alpha^j)-\Im_\alpha^j(x,\mathbf{u},\tilde{\mathbf{U}}_\alpha^j)\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\le$$

$$\le\max\left\{\frac{1}{m^2},1\right\}\int\limits_0^\infty L(\xi)d\xi\left\|\mathbf{U}_\alpha^j-\tilde{\mathbf{U}}_\alpha^j\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}=$$

$$=q\left\|\mathbf{U}_\alpha^j-\tilde{\mathbf{U}}_\alpha^j\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]},$$

$$\left\|\Im_2^N(x,\mathbf{u},\mathbf{U}_2^N)-\Im_2^N(x,\mathbf{u},\tilde{\mathbf{U}}_2^N)\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)}\le$$

$$\le\max\left\{\frac{1}{m^2},1\right\}\int\limits_0^\infty L(\xi)d\xi\left\|\mathbf{U}_2^N-\tilde{\mathbf{U}}_2^N\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)}=$$

$$=q\left\|\mathbf{U}_2^N-\tilde{\mathbf{U}}_2^N\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)},$$

де $q=\max\left\{\frac{1}{m^2},1\right\}\int\limits_0^\infty L(\xi)d\xi<1$.

Отже, для операторів (17), (18) в області $\Omega\left([x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],r\right)$ та $\Omega\left([x_N,\infty),r\right)$ відповідно виконуються всі умови принципу стискувальних відображень, а тому задачі (11) і (12) мають єдиний розв'язок. ■

Теорема 1. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для задачі* (1) *існує ТТРС вигляду*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\hbar_j}\left(B_j\mathbf{u}_{x,j}-A_j\mathbf{u}_{\bar{x},j}\right)=-\hat{T}^{x_j}(\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))),\\&j=1,2,...,N-1,\end{aligned}\tag{19}$$

$$\mathbf{u}_0=\boldsymbol{\mu}_1,\quad -A_N\mathbf{u}_{\bar{x},N}=\mathcal{A}\mathbf{u}_N-\hat{T}^{x_N}(\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))),\tag{20}$$

де

$$\mathbf{u}_{\bar{x},j}=h_j^{-1}\left(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_{j-1}\right),\quad \mathbf{u}_{x,j}=h_{j+1}^{-1}\left(\mathbf{u}_{j+1}-\mathbf{u}_j\right),$$
$$\hbar_j=\frac{h_j+h_{j+1}}{2},$$

$$A_j=h_j\mathcal{A}\left(\exp(\mathcal{A}h_j)-I\right)^{-1},$$
$$B_j=h_{j+1}\mathcal{A}\left(I-\exp(-\mathcal{A}h_{j+1})\right)^{-1},$$
$$j=1,2,...,N-1,$$

$$\begin{aligned}&\hat{T}^{x_j}(\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi)))=\hbar_j^{-1}\left(\exp(\mathcal{A}h_j)-I\right)^{-1}\times\\&\times\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\left(\exp(\mathcal{A}(\xi-x_{j-1}))-I\right)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))d\xi+\\&+\hbar_j^{-1}\left(I-\exp(-\mathcal{A}h_{j+1})\right)^{-1}\times\\&\times\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\left(I-\exp(\mathcal{A}(\xi-x_{j+1}))\right)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))d\xi,\\&j=1,2,...,N-1,\end{aligned}\tag{21}$$

$$\hat{T}^{x_N}(\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi)))=\int\limits_{x_N}^\infty\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))d\xi+\left(\exp(\mathcal{A}h_N)-I\right)^{-1}\times$$
$$\times\int\limits_{x_{N-1}}^{x_N}\left(\exp(\mathcal{A}(\xi-x_{N-1}))-I\right)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))d\xi,$$

а функція $\mathbf{u}(\xi)$ *у правій частині* (19), (20) *визначається за формулами* (13) *і залежить тільки від* $\mathbf{u}(x_j)$, $j=0,1,\ldots,N$.

□ *Доведення.* ТТРС для задачі

$$\frac{d^2\tilde{\mathbf{u}}}{dx^2}+\mathcal{A}\frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dx}=-\mathbf{f}(x,\tilde{\mathbf{u}}),\quad x\in(0,x_{N+1}),$$
$$\tilde{\mathbf{u}}(0)=\boldsymbol{\mu}_1,\qquad \tilde{\mathbf{u}}(x_{N+1})=0$$

має вигляд

$$\frac{1}{\hbar_j}\left(B_j\tilde{\mathbf{u}}_{x,j}-A_j\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{x},j}\right)=-\hat{T}^{x_j}(\mathbf{f}(\xi,\tilde{\mathbf{u}}(\xi))),\quad j=0,1,\ldots,N,\tag{22}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(0)=\boldsymbol{\mu}_1,\qquad \tilde{\mathbf{u}}(x_{N+1})=0.\tag{23}$$

Помножимо обидві частини рівняння (22) при $j=N$ на $\hbar_N=\frac{1}{2}\left(h_{N+1}+h_N\right)$, $h_{N+1}=x_{N+1}-x_N$:

$$\mathcal{A}\left(I-\exp(-\mathcal{A}h_{N+1})\right)^{-1}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{N+1}-\tilde{\mathbf{u}}_N\right)-h_N\mathcal{A}\left(\exp(\mathcal{A}h_N)-I\right)^{-1}\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{x},N}=$$
$$=-\left(\exp(\mathcal{A}h_N)-I\right)^{-1}\int\limits_{x_{N-1}}^{x_N}\left(\exp(\mathcal{A}(\xi-x_{N-1}))-I\right)\mathbf{f}(\xi,\tilde{\mathbf{u}}(\xi))d\xi-$$
$$-\left(I-\exp(-\mathcal{A}h_{N+1})\right)^{-1}\int\limits_{x_N}^{x_{N+1}}\left(I-\exp(\mathcal{A}(\xi-x_{N+1}))\right)\mathbf{f}(\xi,\tilde{\mathbf{u}}(\xi))d\xi$$

і перейдемо до границі при $x_{N+1}\to\infty$, тоді одержимо (19), (20). ■

Існування розв'язку нелінійної ТТРС (19), (20) доведено в теоремі 1, а єдиність встановлює

Лема 2. *Нехай виконані умови теореми 1. Тоді існує таке* $h_0>0$, *що при* $|h|\le h_0$ *ТТРС* (19), (20) *матиме єдиний розв'язок* $\forall(\mathbf{u}_j)_{j=0}^N\in\Omega(\hat{\bar{\omega}}_N,r)$, *який можна одержати методом послідовних наближень:*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\hbar_j}\left(B_j\mathbf{u}_{x,j}^{(k)}-A_j\mathbf{u}_{\bar{x},j}^{(k)}\right)=-\hat{T}^{x_j}(\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}^{(k-1)}(\xi))),\quad j=1,2,...,N-1,\\&\mathbf{u}_0^{(k)}=\boldsymbol{\mu}_1,\quad -A_N\mathbf{u}_{\bar{x},N}^{(k)}=\mathcal{A}\mathbf{u}_N^{(k)}-\hat{T}^{x_N}(\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}^{(k-1)}(\xi))),\end{aligned}\tag{24}$$

$$\mathbf{u}^{(k)}(x) = \mathbf{Y}_\alpha^j(x, \mathbf{u}^{(k)}), \quad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \quad j = 2-\alpha, 3-\alpha, ..., N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$
$$\mathbf{u}^{(k)}(x) = \mathbf{Y}_2^N(x, \mathbf{u}^{(k)}), \quad x \in [x_N, \infty), \quad k = 1, 2, ..., \quad \mathbf{u}^{(0)}(x) = \exp(-\mathcal{A}x)\boldsymbol{\mu}_1$$

з оцінкою похибки

$$\left\|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}\right\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}^* = \max\left\{\left\|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}\right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+}, \left\|\frac{d\mathbf{u}^{(k)}}{dx} - \frac{d\mathbf{u}}{dx}\right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+}\right\} \le \frac{q_1^k}{1-q_1} r, \tag{25}$$

де $q_1 = q + M_1 |h| < 1$, M_1 *— константа.*

□ *Доведення.* Різницева схема (19), (20) є точною, тобто її розв'язок є проекцією точного розв'язку задачі на сітку, тому її розв'язок для $\forall x \in \hat{\bar{\omega}}_N$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{u}(x) = \Re_h(x, \mathbf{u}) = \int_0^\infty G(x,\eta)\mathbf{f}(\eta, \mathbf{u}(\eta))d\eta + \mathbf{u}^{(0)}(x) = $$
$$= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} G(x,\eta)\mathbf{f}(\eta, \mathbf{u}(\eta))d\eta +$$
$$+ \int_{x_N}^\infty G(x,\eta)\mathbf{f}(\eta, \mathbf{u}(\eta))d\eta + \mathbf{u}^{(0)}(x), \tag{26}$$

де

$$\mathbf{u}(\eta) = \mathbf{Y}_1^i(\eta, \mathbf{u}), \quad \eta \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, ..., N,$$
$$\mathbf{u}(\eta) = \mathbf{Y}_2^N(\eta, \mathbf{u}), \quad \eta \in [x_N, \infty).$$

Дослідимо властивості оператора $\Re_h(x, \mathbf{u})$. Оператор (26) переводить множину $\Omega\left(\hat{\bar{\omega}}_N, r\right)$ в себе. Нехай $(\mathbf{v}_j)_{j=0}^N \in \Omega\left(\hat{\bar{\omega}}_N, r\right)$, тоді

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{Y}_1^i(x, \mathbf{v}) \in \Omega([x_{j-1}, x_j], r),$$
$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{Y}_2^N(x, \mathbf{v}) \in \Omega([x_N, \infty), r),$$
$$\left\|\Re_h(x, \mathbf{v}) - \mathbf{u}^{(0)}\right\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}^* \le$$
$$\le \int_0^\infty \|G(x,\eta)\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}^* \|\mathbf{K}(\eta)\| \, d\eta \le r \; \forall (\mathbf{v}_j)_{j=0}^N \in \Omega(\hat{\bar{\omega}}_N, r).$$

Крім того,

$$\|\Re_h(x, \mathbf{u}) - \Re_h(x, \mathbf{v})\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}^* \le \tag{27}$$
$$\le q \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{1,\infty,[0,\infty)} \quad \forall (\mathbf{u}_j)_{j=0}^N, (\mathbf{v}_j)_{j=0}^N \in \Omega(\hat{\bar{\omega}}_N, r).$$

Покажемо, що

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{1,\infty,[0,\infty)} \le (1 + M|h|) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}^* . \tag{28}$$

Для цього розглянемо крайові задачі

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} + \mathcal{A}\frac{d\mathbf{u}}{dx} = -\mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \quad x \in (x_{j-1}, x_j),$$
$$\mathbf{u}(x_{j-1}) = \mathbf{u}_{j-1}, \quad \mathbf{u}(x_j) = \mathbf{u}_j, \quad j = 1, 2, ..., N,$$

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} + \mathcal{A}\frac{d\mathbf{u}}{dx} = -\mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \quad x \in (x_N, \infty),$$
$$\mathbf{u}(x_N) = \mathbf{u}_N, \quad \lim_{x\to\infty} \mathbf{u}(x) = 0,$$

розв'язки яких запишемо у вигляді

$$\mathbf{u}(x) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} G^j(x,\xi)\mathbf{f}(\xi, \mathbf{u}(\xi))d\xi + \hat{\mathbf{u}}(x),$$
$$x_{j-1} \le x \le x_j, \quad j = 1, 2, ..., N,$$

$$\mathbf{u}(x) = \int_{x_N}^\infty G^\infty(x,\xi)\mathbf{f}(\xi, \mathbf{u}(\xi))d\xi + \exp(-\mathcal{A}(x - x_N))\mathbf{u}_N,$$
$$x \ge x_N,$$

де

$$\hat{\mathbf{u}}(x) = (\exp(-\mathcal{A}x_{j-1}) - \exp(-\mathcal{A}x))\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1}) - \exp(-\mathcal{A}x_j)\right)^{-1} \mathbf{u}(x_j) +$$
$$+ (\exp(-\mathcal{A}x) - \exp(-\mathcal{A}x_j))\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1}) - \exp(-\mathcal{A}x_j)\right)^{-1} \mathbf{u}(x_{j-1}), \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, 2, ..., N,$$

$$G^j(x,\xi) = \begin{cases} \mathcal{A}^{-1}\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1}) - \exp(-\mathcal{A}x)\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1}) - \exp(-\mathcal{A}x_j)\right)^{-1} \times \\ \quad \times \left(I - \exp(\mathcal{A}(\xi - x_j))\right), \quad x_{j-1} \le x \le \xi, \\ \mathcal{A}^{-1}\left(\exp(-\mathcal{A}x) - \exp(-\mathcal{A}x_j)\right)\left(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1}) - \exp(-\mathcal{A}x_j)\right)^{-1} \times \\ \quad \times \left(\exp(\mathcal{A}(\xi - x_{j-1})) - I\right), \quad \xi \le x \le x_j, \end{cases}$$
$$j = 1, 2, ..., N,$$

а $G^\infty(x,\xi)$ задається формулою (16).

На підставі умови Ліпшиця

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \leq \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \left\|G^j(x,\xi)\right\|_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} L(\xi)d\xi \, \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} + \\ + \|\hat{\mathbf{u}}-\hat{\mathbf{v}}\|_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]}, \quad j=1,2,...,N,$$

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{0,\infty,[x_N,\infty)} \leq \int\limits_{x_N}^{\infty} \|G^{\infty}(x,\xi)\|_{0,\infty[x_N,\infty)} L(\xi)d\xi \, \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{0,\infty,[x_N,\infty)} + |\mathbf{u}(x_N)-\mathbf{v}(x_N)|.$$

Оскільки

$$\|\hat{\mathbf{u}}-\hat{\mathbf{v}}\|_{0,\infty,[x_{j-1},x_j]} \leq \max_{x\in[x_{j-1},x_j]} \left\{ \left\| (\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x))\,(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x_j))^{-1} \right\| \|\mathbf{u}_j-\mathbf{v}_j\| + \\ + \left\| (\exp(-\mathcal{A}x)-\exp(-\mathcal{A}x_j))\,(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x_j))^{-1} \right\| \|\mathbf{u}_{j-1}-\mathbf{v}_{j-1}\| \right\} \leq \\ \leq \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+},$$

$$\left\| \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dx} - \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dx} \right\|_{0,\infty,[x_{j-1},x_j]} \leq \max_{x\in[x_{j-1},x_j]} \left\{ h_j \left\| \mathcal{A}\exp(-\mathcal{A}x)\,(\exp(-\mathcal{A}x_{j-1})-\exp(-\mathcal{A}x_j))^{-1} \right\| \|\mathbf{u}_{\bar{x},j}-\mathbf{v}_{\bar{x},j}\| \right\} = \\ = h_j \left\| \mathcal{A}\,(I-\exp(-\mathcal{A}h_j))^{-1} \right\| \|\mathbf{u}_{\bar{x},j}-\mathbf{v}_{\bar{x},j}\| \leq (1+M_1|h|) \left\| \frac{d\mathbf{u}}{dx} - \frac{d\mathbf{v}}{dx} \right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+},$$

$$\|\exp(-\mathcal{A}(x-x_N))(\mathbf{u}_N-\mathbf{v}_N)\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \leq (1+M_2|h|)\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}$$

то

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \leq (1+M_1|h|)\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_N^+} + |h|\,M_3\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]},$$
$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \leq (1+M_2|h|)\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_N^+} + |h|\,M_4\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{1,\infty,[x_N,\infty)}.$$

Звідси отримаємо оцінки

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \leq \frac{1+M_1|h|}{1-M_3|h|}\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_N^+} \leq (1+|h|\,M)\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_N^+}, \qquad j=1,2,...,N,$$
$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{1,\infty,[x_{N-1},\infty)} \leq \frac{1+M_2|h|}{1-M_4|h|}\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_N^+} \leq (1+|h|\,M)\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_N^+},$$

з яких випливає нерівність (28).

Враховуючи (28), з оцінки (27) отримаємо

$$\|\Re_h(x,\mathbf{u})-\Re_h(x,\mathbf{v})\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} \leq (q+M|h|)\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} = q_1\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^*_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}.$$

Оскільки на підставі (5) $q<1$, то $q_1<1$ при достатньо малому h_0 і оператор (26) для $\forall(\mathbf{u}_j)_{j=0}^N, (\mathbf{v}_j)_{j=0}^N \in \Omega(\hat{\widehat{\omega}}_N, r)$ здійснює стискувальне відображення. Отже, згідно з принципом стискувальних відображень, при достатньо малому h_0 ТТРС (19), (20) має єдиний розв'язок, який можна отримати методом послідовних наближень (24) з оцінкою похибки (25). ■

Лема 3. *Нехай існує стала* $\Delta > 0$ *така, що умови* (2), (4) *справджуються в області* $\Omega([0,\infty), r+\Delta)$. *Тоді існує таке* $h_0 > 0$, *що при* $|h| \leq h_0$ *і* $\forall (\mathbf{v}_j)_{j=0}^N \in \Omega\left(\hat{\widehat{\omega}}_N, r\right)$ *задачі*

$$\frac{d^2\mathbf{Y}_\alpha^j(x,\mathbf{v})}{dx^2} + \mathcal{A}\frac{d\mathbf{Y}_\alpha^j(x,\mathbf{v})}{dx} = -\mathbf{f}(x,\mathbf{Y}_\alpha^j(x,\mathbf{v})), \\ x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, \\ \mathbf{Y}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\mathbf{v}) = \mathbf{v}(x_{j+(-1)^\alpha}), \\ \frac{d\mathbf{Y}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\mathbf{v})}{dx} = \left.\frac{d\mathbf{v}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}, \\ j=2-\alpha, 3-\alpha, ..., N+1-\alpha, \quad \alpha=1,2, \tag{29}$$

$$\frac{d^2\mathbf{Y}_2^N(x,\mathbf{v})}{dx^2} + \mathcal{A}\frac{d\mathbf{Y}_2^N(x,\mathbf{v})}{dx} = -\mathbf{f}(x,\mathbf{Y}_2^N(x,\mathbf{v})), \; x>x_N, \\ \mathbf{Y}_2^N(x_N,\mathbf{v}) = \mathbf{v}(x_N), \quad \lim_{x\to\infty}\mathbf{Y}_2^N(x,\mathbf{v}) = 0 \tag{30}$$

матимуть єдиний розв'язок.

$\square$ *Доведення.* Задачі (29), (30) еквівалентні операторним рівнянням

$$\mathbf{U}_{\alpha}^{j}(x) = \Re_{\alpha}^{j}(x, \mathbf{v}, \mathbf{U}_{\alpha}^{j}) = -\int\limits_{x_{j+(-1)^{\alpha}}}^{x} \mathcal{A}^{-1}\left(I - \exp(-\mathcal{A}(x-\xi))\right)\mathbf{f}(\xi, \mathbf{U}_{\alpha}^{j})d\xi +$$

$$+ \mathbf{v}_{j+(-1)^{\alpha}} + \mathcal{A}^{-1}\left(I - \exp(-\mathcal{A}(x - x_{j+(-1)^{\alpha}}))\right) \left.\frac{d\mathbf{v}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^{\alpha}}},$$

$$x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \quad j = 2-\alpha,\ 3-\alpha, ..., N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\mathbf{U}_{2}^{N}(x) = \Re_{2}^{N}(x, \mathbf{v}, \mathbf{U}_{2}^{N}) = \int\limits_{x_N}^{\infty} G^{\infty}(x,\xi)\mathbf{f}(\xi, \mathbf{U}_{2}^{N}(\xi, \mathbf{v}))d\xi + \exp(-\mathcal{A}(x - x_N))\mathbf{v}_N, \qquad x \in [x_N, \infty),$$

де $G^{\infty}(x,\xi)$ задається формулою (16).

Дослідимо властивості операторів $\Re_{\alpha}^{j}(x, \mathbf{v}, \mathbf{U}_{\alpha}^{j})$, $\alpha = 1, 2$, $\Re_{2}^{N}(x, \mathbf{v}, \mathbf{U}_{2}^{N})$. Зазначимо, що

$$\mathbf{u}^{(0)}(x) = \exp(-\mathcal{A}x)\boldsymbol{\mu}_1 = \mathbf{u}_{j+(-1)^{\alpha}}^{(0)} + \mathcal{A}^{-1}\left(I - \exp(-\mathcal{A}(x - x_{j+(-1)^{\alpha}}))\right) \left.\frac{d\mathbf{u}^{(0)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^{\alpha}}},$$

$$x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, \quad j = 2-\alpha, 3-\alpha, ..., N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\mathbf{u}^{(0)}(x) = \exp(-\mathcal{A}(x - x_N))\mathbf{u}_N^{(0)}, \quad x > x_N.$$

Нехай $\mathbf{U}_{\alpha}^{j} \in \Omega\left([x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], r + \Delta\right)$, $\mathbf{U}_{2}^{N} \in \Omega\left([x_N, \infty), r + \Delta\right)$, тоді

$$\left\|\Re_{\alpha}^{j}(x, \mathbf{v}, \mathbf{U}_{\alpha}^{j}) - \mathbf{u}^{(0)}\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}]} \le \left\|\mathbf{v}_{j+(-1)^{\alpha}} - \mathbf{u}_{j+(-1)^{\alpha}}^{(0)}\right\| +$$

$$+ (-1)^{\alpha+1}\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\left\|I - \exp(-\mathcal{A}(x - x_{j+(-1)^{\alpha}}))\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}]} \left\| \left.\frac{d\mathbf{v}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^{\alpha}}} - \left.\frac{d\mathbf{u}^{(0)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^{\alpha}}} \right\| +$$

$$+ (-1)^{\alpha+1}\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\left\|\exp(-\mathcal{A}(x - x_{j+(-1)^{\alpha}})) - I\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}]} \int\limits_{0}^{\infty} \|\mathbf{K}(\xi)\|\, d\xi \le r + \Delta,$$

$$\left\|\Re_{2}^{N}(x, \mathbf{v}, \mathbf{U}_{2}^{N}) - \mathbf{u}^{(0)}\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \le \left\|\exp(-\mathcal{A}(x - x_N))\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \left\|\mathbf{v}_N - \mathbf{u}_N^{(0)}\right\| +$$

$$+ \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \int\limits_{x_N}^{x} \left\|\exp(-\mathcal{A}x)\left(\exp(\mathcal{A}\xi) - \exp(\mathcal{A}x_N)\right)\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \|\mathbf{K}(\xi)\|\, d\xi +$$

$$+ \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\left\|I - \exp(-\mathcal{A}(x - x_N))\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \int\limits_{x}^{\infty} \|\mathbf{K}(\xi)\|\, d\xi \le r\left\|\exp(-\mathcal{A}(x - x_N))\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} +$$

$$+ \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\left\|I - \exp(-\mathcal{A}(x - x_N))\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \int\limits_{x_N}^{\infty} \|\mathbf{K}(\xi)\|\, d\xi \le r \quad \forall \mathbf{v} \in \Omega(\hat{\omega}_N, r),$$

тобто оператори $\Re_{\alpha}^{j}(x, \mathbf{v}, \mathbf{U}_{\alpha}^{j})$, $\alpha = 1, 2$, $\Re_{2}^{N}(x, \mathbf{v}, \mathbf{U}_{2}^{N})$ переводять відповідно множини $\Omega\left([x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], r + \Delta\right)$, $\Omega\left([x_N, \infty), r + \Delta\right)$ в себе.

Крім того

$$\left\|\Re_{\alpha}^{j}(x, \mathbf{v}, \mathbf{U}_{\alpha}^{j}) - \Re_{\alpha}^{j}(x, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{U}}_{\alpha}^{j})\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}]} \le$$

$$\le \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \int\limits_{x_{j+(-1)^{\alpha}}}^{x} \left\|I - \exp(-\mathcal{A}(x-\xi))\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}]} L(\xi)d\xi \left\|\mathbf{U}_{\alpha}^{j} - \tilde{\mathbf{U}}_{\alpha}^{j}\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}]} \le$$

$$\le q\,|h| \left\|\mathbf{U}_{\alpha}^{j} - \tilde{\mathbf{U}}_{\alpha}^{j}\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}]},$$

$$\left\|\Re_{2}^{N}(x, \mathbf{v}, \mathbf{U}_{2}^{N}) - \Re_{2}^{N}(x, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{U}}_{2}^{N})\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \le$$

$$\le \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\left\|I - \exp(-\mathcal{A}(x - x_N))\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \int\limits_{x_N}^{\infty} L(\xi)d\xi \left\|\mathbf{U}_{2}^{N} - \tilde{\mathbf{U}}_{2}^{N}\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)} \le q\left\|\mathbf{U}_{2}^{N} - \tilde{\mathbf{U}}_{2}^{N}\right\|_{1,\infty,[x_N,\infty)}.$$

Оскільки на підставі умови (5) $q < 1$, а $\tilde{q} = q\,|h| < 1$ при достатньо малому h_0, то оператори $\Re_\alpha^j(x, \mathbf{v}, \mathbf{U}_\alpha^j)$, $\alpha = 1, 2$, $\Re_2^N(x, \mathbf{v}, \mathbf{U}_2^N)$ здійснюють стискувальне відображення. Отже, згідно з принципом стискувальних відображень, при достатньо малому h_0 задачі (29), (30) матимуть єдиний розв'язок. ■

Розглянемо задачі

$$\begin{gathered}
\frac{d\mathbf{Y}_\alpha^j(x,\mathbf{u})}{dx} = \mathbf{Z}_\alpha^j(x,\mathbf{u}),\\
\frac{d\mathbf{Z}_\alpha^j(x,\mathbf{u})}{dx} + \mathcal{A}\mathbf{Z}_\alpha^j(x,\mathbf{u}) = -\mathbf{f}\left(x, \mathbf{Y}_\alpha^j(x,\mathbf{u})\right), \quad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha},\\
\mathbf{Y}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{j+(-1)^\alpha}, \quad \mathbf{Z}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\mathbf{u}) = \left.\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},\\
j = 2-\alpha, 3-\alpha, ..., N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2,
\end{gathered} \tag{31}$$

$$\begin{gathered}
\frac{d\mathbf{Y}_2^N(x,\mathbf{u})}{dx} = \mathbf{Z}_2^N(x,\mathbf{u}),\\
\frac{d\mathbf{Z}_2^N(x,\mathbf{u})}{dx} + \mathcal{A}\mathbf{Z}_2^N(x,\mathbf{u}) = -\mathbf{f}\left(x, \mathbf{Y}_2^N(x,\mathbf{u})\right), \quad x > x_N,\\
\mathbf{Y}_2^N(x_N,\mathbf{u}) = \mathbf{u}(x_N), \quad \lim_{x\to\infty}\mathbf{Y}_2^N(x,\mathbf{u}) = 0.
\end{gathered} \tag{32}$$

Оскільки справедливі рівності

$$\begin{aligned}
\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j} &\left(\exp(\mathcal{A}(\xi - x_{j+(-1)^\alpha})) - I\right)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi =\\
&= -\left(\exp(\mathcal{A}(x_j - x_{j+(-1)^\alpha})) - I\right)\mathbf{Z}_\alpha^j(x_j,\mathbf{u}) + \mathcal{A}\left(\mathbf{Y}_\alpha^j(x_j,\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{j+(-1)^\alpha}\right),
\end{aligned}$$

$$\int\limits_{x_N}^{\infty}\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u})d\xi = \mathbf{Z}_2^N(x_N,\mathbf{u}) + \mathcal{A}\mathbf{Y}_2^N(x_N,\mathbf{u}),$$

то праві частини ТТРС (19) та точної крайової умови (20) в точці x_N можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}(x_j,\mathbf{u}) = \hat{T}^{x_j}(\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))) = \hbar_j^{-1}\Big[&\mathbf{Z}_2^j(x_j,\mathbf{u}) - \mathbf{Z}_1^j(x_j,\mathbf{u}) + \mathcal{A}\left(\exp(\mathcal{A}h_j) - I\right)^{-1}\left(\mathbf{Y}_1^j(x_j,\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{j-1}\right) +\\
&+\mathcal{A}\left(I - \exp(-\mathcal{A}h_{j+1})\right)^{-1}\left(\mathbf{Y}_2^j(x_j,\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{j+1}\right)\Big], \quad j = 1, 2, ..., N-1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_2(x_N,\mathbf{u}) = \hat{\hat{T}}^{x_N}(\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))) = &\mathbf{Z}_2^N(x_N,\mathbf{u}) - \mathbf{Z}_1^N(x_N,\mathbf{u}) +\\
&+\mathcal{A}\mathbf{Y}_2^N(x_N,\mathbf{u}) + \mathcal{A}\left(\exp(\mathcal{A}h_N) - I\right)^{-1}\left(\mathbf{Y}_1^N(x_N,\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{N-1}\right),
\end{aligned}$$

де $\mathbf{Y}_\alpha^j(x_j,\mathbf{u})$, $\mathbf{Z}_\alpha^j(x_j,\mathbf{u})$, $\alpha = 1, 2$ є розв'язками задач Коші (31), а $\mathbf{Y}_2^N(x,\mathbf{u})$, $\mathbf{Z}_2^N(x,\mathbf{u})$ — це розв'язки крайової задачі (32).

Висновки

Побудовано та обґрунтовано точну триточкову різницеву схему (19)–(20) для чисельного розв'язування крайової задачі для систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку на півпрямій (1). За умов існування та єдиності розв'язку крайової задачі доведено існування та єдиність розв'язку ТТРС, а також збіжність методу послідовних наближень для її розв'язування.

Для побудови ТТРС (19), (20) необхідно для $\forall x_j \in \hat{\omega}_N$ розв'язати дві задачі Коші (31) на відрізках: $[x_{j-1}, x_j]$ (вперед) і $[x_j, x_{j+1}]$ (назад) та крайову задачу (32) на інтервалі $[x_N, \infty)$. Якщо задачі (31) і (32) розв'язувати чисельно, то можна побудувати відсічену триточкову різницеву схему.

Література

[1] *Gavrilyuk I.P., Hermann M., Kutniv M.V., Makarov V.L.* Exact and Truncated Difference Schemes for Boundary Value ODEs. Springer Basel AG, 2011 (International Series of Numerical Mathematics Vol.159).

[2] *Gavrilyuk I.P., Hermann M., Kutniv M.V. and Makarov V.L.* Difference schemes for nonlinear BVPs on the semiaxis // Computational Methods in Applied Mathematics (CMAM). – 2007. – Vol. 7, No. 1. – P. 25–47.

[3] *Кутнів М.В., Паздрій О.І.* Точна триточкова різницева схема для нелінійної крайової задачі на півосі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2010. — 53, 4. – С. 75–86.

[4] *Кутнів М.В., Паздрій О.І.* Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку на півосі // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. 2011. – Вип. 17. – С. 10–21.

[5] *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

[6] *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1988. – 304 с.

[7] *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

ТОЧНАЯ ТРЕХТОЧЕЧНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ

О.И. Паздрий

Национальный университет "Львівська політехніка",
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

Построена и обоснована точная трехточечная разностная схема для численного решения краевых задач на полуоси для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. При условиях существования и единственности решения краевой задачи доказано существование и единственность решения точной трехточечной разностной схемы. Доказано сходимость метода последовательных приближений для ее решения.

Ключевые слова: система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, краевая задача, точная трехточечная разностная схема.

2000 MSC: 65L10, 65L12, 34B15, 34B40

УДК: 519.62

EXACT THREE-POINT DIFFERENCE SCHEME FOR SYSTEMS OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE SEMIAXIS

O.I. Pazdriy

Lviv Polytechnik National University
12 Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

For numerical solving of boundary-value problems on the semiaxis for the second order nonlinear ordinary differential equations the three-point exact difference scheme is constructed and justified. Under conditions of existence and uniqueness of the solution of boundary-value problem the existence and uniqueness of the solution of three-point exact difference scheme are proved. The convergence of iterative method of successive approximations for its solution is proved.

Key words: system of nonlinear jrdinarydifferential equations, boundary value problem, exact three-point difference scheme

2000 MSC: 65L10, 65L12, 34B15, 34B40

УДК: 519.62