УДК 536.12:536.2:532.72

АНАЛІЗ МЕТОДІВ У МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ФІЗИЧНИХ ЯВИЩ

© Мирон Пелех, Ярослав П'янило, Ігор Лаушник, 1999
ДУ "Львівська політехніка"

Досліджується можливість застосування та ефективність використання широко вживаних способів розв'язування початково-крайових задач математичної фізики. Розглядаються деякі способи їх модифікації з метою ефективнішого застосування.

Як модельна задача розглядається переміщення домішок у середовищі з пастками, яке у більшості випадків здійснюється конвективною дифузією у поровому розчині і супроводжується процесом взаємопереходу домішкових частинок між розчином та їх зв'язаним станом.

Обґрунтовано побудову розв'язків на основі теорії збурення в стаціонарному випадку, оскільки в нестаціонарному отримують досить громіздкі результати. Методи теорії збурення можуть бути використані для розв'язування задач дифузійних процесів, які відбуваються при нагріванні і охолодженні, наприклад, твердосплавних виробів.

Багато фізичних процесів описуються звичайними диференціальними рівняннями або диференціальними рівняннями в часткових похідних. Для детального дослідження певного явища будують адекватну математичну модель, яка дає можливість з певною достовірністю дослідити сам процес явища та вплив на нього різних факторів та фізичних параметрів (наприклад, модель дифузії, руйнування і тощо). У даній роботі досліджується можливість застосування та ефективність використання широко розповсюджених способів розв'язання початково-крайових задач математичної фізики. Розглядаються деякі способи їх модифікації з метою ефективнішого застосування.

Як модельна задача розглядається переміщення домішок у середовищі з пастками, яке у більшості випадків здійснюється конвективною дифузією у поровому розчині і супроводжується процесом взаємопереходу домішкових частинок між розчином та їх зв'язаним станом. Відомо [1], що процеси такого роду описуються системами некласичних взаємозв'язаних диференціальних рівнянь. Розглянемо процес вертикального переміщення домішок у середовищі з пастками в шарі $\xi \in [0, \xi_0]$, який в одновимірному випадку описується такою системою:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c_1}{\partial \tau} + b\dfrac{\partial c_1}{\partial \xi} = \dfrac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} - ac_1 + c_2 \\ \dfrac{\partial c_2}{\partial \tau} = d\dfrac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} + ac_1 - c_2 \end{cases} \quad (1)$$

при початково-граничних умовах

$$c_i(0,\xi) = c_{io}(\xi), \; c_i(\tau,0) = c_{i1}(\tau), \; c_i(\tau,\xi_0) = c_{i2}(\tau) \quad (2)$$

З аналізу фізичних процесів випливає, що деякі з параметрів (в системі (1) параметрів d) є достатньо малими. Врахування цього та наявність конвективної складової b значно ускладнює розв'язування задач такого типу. Так, при використанні інтегрального перетворення Лапласа особливими точками зображення будуть точки галуження, а не полюси, так, як при b=0.

Відомо [2], що хоч наявність малого параметра приводить до збурення розв'язку задачі в деякій досить вузькій зоні, проте значно ускладнюється розв'язок самої задачі. Зокрема в даному випадку при d>0 є недоцільним застосування числових методів розв'язування, а при використанні інтегрального перетворення Лапласа для розв'язування системи (1) отримують характеристичне рівняння шостого порядку з комплексними коефіцієнтами.

У даній роботі розглядаються особливості реалізації деяких методів на практиці при малих значеннях параметра d та великих значеннях b.

У просторі зображень Лапласа [3] система (1) матиме вигляд

$$\begin{cases} p\bar{c}_1 - c_{10}(\xi) + b\bar{c}_1' = \bar{c}'' - a\bar{c}_1 + \bar{c}_2, \\ p\bar{c}_2 - c_{20}(\xi) = d\bar{c}_2'' + a\bar{c}_1 - \bar{c}_2. \end{cases} \tag{3}$$

Оскільки

$$\bar{c}_2 = (p+a)\bar{c}_1 - c_{10}(\xi) + b\bar{c}_1' - \bar{c}_1'',$$

то зображення $\bar{c}_1(p,\xi)$ визначається розв'язком такого диференціального рівняння

$$\begin{gathered} d\bar{c}_1^{(4)} - bd\bar{c}_1^{(3)} - [d\cdot(p+a)+p+1]\bar{c}_1^{(2)} + b\cdot(p+1)\bar{c}_1^{(1)} + \\ + p\cdot(p+a+1)\bar{c}_1 = c_{20}(\xi) + (p+1)c_{10}(\xi). \end{gathered} \tag{4}$$

Характеристичне рівняння для (4) буде таким:

$$dx^4 - bdx^3 = [d\cdot(p+a)+p+1]\cdot x^2 + b\cdot(p+1)x + p\cdot(p+a+1) = 0. \tag{5}$$

Існуючі точні методи, зокрема Декарта-Ейлера та Феррарі [4], не завжди дають можливість знайти розв'язки рівняння (5), оскільки тут наявний малий параметр d і в коефіцієнти входить комплексний параметр p. Для наближеного розв'язування (5) можна застосовувати теорію збурення [2], що в остаточному результаті зводиться до побудови асимптотики коренів за малим параметром d. Зауважимо, що використання числових методів розв'язання рівняння (5) автоматично приводить до необхідності застосування числових методів обернення перетворення Лапласа.

При d=0 та сталих початково-граничних умовах розв'язок задачі (1)-(2) має вигляд [1]

$$\begin{gathered} c_1(\tau,\xi) = \psi_1(\tau) + (c_{11} - c_{10})\cdot e^{b\xi/2}\psi(\tau,\xi_0-\xi) + \left(c_{12} - c_{10} - e^{-(\xi_0-\xi)b/2}\psi(\tau,\xi)\right) - \\ - a_1\cdot(a+1)\cdot\left[e^{b\xi/2}\psi_{11}(\tau,\xi_0-\xi) + e^{-(\xi_0-\xi)b/2}\psi_{11}(\tau,\xi)\right], \end{gathered} \tag{6}$$

$$c_2(\tau,\xi) = \varphi_{20}(\tau) + ae^{-(\xi_0-\xi)b/2}\left[\Theta_1(\tau,\xi) + e^{\xi_0 b/2}\Theta(\tau,\xi_0-\xi)\right], \tag{7}$$

Позначення, що входять в (6) та (7), наведені в [1]. В загальному випадку концентрації $c_i(\tau,\xi)$, i=1,2, знайдені у вигляді рядів Фур'є і набувають скінченних значень. Як видно з виразів для $c_i(\tau,\xi)$, в деяких її доданках множником є вираз $\exp(\xi\, b/2)$. При зростанні добутку ξb значення $\exp(\xi\, b/2)$ швидко зростає і для його компенсації, оскільки $c_i(\tau,\xi)$ обмежений, відповідний ряд Фур'є повинен прямувати до нуля досить швидко з відповідною точністю. Враховуючи обмежену розрядну сітку ЕОМ, останню вимогу забезпечити досить важко. У цій ситуації можна або знаходити асимптотику суми рядів Фур'є при великих b, або, виходячи безпосередньо з відповідного зображення Лапласа, знаходити асимптотику оригіналу при великому b. Оскільки перший спосіб розв'язання цієї проблеми реалізувати на практиці досить важко, доцільно будувати оригінали $c_i(\tau,\xi)$ при великих b, як це зроблено в роботі [1].

На даний час при розв'язуванні задач з малим параметром широкого розповсюдження набули методи теорії збурення, які, зрештою, зводяться до побудови асимптотик за певною шкалою асимптотичних функцій, аргументом яких є малий параметр. У такому випадку розв'язок задачі складається з внутрішнього, під яким розуміється розв'язок в особливих зонах, та зовнішнього (поза особливими зонами).

Розглянемо побудову розв'язку наведеної вище задачі в нестаціонарному випадку. Зовнішній розв'язок задачі шукатимемо у вигляді

$$c_i(\tau,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty} c_{ik}(\tau,\xi)\cdot d^k,\ i=1,2. \tag{8}$$

Підстановка розкладів (8) в систему (1) приводить до необхідності розв'язування рекурентних взаємозв'язаних систем диференціальних рівнянь у часткових похідних

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c_{1k}(\tau,\xi)}{\partial\tau}+b\dfrac{\partial c_{1k}(\tau,\xi)}{\partial\xi}=\dfrac{\partial^2 c_{1k}(\tau,\xi)}{\partial\xi^2}-ac_{1k}(\tau,\xi)+c_{2k}(\tau,\xi)\,; \\ \dfrac{\partial c_{2k}(\tau,\xi)}{\partial\tau}-ac_{1k}(\tau,\xi)+c_{2k}(\tau,\xi)=\dfrac{\partial^2 c_{2,k-1}(\tau,\xi)}{\partial\xi^2}\,. \end{cases} \tag{9}$$

Розв'язок системи (9) при k=0 відомий (6), (7). Тому перейдемо до аналізу розв'язування системи (9). Для простоти вважатимемо, що початкові та граничні умови є сталими. Більше того, оскільки ці умови враховані при розв'язуванні системи (9), а функції $c_i(\tau,\xi)$ шукають у вигляді ряду (8), то можна вважати, що початкові та граничні умови при розв'язуванні системи (9) будуть нульовими. У такому випадку в просторі Лапласа система (9) матиме вигляд

$$\begin{cases} p\bar{c}_{1k}+b\bar{c}'_{1k}=\bar{c}''_{1k}-a\bar{c}_{1k}+\bar{c}_{2k}\,; \\ p\bar{c}_{2k}-a\bar{c}_{1k}+\bar{c}_{2k}=\bar{c}''_{2,k-1}\,. \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки

$$c_{2k}=\frac{1}{p+1}\left(\bar{c}''_{2,k-1}+a\bar{c}_{1k}\right), \tag{11}$$

то функція $\bar{c}_{1k}$ визначається як розв'язок такого звичайного диференціального рівняння:

$$\bar{c}''_{1k} - b\bar{c}'_{1k} - p_1\bar{c}_{1k} = \bar{\varphi}(p,\xi), \qquad (12)$$

де введено позначення

$$p_1 = p + a - \frac{a}{p+1}; \qquad \bar{\varphi}(p,\xi) = \frac{1}{p+1}\bar{c}''_{2,k-1}.$$

Розв'язок рівняння (12) для k=1 наведено в роботі [1].

Функцію $c_{12}(\tau,\xi)$ можна знаходити кількома способами:

а) маючи значення $\bar{c}_{11}(s,\xi)$ та $\bar{c}_{20}(s,\xi)$, за формулою (11) знаходять зображення $\bar{c}_{21}(s,\xi)$ і далі переходять в область оригіналів;

б) оскільки відомі не тільки зображення $\bar{c}_{11}$ та $\bar{c}_{20}$, а й їх оригінали, то на основі теореми про згортку можна знаходити безпосередньо функцію $\bar{c}_{21}(\tau,\xi)$, минаючи зображення, згідно з формулою:

$$c_{2k}(\tau,\xi) = \int_0^\tau e^{-(\tau-t)}\left[\frac{\partial^2 c_{2,k-1}(t,\xi)}{\partial\xi^2} + ac_{1,k}(t,\xi)\right]dt.$$

Знайдені функції $c_{ij}(\tau,\xi)$, i=1,2, j=0,1, є не що інше як перші два доданки ряду (8) (зовнішнього розв'язку). Згідно з теорією збурення для побудови повного розв'язку необхідно знайти ще і внутрішні розв'язки. Відзначимо, що навіть у випадку, коли буде знайдено перших два доданки внутрішнього розв'язку, точність кінцевого результату значною мірою залежить від малого параметра d. Очевидно, що побудова подальших членів асимптотичного розв'язку не викликає принципових математичних труднощів. Однак вже перших два доданки є досить громіздкими, їх виведення та обчислення вимагає значних затрат. Тому доцільно розглянути інші способи розв'язування задач такого типу.

Багато задач математичної фізики розв'язують на основі рядів Фур'є за синусами або косинусами. Наявність доданка, що містить конвективну складову, не дозволяє безпосередньо застосувати ці ряди для розв'язування вищезгаданої задачі. Модифікуємо метод рядів Фур'є у такий спосіб.

Вважатимемо, що функції $c_j(\tau,\xi)$, j=1,2, задовольняють умови, які дозволяють зобразити їх рядами [5]

$$c_j(\tau,\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{jn}(\tau)\sin(n\pi i\xi/\xi_0), \qquad \xi \in (0,\xi_0). \qquad (13)$$

Тоді

$$c_{jn}(\tau) = \frac{1}{\xi_0}\left[\int_0^{\xi_0} c_j(\tau,\xi)e^{-n\pi i\xi/\xi_0}d\xi - \int_0^{\xi_0} c_j(\tau,\xi)e^{n\pi i\xi/\xi_0}d\xi\right]. \qquad (14)$$

Зазначимо, що, поряд з граничними умовами (2), в даному випадку необхідно додати ще умови на граничні значення похідних, тобто

$$c'_i(\tau,0) = c'_{i1}, \qquad c'_i(\tau,\xi_0) = c'_{i2}, \qquad i=1,2\,.$$

На основі ряду математичних викладок можна показати, що шукані коефіцієнти c_{jn} обчислюються за формулами

$$c_{1n}(\tau) = A_n e^{x_1(n)\tau} + B_n e^{x_2(n)\tau} + c_{1nr}, \tag{15}$$

$$c_{2n}(\tau) = [x_1(n) + k_n] A_n e^{x_1(n)\tau} + [x_2(n) + k_n] B_n e^{x_2(n)\tau} + k_n c_{1nr} - \delta_1 \zeta_n, \tag{16}$$

де

$$c_{1mr} = h_3(n)/h_2(n),$$

$$x_1(n) = 0{,}5 \cdot \left[-h_1(n) + \sqrt{h_1^2(n) - 4h_2(n)}\right],$$

$$x_2(n) = 0{,}5 \cdot \left[-h_1(n) - \sqrt{h_1^2(n) - 4h_2(n)}\right],$$

$$h_1(n) = 1 + d\zeta_n + k_n, \quad h_2(n) = (dk_n + 1)\zeta_n + bn\pi i/\xi_0,$$

$$h_3(n) = [\delta_1 + d(\delta_1\zeta_n + \delta_2)]\zeta_n, \quad k_n = a + bn\pi i/\xi_0 + \zeta_n,$$

$$A_n = r \cdot [(x_2(n) + k_n)c_{10n} - x_2(n)c_{1nr}(n) - c_{20n} - \delta_1\zeta_n],$$

$$B_n = r \cdot [c_{20n} - (x_1(n) + k_n) \cdot c_{10n} + x_1(n) \cdot c_{1nr}(n) + \delta_1\zeta_n],$$

$$\mu_n = \xi_0/n^2\pi^2, \quad \nu_n = 1/n\pi i, \quad \zeta_n = 1/\mu_n\xi_0, \quad r = 1/[x_2(n) - x_1(n)],$$

$$\delta_1 = [c_{11} - (-1)^n c_{12}] \cdot (\nu_n + b\mu_n) + \mu_n \cdot [(-1)^n c'_{12} - c'_{11}].$$

$$\delta_2 = \nu_n \cdot [c_{21} - (-1)^n c_{22}] + \mu_n \cdot [(-1)^n c'_{22} - c'_{21}]$$

$$c_{j0n} = c_{j0}\nu_n \cdot [1 - (-1)^n], \quad j=1,2.$$

Оскільки постійні A_n та B_n знайдені, то формули (15) та (16) дають можливість обчислити коефіцієнти $c_{jn}(\tau)$, j=1,2. Шукані функції $c_j(\tau, \xi)$ обчислюються за формулою (13). Тому можна вважати, що задача гетеродифузії розв'язана.

Зауважимо, що, оскільки в даному методі малий параметр d входить множником, то його наявність не приводить до появи великих чисел. А це, своєю чергою, зменшує накопичення машинної похибки.

З наведених вище результатів можна зробити деякі висновки відносно вибору способу розв'язування відповідної задачі математичної фізики.

1. Очевидно, що аналітичні способи розв'язування задач математичної фізики можна застосовувати, якщо вхідні дані задаються в аналітичному вигляді. В протилежному випадку треба застосовувати числово-аналітичні або числові методи.

2. За наявності малих параметрів у математичній моделі числові методи розв'язування є малопридатними.

3. Вибір аналітичного або числово-аналітичного способу розв'язування залежить від багатьох факторів.

3.1. При застосуванні операційного способу на основі інтегрального перетворення Лапласа головна трудність, в основному, полягає у проблемі обернення, яку в параметричній формі не завжди вдається розв'язати. Однак, якщо відомий розв'язок задачі в зображеннях, то для відновлення оригіналу можна застосувати наближені та числові методи. Операційний спосіб є доцільним і з тієї точки зору, що порівняно просто можна знайти поведінки оригіналу при великих та малих значеннях часів. Останні, своєю чергою, можуть бути використані як для контролю інших способів розв'язування, так і для вибору деяких параметрів, що входять в ці способи розв'язування (зокрема, порядок стиску-розтягу шкали аргументів в теорії збурення).

3.2. Операційний спосіб має ту перевагу, що в результаті його застосування отримують параметричне зображення розв'язку, яке повністю описує шукану функцію.

4. Якщо вхідні дані відомі в дискретних точках і в математичну модель входять малі параметри, то в цьому випадку серед розглядуваних методів можна застосувати спектральні.

5. Побудова розв'язків на основі методів теорії збурення доцільна в стаціонарному випадку, оскільки в нестаціонарному отримують досить громіздкі результати. Однак методи теорії збурення можуть бути успішно використані для розв'язування відповідних характеристичних рівнянь.

1. Чапля Є.Я., П'янило Я.Д., П'янило Г.М., Рикалюк І.І. Дослідження впливу конвективного руху та ефектів взаємопереходу частинок на процес вертикальної дифузії. Львів, 1996. 50 с. (Препр. /НАН України, Центр математичного моделювання ІППМ ім. Я.С. Підстригача; N 1-96). 2. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М., 1984. 3. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М., 1975. 4. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. М., 1974. 5. Толстов Г.П. Ряды Фурье. М., 1980.

УДК 621.9.025.011

МЕТОДИКА ВИБОРУ ОПТИМАЛЬНИХ МАСТИЛЬНО-ОХОЛОДЖУВАЛЬНИХ РІДИН ДЛЯ ОБРОБКИ МЕТАЛІВ РІЗАННЯМ

© Василь Свізінський, 1999
ДУ "Львівська політехніка"

Розглянута методика та наведені результати експериментального вибору мастильно-охолоджуючих рідин (МОР) для процесу свердління корозійно- та кислотостійкої сталі 12Х18Н10Т. Наведені рекомендації для практичного застосування отриманих результатів.

Одним із важливих факторів покращання оброблюваності та інтенсифікації обробки різанням деталей із важкооброблювальних матеріалів на всіх операціях лезової обробки є використання ефективних мастильно-охолоджуючих рідин (МОР). Для обробки різних груп оброблюваних матеріалів, а також різних операцій різання створено близько 100 марок різних водорзчинних і маслянистих МОР.

Результати лабораторних досліджень та виробничих випробувань свідчать про можливість підвищення режимів різання в середньому на 10...20 % при використанні найбільш ефективних МОР для свердління, точіння та фрезерування виробів із важкооброблюваних матеріалів, про підвищення стійкості твердосплавного і швидкорізального інструменту в 2-4 рази, про зниження енергозатрат на 15...20 % і покращання якісних характеристик оброблених поверхонь на 1-1,5 розряда.