Оскільки регулююча дія $\{y_{n+k/\mu}\}$ є змінною на інтервалі дискретності, то управління об'єктом буде ефективнішим. При відповідному виборі параметрів коригуючої ланки забезпечується оптимальний перехідний процес системи.

Отже, отримано ефективні алгоритми функціонування та метод побудови коригуючої ланки на основі інтерполяції та різницевого подання сигналів для реалізації САР поліграфічним обладнанням високої точності.

1. Луцків М.М., Тимченко О.В., Шульжик Ю.О. Дискретні системи з коригуючим пристроєм з кратним періодом квантування // Технічна електродинаміка. 1998. N 1. С.20-22. 2. Стрепко І.Т., Тимченко О.В., Дурняк Б.В. Проектування систем керування на однокристальних мікро-ЕОМ. К., 1998. 3. Тимченко О.В. Використання дельта-модуляції в системах автоматичного регулювання // Поліграфія і видавнича справа: Наук.-техн. зб. Львів, 1996. Вип.31. С.111-115. 4. Дурняк Б., Стрепко І., Тимченко О. Розпаралелювання обчислень на основі вибору методів різницевого подання сигналів в САК реального часу // Комп`ютерні технології друкарства. Збірник наукових праць. Львів, 1998. С.120-123.

УДК 621.372.542: 376.56

ПРЯМИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ СФЕРИЧНИХ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ

© Олександр Тимченко, 1999
Українська академія друкарства

Розглянуто метод обчислення коефіцієнтів імпульсної характеристики (ІХ) сферичних цифрових нерекурсивних фільтрів нижніх частот з різними видами завдання амплітудно-частотних характеристик (АЧХ).

Для цифрової обробки даних з густини середовища та необхідної їх інтерпретації застосовують сферичні цифрові фільтри. Згладжування даних традиційно проводиться із застосуванням фільтрів нижніх частот (ФНЧ). Одержання ІХ багатовимірних фільтрів, особливо для розмірності вище двох, пов'язане зі значними затратами часу і в літературі [1] не відображено. Тому особливості методів обчислення ІХ сферичних цифрових ФНЧ викликають певний інтерес.

Найпростіше обчислюють нерекурсивні цифрові фільтри з лінійною фазочастотною характеристикою (ФЧХ). У разі розмірності більшої, ніж перша, цікавими є фільтри з коловою симетрією, оскільки їхні ІХ інваріантні щодо повороту координат. Особливості обчислення таких фільтрів для розмірностей три і вище з врахуванням особливостей завдання АЧХ у літературі освітлені недостатньо, що звужує їх застосування.

У даній роботі розглянуті прямі методи розрахунку коефіцієнтів імпульсної характеристики за заданою амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) фільтрів нижніх частот.

Проведемо обчислення ІХ сферичного фільтра. У разі ФНЧ його АЧХ можна задати кількома методами

$$H_1(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\begin{cases}1, |\omega_1|\in[0,a], |\omega_2|\in[0,a], |\omega_3|\in[0,a],\\ 0-\text{інакше},\end{cases} \quad (1)$$

$$H_2(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\begin{cases}1, 0<|\omega_1|<a, 0<\omega_2^2+\omega_3^2<a^2;\\ 0-\text{інакше},\end{cases} \quad (2)$$

$$H_3(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\begin{cases}1, a^2<\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2<b^2;\\ 0-\text{інакше}.\end{cases} \quad (3)$$

Значення a задає область смуги частот пропускання фільтра і нормоване до частоти дискретизації π. Випадок (1) відповідає ідеальному ФНЧ з кубічною АЧХ (рис.1,а). В усіх частотних областях переріз АЧХ є квадратом (рис.1,б-г).

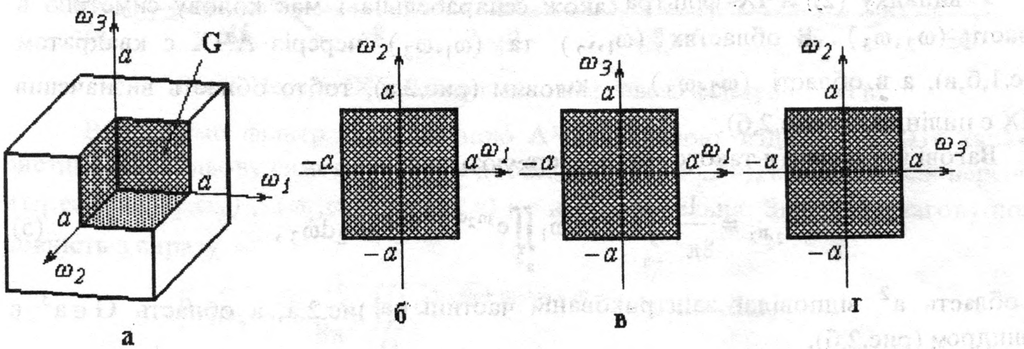


Рис.1. Переріз АЧХ сепарабельних кубічних цифрових фільтрів.

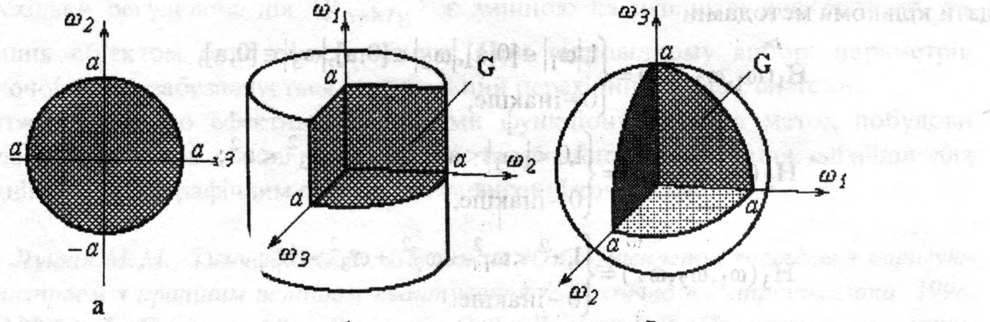
Фільтр з АЧХ (1) має сепарабельну АЧХ. Тому його коефіцієнти ІХ одержують так:

$$h_{n_1,n_2,n_3}=\frac{1}{8\pi^3}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}e^{jn_1\omega_1+jn_2\omega_2+jn_3\omega_3}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 =$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}e^{jn_1\omega_1}d\omega_1\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}e^{jn_2\omega_2}d\omega_2\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}e^{jn_3\omega_3}d\omega_3 = \quad (4)$$
$$=\frac{\sin(n_1a)}{n_1\pi}\frac{\sin(n_2a)}{n_2\pi}\frac{\sin(n_3a)}{n_3\pi}.$$

Максимум ІХ знаходиться на початку координат, причому $h_{0,0,0}=\frac{a^3}{\pi^3}$. Вагова послідовність такого фільтра повністю описується однією з координат

$$h_{n_1,0,0}=h_{0,n_2,0}=h_{0,0,n_3}\equiv h_n=\frac{\sin(na)}{n\pi}$$

і відповідає ІХ ФНЧ одновимірного фільтра [2].



а б в

Рис.2. Переріз АЧХ цифрових фільтрів з коловою симетрією.

У випадку (2) АЧХ фільтра також сепарабельна і має колову симетрію в області (ω_2,ω_3). В областях (ω_1,ω_2) та (ω_1,ω_3) переріз АЧХ є квадратом (рис.1,б,в), а в області (ω_2,ω_3) – коловим (рис.2,а), тобто область визначення АЧХ є циліндром (рис.2,б).

Вагові коефіцієнти такого ФНЧ одержують так:

$$h_{n_1,n_2,n_3}=\frac{1}{8\pi^3}\int_{-a}^{a}e^{jn_1\omega_1}d\omega_1\iint_{a^2}e^{jn_2\omega_2+jn_3\omega_3}d\omega_2 d\omega_3\,, \tag{5}$$

де область a^2 відповідає заштрихованій частині на рис.2,а, а область $G\in a^3$ є циліндром (рис.2,б).

Для обчислення інтеграла (5) в області a^2 замінимо ω_2 та ω_3 змінними в полярних координатах, тобто

$$\omega^2=\omega_2{}^2+\omega_3{}^2;\ \psi=\mathrm{arctg}\frac{\omega_3}{\omega_2};\ \theta=\mathrm{arctg}\frac{n_2}{n_1}. \tag{6}$$

Підставляючи ці значення в (5), отримуємо

$$\begin{aligned}h_{n_1,n_2,n_3}&=\frac{1}{4\pi^2}\frac{\sin(an_1)}{\pi n_1}\int_0^b\int_0^{2\pi}\omega e^{j\sqrt{n_2{}^2+n_3{}^2}\cos(\theta-\varphi)}d\varphi d\omega=\\&=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(an_1)}{\pi n_1}\int_0^a\omega J_0(\omega\sqrt{n_2{}^2+n_3{}^2})d\omega=\frac{\sin(an_1)}{\pi n_1}\frac{a}{2\pi}\frac{J_1(a\sqrt{n_2{}^2+n_3{}^2})}{\sqrt{n_2{}^2+n_3{}^2}}.\end{aligned} \tag{7}$$

Тут $J_0(x), J_1(x)$ – функції Бесселя першого роду 0 та першого порядку. Отримана ІХ має колову симетрію в координатах лише (n_2,n_3). Зауважимо, що

$$\begin{aligned}&h_{n_1,0,0}=\frac{a^2}{4\pi^2}\frac{\sin(an_1)}{n_1};\\&h_{0,n_2,0}=\frac{a^2}{2\pi^2 n_2}J_1(an_2);\ h_{0,0,n_3}=\frac{a^2}{2\pi^2 n_3}J_1(an_3).\end{aligned} \tag{8}$$

Значення $h_{0,0,0} = \frac{a^3}{4\pi^2}$ є максимумом ІХ. Переріз ІХ по осі n_2 згідно з (8) при $n_1 = n_3 = 0$ для $a = 0.6$ показаний на рис.3.

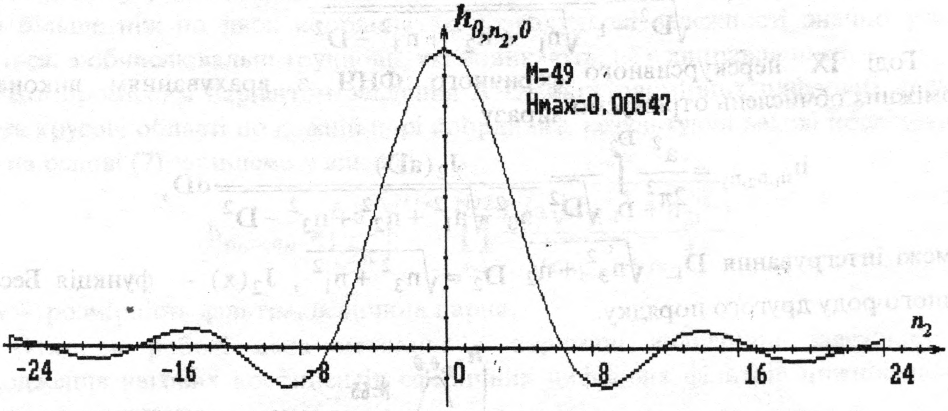


Рис.3. Переріз ІХ циліндричного цифрового фільтра по осі n_2.

Розглянемо фільтр зі сферичною АЧХ, заданою згідно з (3). Ця характеристика має кульову симетрію в усіх координатах (рис.2,в), колову в усіх перерізах (ω_1,ω_2), (ω_2,ω_3), (ω_1,ω_3) (рис.2,а) і є несепарабельна. Знайдемо вагову послідовність з виразу

$$h_{n_1,n_2,n_3} = \frac{1}{8\pi^3}\iiint_G e^{jn_1\omega_1 + jn_2\omega_2 + jn_3\omega_3} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 . \tag{9}$$

де $G \in a^3$ відповідає заштрихованій області на рис.2,в.

Для обчислення в сферичній області a^3 замінимо змінні $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ змінними в сферичних координатах (ω,ν,φ) і введемо додаткові змінні (θ,λ), які пов'язані співвідношеннями

$$\omega^2 = \omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 + \omega_3{}^2;\ \varphi = \mathrm{arctg}\frac{\omega_2}{\omega_1};\ \nu = \arccos\frac{\omega_3}{\omega};$$
$$\theta = \mathrm{arctg}\frac{n_2}{n_1};\ \lambda = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{n_1{}^2 + n_2{}^2}\cos(\varphi-\theta)}{n_3}. \tag{10}$$

Тоді вираз

$$\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 + \omega_3 n_3 = \omega\sqrt{n_3{}^2 + (n_1{}^2 + n_2{}^2)\cos^2(\varphi-\theta)}\cos(\nu-\lambda), \tag{11}$$

а вагова послідовність визначається обчисленням інтеграла

$$h_{n_1,n_2,n_3} = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\omega^2 e^{j\omega\sqrt{n_3{}^2 + (n_1{}^2+n_2{}^2)\cos^2(\theta-\varphi)}\cos(\nu-\lambda)}\sin\nu\, d\nu\, d\varphi\, d\omega . \tag{12}$$

Введемо додаткову змінну інтегрування D, яка виражається так:

$$D = \sqrt{n_3{}^2 + (n_1{}^2 + n_2{}^2)\cos^2(\varphi-\theta)} . \tag{13}$$

Зінтегруємо (12) спочатку по ν, потім по ω і замінимо інтегрування по φ інтегруванням по D. Одержимо з (13) значення

$$d\varphi = \frac{-DdD}{\sqrt{D^2 - n_3^2}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - D^2}}. \tag{14}$$

Тоді ІХ нерекурсивного сферичного ФНЧ з врахуванням виконаних проміжних обчислень отримуємо з виразу

$$h_{n_1,n_2,n_3} = \frac{a^2}{2\pi^2}\int_{D_1}^{D_2} \frac{J_2(aD)}{\sqrt{D^2 - n_3^2}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - D^2}} dD, \tag{15}$$

де межі інтегрування $D_1 = \sqrt{n_3^2 + n_2^2}$, $D_2 = \sqrt{n_3^2 + n_1^2}$, $J_2(x)$ – функція Бесселя першого роду другого порядку.

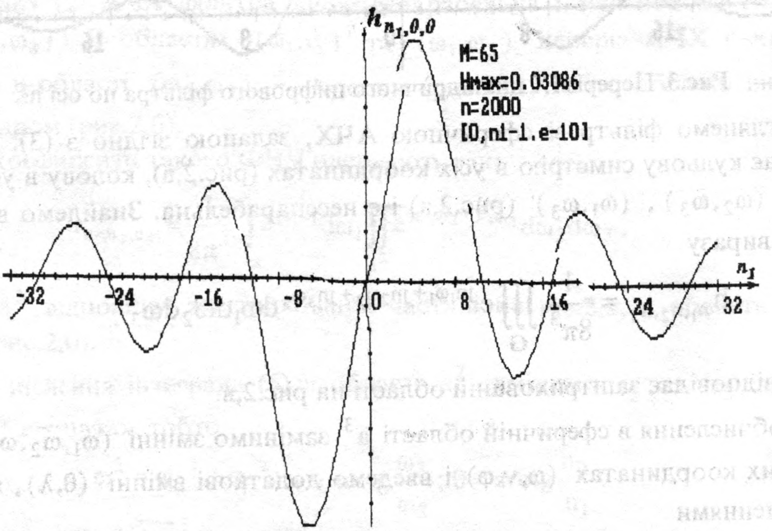


Рис.4. Переріз ІХ сферичного цифрового фільтра по осі n_1.

Інтеграл (15) не є табличним і його можна обчислювати числовими методами. Підінтегральна функція має дві особливі точки, в яких вона переходить в нескінченність: $D_{1\infty}^2 = n_3^2$, $D_{2\infty}^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$. Через це обчислення за формулою (15) пов'язане із значними обчислювальними труднощами, оскільки результат інтегрування $\{h_{n_1,n_2,n_3}\}$ дуже чутливий до заданої точності обчислень. Знайдемо переріз ІХ (15) для випадку $n_2 = n_3 = 0$

$$h_{n_1,0,0} = \frac{a^2}{2\pi^2}\int_0^{n_1} \frac{J_2(aD)}{D\sqrt{n_1^2 - D^2}} dD. \tag{16}$$

Переріз $\{h_{n_1,0,0}\}$, обчислений в межах $[0, n_1 - 10^{-10}]$ за методом Сімпсона при кількості інтервалів розбиття $n = 2000$ та $a = 0.5$ показаний на рис.4. Зауважимо, що $\{h_{n_1,0,0}\}$ є непарною функцією.

Розглянутий метод обчислення вагової послідовності сферичних цифрових фільтрів нижніх частот можна розповсюдити на фільтри з розмірністю вищою, ніж три, але, як показано вище, вагові коефіцієнти виражаються через елементарні функції лише у разі відповідної сепарабельності АЧХ. За відсутності сепарабельності більше ніж по двох координатах розрахункові залежності значно ускладнюються, а обчислювальні труднощі, які виникають, не є виправданими.

Компромісним варіантом завдання АЧХ багатовимірних цифрових фільтрів будуть кругові області по кожній парі координат, результуючі вагові послідовності яких на основі (7) запишемо у вигляді

$$h_{n_1,\dots,n_N} = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{N/2} \cdot \prod_{i=1}^{N/2} \frac{J_1\left(a\sqrt{n_{2i-1}^{\,2} + n_{2i}^{\,2}}\right)}{\sqrt{n_{2i-1}^{\,2} + n_{2i}^{\,2}}},$$

де N – розмірність фільтра, величина парна.

Отже, в роботі дана методика і отримані аналітичні залежності для знаходження вагових коефіцієнтів сферичних цифрових фільтрів нижніх частот з кульовою симетрією.

1. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов: Пер. с англ. М., 1988. 2. Погрибной В.А., Тимченко А.В. Расчет цифровых фильтров с дельта-модуляцией // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1988. Т.31. N 3. С.15-21.