УДК 517.95

В.С. Ільків[1], І.Я. Савка[2]

[1]*Національний університет “Львівська політехніка”,*
вул. С.Бандери, 12, 79013, м. Львів, Україна

[2]*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім .Я.С. Підстригача НАН України,*
вул. Наукова, 3-б, 79060, м. Львів, Україна

ТЕОРЕМА ВКЛАДЕННЯ ПРОСТОРІВ СОБОЛЄВА У ВИПАДКУ АЛГЕБРИЧНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ КОЕФІЦІЄНТІВ РІВНЯННЯ

В області $D=(0,1)\times\Omega$, де Ω – одиничне коло $R/2\pi Z$, розглянемо задачу

$$L(\partial_t,\partial_x)u\equiv\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{i,j}\partial_t^i\partial_x^j u(t,x)=f(t,x),\ L_l u\equiv\partial_t^l u(t,x)\Big|_{t=0}-\mu\partial_t^l u(t,x)\Big|_{t=1}=0,\ l=1,2,..., \quad (1)$$

де $a_{i,j}\in C$, $\mu\in C\setminus 0$. Крім того, вважаємо, що

$$R(a_{n,o},a_{o,n})\equiv\sum_{\substack{i+j\le d,\\ i\ge 0,\, j\ge 0}}\beta_{i,j}a_{n,o}^i a_{o,n}^j=0\,, \quad (2)$$

де $\beta_{i,j}\in C$, $\sum\limits_{\substack{i+j\le d,\\ i\ge 0,\, j\ge 0}}\left|\beta_{ij}\right|\ne 0$.

Нехай W^q, $q\in R$, – простір Соболєва скінченного порядку, що є поповненням скінченних сум вигляду $u(t,x)=\sum\limits_{(k,m)}u_{km}e^{\tau(m)t+ikx}$ за нормою $\|u\|_q^2=4\pi^2\sum\limits_{(k,m)\in Z^2}\left(1+m^2+k^2\right)^q\left|u_{km}\right|^2$, де $\tau(m)=-\ln\mu+i2\pi m$.

Простором Соболєва нескінченного порядку для задачі (1), (2) називаємо простір

$$W^\infty=\left\{u(t,x)=\sum_{(k,m)\in Z^2}u_{km}e^{\tau(m)t+ikx}:\|u\|_\infty^2=\sum_{(k,m)\in Z^2}\lambda_{km}\left|u_{km}\right|^2<\infty\right\},$$

де $\lambda_{km}=\left|L(\tau(m),ik)\right|$ при $\left|L(\tau(m),ik)\right|\ne 0$ і $\lambda_{km}=1$ в протилежному випадку, причому $\lambda_{km}<\infty$.

Для розв’язності задачі (1), (2) у шкалі просторів W^q встановлено вкладення $W^\infty\subset W^q$ при $q<(n-1)/2$ у випадку незалежності коефіцієнтів рівняння $a_{n,o},a_{o,n}$ [1].

Для випадку алгебричної залежності (3) доведена така теорема вкладення:

Теорема. *Нехай існують такі дійсні сталі* $\omega>0$ *і* ψ*, що виконується нерівність*

$$\left(\forall(\xi,\eta)\in C^2\right)\qquad\left|\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\beta_{i,d-i}\xi^{d-i}\eta^i\right|\ge\omega\left(|\xi|+|\eta|\right)^\psi.$$

Тоді для майже всіх комплексних чисел $a_{o,n}$ *(стосовно міри Лебега на площині* $\operatorname{Re}a_{o,n}O\operatorname{Im}a_{o,n}$*) справджуються вкладення* $W^\infty\subset W^q$ *, якщо* $q<n\psi/2-d$.

Отриманий результат поширюється на випадок області $D=(0,T)\times\Omega^p$.

Дослідження підтримані ДФФД України (проект № 28.1/010).

1. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 216 с.*