ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.740 № 740, (2012) с. 45–48

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.740 No 740, (2012) 45–48

ПРО ДОСТАТНІ УМОВИ АСИМПТОТИЧНОЇ НЕЗМІЩЕНОСТІ СЛУШНИХ ОЦІНОК

Н.А. Ружевич, М.М. Строчик

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С.Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 18 липня 2012 р.)

Знайдено достатні умови асимптотичної незміщеності слушних оцінок в одновимірному і багатовимірному випадках. Показано, що хоча поняття асимптотичної незміщеності і слушності оцінок тісно зв'язані, але асимптотично незміщена оцінка необов'язково є слушною і навпаки — не кожна слушна оцінка є асимптотично незміщеною.

Ключові слова: статистика, асимптотично незміщена оцінка, слушна оцінка

2000 MSC: 62F12

УДК: 519.2

Нехай $\boldsymbol{\zeta} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — вибірка з $\mathcal{L}_\theta(\xi) \in \{\mathcal{F}(x, \theta), \quad \theta \in \Theta\}$, тобто випадкові величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$ є незалежними і однаково розподіленими, що мають такий же розподіл, як випадкова величина ξ, причому розподіл цієї величини описується параметричною статистичною моделлю $\mathcal{F}$, де $F(x, \theta)$ — функція розподілу з невідомим скалярним або векторним параметром θ.

Означення. Статистика $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ називається слушною оцінкою скалярної параметричної функції $\tau(\theta)$ скалярного або векторного параметра θ, якщо вона збігається до цієї функції за ймовірністю при $n \to \infty$ для кожного $\theta \in \Theta$, тобто $T_n(\boldsymbol{\zeta}) \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} \tau(\theta)$, $\forall \theta \in \Theta$. Це означає, що $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \theta \in \Theta:$
$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\left(|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| < \varepsilon\right) = 1.$$

Означення. Статистика $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ називається асимптотично незміщеною оцінкою скалярної параметричної функції $\tau(\theta)$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta T_n(\boldsymbol{\zeta}) = \tau(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Поняття асимптотичної незміщеності і слушності оцінок тісно зв'язані. У монографії [1, с. 26] стверджується, що властивість слушності оцінки є жорсткішою від властивості асимптотичної незміщеності цієї оцінки. Але виявляється, що асимптотично незміщена оцінка необов'язково є слушною і навпаки теж — не кожна слушна оцінка є асимптотично незміщеною. Про це свідчать такі два приклади [2].

Приклад 1. Нехай $\boldsymbol{\zeta} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ є вибіркою з $\mathcal{L}_\theta(\xi) \in R(\theta, 2\theta), \quad \theta > 0$, тобто рівномірного розподілу на проміжку $[\theta, 2\theta]$. Тоді статистика $T_n(\boldsymbol{\zeta}) = \dfrac{2}{3}\xi_1 + \dfrac{1}{n}$ є асимптотично незміщеною оцінкою для параметра θ, але не є слушною оцінкою для цього параметра.

Справді, $E_\theta T_n(\boldsymbol{\zeta}) = \dfrac{2}{3} E_\theta \xi_1 + \dfrac{1}{n} = \theta + \dfrac{1}{n} \to \theta$ при $n \to \infty$, тобто $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ — асимптотично незміщена для θ. З іншого боку, оскільки $\mathcal{L}_\theta(T_n(\boldsymbol{\zeta})) \in R\left(\dfrac{2}{3}\theta + \dfrac{1}{n}, \ \dfrac{4}{3}\theta + \dfrac{1}{n}\right)$, то для кожного $\varepsilon, \ 0 < \varepsilon < \dfrac{\theta}{2}$, отримаємо

$$P_\theta\left(|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \theta| < \varepsilon\right) < P_\theta\left(|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \theta| < \frac{\theta}{2}\right) =$$
$$= P_\theta\left(\frac{\theta}{2} < T_n(\boldsymbol{\zeta}) < \frac{3\theta}{2}\right) =$$
$$= P_\theta\left(\frac{2\theta}{3} + \frac{1}{n} < T_n(\boldsymbol{\zeta}) < \frac{3\theta}{2}\right) = \frac{\dfrac{3\theta}{2} - \left(\dfrac{2\theta}{3} + \dfrac{1}{n}\right)}{\theta} <$$
$$< \frac{\dfrac{3\theta}{2} - \dfrac{2\theta}{3}}{\theta} = \frac{5}{6}.$$

Отже, $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ не є слушною оцінкою для θ .

Приклад 2. Статистика $T_n(\boldsymbol{\zeta}) = \left(\xi_{(1)}\right)^n + \overline{\zeta}$ є слушною оцінкою для параметричної функції $\tau(\theta) = 2\theta, \quad \forall \theta \in (1/2, 1)$, але не є асимптотично незміщеною для цієї функції, якщо $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — вибірка з розподілу випадкової величини ξ, що набуває два значення 2 і 0 з відповідними ймовірностями θ і $1 - \theta$, $(\theta \in (1/2, 1))$, $\quad \xi_{(1)} = \min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $\overline{\zeta} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$.

Покажемо спочатку, що статистика $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ є слушною оцінкою для параметричної функції $\tau(\theta) = 2\theta$. Для цього знайдемо розподіл випадкової величини $\left(\xi_{(1)}\right)^n$. Згідно з [3, с. 27] ця випадкова величина набуватиме значення $0, \ 2^n$ з відповідними ймовірностями $1 - \theta^n, \ \theta^n$. Тоді для кожного ε, $0 < \varepsilon < 2^n$, матимемо

$$P_\theta\left(\left|\left(\xi_{(1)}\right)^n\right| < \varepsilon\right) = P_\theta\left(\left(\xi_{(1)}\right)^n < \varepsilon\right) =$$
$$= P_\theta\left(\left(\xi_{(1)}\right)^n = 0\right) = 1 - \theta^n \to 1$$

при $n \to \infty$, для всіх $\theta \in (1/2, 1)$, тобто $\left(\xi_{(1)}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} 0, \quad \theta \in (1/2, 1)$. Крім того, згідно з теоремою Хінчина про закон великих чисел, $\overline{\zeta} \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} E_\theta \xi = 2\theta, \quad \forall \theta \in (1/2, 1)$. Звідси за теоремою 2 [3, с. 22], $T_n(\boldsymbol{\zeta}) \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} 2\theta$ для всіх $\theta \in (1/2, 1)$, тобто статистика $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ є слушною оцінкою для параметричної функції $\tau(\theta) = 2\theta$.

З іншого боку, статистика не є асимптотично незміщеною оцінкою цієї параметричної функції. Дійсно, $E_\theta T_n(\boldsymbol{\zeta}) = E_\theta \left(\xi_{(1)}\right)^n + E_\theta \overline{\zeta} = (2\theta)^n + 2\theta \to \infty$ при $n \to \infty$, $\forall \theta \in (1/2, 1)$.

У літературі добре відома достатня умова слушності асимптотично незміщеної оцінки, яка полягає в тому, що дисперсія цієї оцінки прямує до нуля за збільшення об'єму вибірки [1, с. 25]. Виявляється, що границя дисперсії слушної оцінки необов'язково дорівнює нулю. Вона може бути довільною константою, нескінченною, а може і не існувати.

Приклад 3. Нехай $\boldsymbol{\zeta} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — вибірка з $\mathcal{L}_\theta(\xi)$, причому ξ набуває два значення 0 і $\dfrac{1}{\theta}$ з відповідними ймовірностями $1 - \theta^2$ і θ^2, $(\theta \in (0, 1))$. Тоді статистики $T_n^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) = \overline{\zeta} + \left(\xi_{(1)}\right)^n$, $T_n^{(2)}(\boldsymbol{\zeta}) = T_n^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + (-1)^n \left(\xi_{(1)}\right)^n$ є асимптотично незміщеними і слушними оцінками параметра θ і $\lim\limits_{n\to\infty} D_\theta T_n^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) = 1$, $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} D_\theta T_n^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})$ $\left(\varliminf\limits_{n\to\infty} D_\theta T_n^{(2)}(\boldsymbol{\zeta}) = 0, \quad \varlimsup\limits_{n\to\infty} D_\theta T_n^{(2)}(\boldsymbol{\zeta}) = 4\right)$.

Приклад 4. Статистики $T_n^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) = \overline{\zeta} + \left(\xi_{(1)}\right)^n - 1$ і $T_n^{(2)}(\boldsymbol{\zeta}) = T_n^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + (-1)^n \left(\left(\xi_{(1)}\right)^n - 1\right)$ є асимптотично незміщеними і слушними оцінками параметричної функції $\dfrac{1}{\theta}$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} D_\theta T_n^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) = \infty$ і не існує $\lim\limits_{n\to\infty} D_\theta T_n^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})$ $\left(\varliminf\limits_{n\to\infty} D_\theta T_n^{(2)}(\boldsymbol{\zeta}) = 0, \quad \varlimsup\limits_{n\to\infty} D_\theta T_n^{(2)}(\boldsymbol{\zeta}) = \infty\right)$, якщо $\boldsymbol{\zeta} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — вибірка з розподілу випадкової величини ξ, що набуває значення 0 і $\dfrac{1}{\theta^2}$ з відповідними ймовірностями $1 - \theta$ і θ, $(\theta \in (0, 1))$.

Наведемо тепер одну достатню умову асимптотичної незміщеності слушної оцінки.

Теорема 1. *Нехай $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ — слушна оцінка скалярної параметричної функції $\tau(\theta)$ та існує така послідовність невід'ємних дійсних чисел $\{C_n\}$, що виконуються умови*

$$|T_n(\boldsymbol{\zeta})| \leqslant C_n < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall \theta \in \Theta$:

$$\lim_{n\to\infty} C_n \cdot P_\theta\left(|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| \geqslant \varepsilon\right) = 0. \tag{1.2}$$

Тоді $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ — асимптотично незміщена оцінка $\tau(\theta)$.

☐ *Доведення.* Справді, згідно з означенням математичного сподівання і умовою (1.1) існують $E_\theta T_n(\boldsymbol{\zeta})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тому $\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall \theta \in \Theta$:

$$|E_\theta T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| \leqslant E_\theta |T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| =$$
$$= E_\theta |T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| \cdot I\left(|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| \geqslant \varepsilon\right) +$$
$$+ E_\theta |T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| \cdot I\left(|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| < \varepsilon\right) <$$
$$< \left(C_n + |\tau(\theta)|\right) P_\theta\left(|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| \geqslant \varepsilon\right) + \varepsilon \underset{n\to\infty}{\to} \varepsilon,$$

бо $|\tau(\theta)| < \infty$, а $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ — слушна оцінка $\tau(\theta)$, що задовольняє умови (1.1), (1.2) (через $I(A)$ позначено індикатор події A). Звідси і з довільності вибору ε випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} |E_\theta T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| = 0$, тобто $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ — асимптотично незміщена оцінка $\tau(\theta)$. Теорема доведена. ■

Наслідок 1. Слушна рівномірно обмежена оцінка скалярної параметричної функції є асимптотично незміщеною оцінкою цієї функції, причому дисперсія цієї оцінки прямує до нуля у разі збільшення об'єму вибірки.

☐ *Доведення.* Оскільки оцінка рівномірно обмежена, то існує така додатна константа C, що $C_n = C$, $n = 1, 2, \ldots$. Тоді умова (1.1) набуде вигляду $|T_n(\boldsymbol{\zeta})| \leqslant C$, а співвідношення (1.2) випливає зі слушності оцінки. Тому в цьому випадку оцінка $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ є асимптотично незміщеною. З іншого боку, з цих же міркувань

$$D_\theta T_n(\boldsymbol{\zeta}) = E_\theta\left(T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)\right)^2 - \left(E_\theta T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant E_\theta\left(T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)\right)^2,$$

і $\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall \theta \in \Theta$:

$$D_\theta T_n(\boldsymbol{\zeta}) \leqslant E_\theta\left(T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)\right)^2 \cdot I\left(|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| \geqslant \varepsilon\right) +$$
$$+ E_\theta\left(T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)\right)^2 \cdot I\left(|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| < \varepsilon\right) <$$
$$< \left(C + |\tau(\theta)|\right)^2 P_\theta\left(|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| \geqslant \varepsilon\right) +$$
$$+ \varepsilon^2 P_\theta\left(|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| < \varepsilon\right) <$$
$$< \left(C + |\tau(\theta)|\right)^2 P_\theta\left(|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| \geqslant \varepsilon\right) + \varepsilon^2 \underset{n\to\infty}{\to} \varepsilon^2.$$

А це і означає, що дисперсія оцінки $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ прямуватиме до нуля за збільшення об'єму вибірки, оскільки ε довільне додатне число. ■

Проілюструємо застосування теореми 1 і наслідку 1 з неї для перевірки асимптотичної незміщеності слушної оцінки на такому прикладі.

Приклад 5. Нехай статистика $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ задовольняє умови прикладу 2, але невідомий параметр θ вибирається на проміжку $(0, 1/2)$. Тоді ця статистика, подібно до прикладу 2, теж є слушною для параметричної функції $\tau(\theta) = 2\theta$, $\forall \theta \in (0, 1/2)$. Покажемо, що вона є асимптотично незміщеною оцінкою для цієї параметричної функції.

Для цього спочатку застосуємо теорему 1 до випадкової величини $\left(\xi_{(1)}\right)^n$. Зауважимо, що в цьому випадку $\left(\xi_{(1)}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} 0, \quad \forall \theta \in (0, 1/2)$, а $C_n = 2^n$. Переконаємось тепер, що виконується умова (1.2). Дійсно, для всіх $\varepsilon > 0$

$$2^n P_\theta\left(\left|\left(\xi_{(1)}\right)^n\right| > \varepsilon\right) =$$

$$= 2^n \cdot P_\theta\left(\left(\xi_{(1)}\right)^n = 2^n\right) = 2^n\theta^n \to 0$$

при $n \to \infty$, бо $\theta \in (0,\, 1/2)$. Тому згідно з теоремою 1 $\lim\limits_{n\to\infty} E_\theta\left(\xi_{(1)}\right)^n = 0$, що очевидно, бо $E_\theta\left(\xi_{(1)}\right)^n = (2\theta)^n$. Далі зауважимо, що з тих же міркувань, що і в прикладі 2, $\overline{\zeta} \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} 2\theta$, $\forall\theta \in (0,\, 1/2)$, причому $\left|\overline{\zeta}\right| \leqslant 2$. Звідси за наслідком 1 статистика $\overline{\zeta}$ — асимптотично незміщена оцінка для 2θ.

Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} E_\theta T_n(\boldsymbol{\zeta}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(E_\theta\left(\xi_{(1)}\right)^n + E_\theta\overline{\zeta}\right) = 2\theta$, $\forall\theta \in (0,\, 1/2)$, а значить, $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ — асимптотично незміщена оцінка для параметричної функції 2θ.

Означення. Статистика

$$T_n(\boldsymbol{\zeta}) = (T_{n,\,1}(\boldsymbol{\zeta}),\, \dots,\, T_{n,\,r}(\boldsymbol{\zeta}))$$

є слушною оцінкою векторної параметричної функції $\tau(\theta) = (\tau_1(\theta),\, \dots,\, \tau_r(\theta))$, якщо

$$\|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}(T_{n,\,i}(\boldsymbol{\zeta}) - \tau_i(\theta))^2} \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} 0, \quad \forall\theta \in \Theta,$$

тобто для довільного $\varepsilon > 0$ і для кожного $\theta \in \Theta$

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\left(\|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)\| < \varepsilon\right) = 1.$$

Зауваження 1. Зі слушності оцінки векторної параметричної функції випливає слушність за кожною з компонент. А саме, якщо

$$\|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}(T_{n,\,i}(\boldsymbol{\zeta}) - \tau_i(\theta))^2} \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} 0, \quad \forall\theta \in \Theta,$$

то

$$T_{n,\,i}(\boldsymbol{\zeta}) \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} \tau_i(\theta), \quad \forall\theta \in \Theta, \quad i = 1,\, \dots,\, r.$$

Це твердження випливає з того, що $\forall\varepsilon > 0$ $\forall\theta \in \Theta$ $\forall i = 1,\, \dots,\, r$ виконується нерівність

$$P_\theta\left(|T_{n,i}(\boldsymbol{\zeta}) - \tau_i(\theta)| < \varepsilon\right) \leqslant P_\theta\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{r}\left(T_{n,i}(\boldsymbol{\zeta}) - \tau_i(\theta)\right)^2} < \varepsilon\right).$$

Теорема 2. *Нехай $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ — слушна оцінка векторної параметричної функції $\tau(\theta)$ та існує така послідовність невід'ємних дійсних чисел $\{C_n\}$, що виконуються умови*

$$\|T_n(\boldsymbol{\zeta})\| \leqslant C_n < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

$\forall\varepsilon > 0$ $\forall\theta \in \Theta$:

$$\lim_{n\to\infty} C_n \cdot P_\theta\left(\|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)\| \geqslant \varepsilon\right) = 0. \tag{2.2}$$

Тоді $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ — асимптотично незміщена оцінка $\tau(\theta)$.

□ *Доведення.* Справді, з умови (2.1) випливає, що

$$|T_{n,\,i}(\boldsymbol{\zeta})| \leqslant C_n, \tag{2.3}$$

$\forall n = 1, 2, \dots,$ $\forall i = 1, \dots, r$, а значить, існують $E_\theta T_{n,\,i}(\boldsymbol{\zeta})$ $\forall n = 1, 2, \dots, \forall i = 1, \dots, r$. Тому згідно із зауваженням 1 $\forall\varepsilon > 0$ $\forall\theta \in \Theta$ $\forall i = 1, \dots, r$

$$|E_\theta T_{n,\,i}(\boldsymbol{\zeta}) - \tau_i(\theta)| \leqslant E_\theta\, |T_{n,\,i}(\boldsymbol{\zeta}) - \tau_i(\theta)| =$$

$$= E_\theta\, |T_{n,\,i}(\boldsymbol{\zeta}) - \tau_i(\theta)| \cdot I\left(|T_{n,\,i}(\boldsymbol{\zeta}) - \tau_i(\theta)| \geqslant \varepsilon\right) +$$

$$+ E_\theta\, |T_{n,\,i}(\boldsymbol{\zeta}) - \tau_i(\theta)| \cdot I\left(|T_{n,\,i}(\boldsymbol{\zeta}) - \tau_i(\theta)| < \varepsilon\right) <$$

$$< (C_n + \|\tau(\theta)\|) \cdot P_\theta\left(|T_{n,\,i}(\boldsymbol{\zeta}) - \tau_i(\theta)| \geqslant \varepsilon\right) + \varepsilon <$$

$$< (C_n + \|\tau(\theta)\|) \cdot P_\theta\left(\|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)\| \geqslant \varepsilon\right) + \varepsilon \underset{n\to\infty}{\to} \varepsilon,$$

бо $\|\tau(\theta)\| < \infty$, а $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ — слушна оцінка $\tau(\theta)$, що задовольняє умови (2.2), (2.3). Звідси і з довільності вибору ε випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}|E_\theta T_{n,\,i}(\boldsymbol{\zeta}) - \tau_i(\theta)| = 0$, $\forall i = 1, \dots, r$, тобто $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ — асимптотично незміщена оцінка $\tau(\theta)$. Теорема доведена. ■

Далі зазначимо, що для нерегулярних статистичних параметричних моделей, для яких вибірковий простір залежить від невідомого параметра, доцільно модифікувати теорему 1 і теорему 2, а саме замість послідовності дійсних невід'ємних чисел $\{C_n\}$ ввести послідовність невід'ємних дійсних функцій $\{C_n(\theta)\}$, $\theta \in \Theta$. Наведемо лише формулювання цих теорем, оскільки їх доведення аналогічне.

Теорема 3. *Нехай $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ — слушна оцінка скалярної параметричної функції $\tau(\theta)$ в нерегулярній статистичній параметричній моделі, причому існує така послідовність невід'ємних дійсних функцій $\{C_n(\theta)\}$, $\theta \in \Theta$, що виконуються умови*

$$T_n(\boldsymbol{\zeta}) < C_n(\theta) < \infty, \quad \forall\theta \in \Theta \quad \forall n = 1, 2, \dots, \tag{3.1}$$

$\forall\varepsilon > 0$ $\forall\theta \in \Theta$:

$$\lim_{n\to\infty} C_n(\theta) \cdot P\left(|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)| \geqslant \varepsilon\right) = 0. \tag{3.2}$$

Тоді $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ — асимптотично незміщена оцінка $\tau(\theta)$.

Теорема 4. *Нехай $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ слушна оцінка векторної параметричної функції $\tau(\theta)$ та існує така послідовність невід'ємних дійсних функцій $\{C_n(\theta)\}$, $\theta \in \Theta$, що виконуються умови*

$$\|T_n(\boldsymbol{\zeta})\| \leqslant C_n(\theta) < \infty, \quad \forall\theta \in \Theta \quad \forall n = 1, 2, \dots,$$

$\forall\varepsilon > 0$ $\forall\theta \in \Theta$:

$$\lim_{n\to\infty} C_n(\theta) \cdot P\left(\|T_n(\boldsymbol{\zeta}) - \tau(\theta)\| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Тоді $T_n(\boldsymbol{\zeta})$ — асимптотично незміщена оцінка $\tau(\theta)$.

Застосуємо для статистики $T_n^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})$ в нерегулярній статистичній моделі з прикладу 3 теорему 3.

Приклад 6. Нехай виконуються умови прикладу 3. Покажемо, що статистика $T_n^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) = \overline{\zeta} + \left(\xi_{(1)}\right)^n$ є асимптотично незміщеною для параметра θ.

Для цього застосуємо теорему 3 окремо для кожної складової статистики $T_n^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})$. Спочатку розглянемо випадкову величину $\overline{\zeta}$. Оскільки $\overline{\zeta} \leqslant \dfrac{1}{\theta} < \infty$, бо $\theta \in (0,\ 1)$, і $\overline{\zeta} \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} E_\theta \xi = \theta$, $\forall \theta \in (0,\ 1)$, то виконуються умови (3.1), (3.2), і тому $\overline{\zeta}$ є асимптотично незміщеною для параметра θ , а саме, $E_\theta \overline{\zeta} = \theta$. Легко бачити, що $\left(\xi_{(1)}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} 0$, $\forall \theta \in (0,\ 1)$, і $\left|\left(\xi_{(1)}\right)^n\right| \leqslant \dfrac{1}{\theta^n} < \infty$, $\forall \theta \in (0,\ 1)$ $\forall n = 1,\ 2,\ \ldots$, тобто $C_n(\theta) = \dfrac{1}{\theta^n}$, а значить , теж виконуються умови (3.1), (3.2), бо $\forall \varepsilon > 0$ $\forall \theta \in (0,\ 1) : \dfrac{1}{\theta^n} \cdot P_\theta\left(\left|\left(\xi_{(1)}\right)^n\right| > \varepsilon\right) =$ $= \dfrac{1}{\theta^n} \cdot P_\theta\left(\left(\xi_{(1)}\right)^n = \theta^n\right) = \theta^n \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} E_\theta \left(\xi_{(1)}\right)^n = 0$, $\forall \theta \in (0,\ 1)$ і, остаточно, $\lim\limits_{n\to\infty} E_\theta T_n^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) = \theta$, $\forall \theta \in (0,\ 1)$, що і треба було показати.

Література

[1] *Воинов В.Г., Никулин М.С.* Несмещенные оценки и их применения. – М.: Наука, 1989. – 440 с.

[2] *Ружевич Н.А.* Про взаємозв'язок між слушністю і асимптотичною незміщеністю статистичних оцінок. В збірнику матеріалів: 10-та Відкрита наукова конференція Інституту прикладної математики та фундаментальних наук. Секція «Математика і механіка». – Львів, 2012. – с. 52.

[3] *Ружевич Н.А.* Математична статистика. – Львів: Львівська політехніка, 2001. – 168 с.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НЕСМЕЩЕННОСТИ СОСТОЯТЕЛЬНЫХ ОЦЕНОК

Н.А. Ружевич, М.М. Строчик

Национальный университет "Львівська политехника",
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

Найдены достаточные условия асимптотической смещенности состоятельной оценки в одномерном и многомерном случаях. Показано, что хотя понятия асимптотической несмещенности и состоятельности оценок тесно связаны, асимптотически несмещенная оценка не обязательно является состоятельной оценкой и наоборот – не каждая состоятельная оценка является асимптотически несмещенной.

Ключевые слова: статистика, асимптотически несмещенная оценка, состоятельная оценка.

2000 MSC: 62F12

УДК: 519.2

ON SOME SUFFICIENT CONDITIONS FOR CONSISTENT ESTIMATORS ASYMPTOTICAL UNBIASEDNESS

N.A. Ruzhevych, M.M. Strochyk

Lviv Polytechnic National University
12, S.Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

Sufficient conditions for consistent estimators asymptotical unbiasedness in the univariate and multivariate cases are established. It is shown that although the notion of asymptotic unbiasedness and consistency of estimates are closely related, asymptotically unbiased estimator is not necessarily a consistent estimator, and vice versa — not every consistent estimator is asymptotically unbiased.

Key words: statistic, asymptotically unbiased estimator, consistent estimator

2000 MSC: 62F12

УДК: 519.2