

засоби”, затверджене наказом Міністерства фінансів України і зареєстроване в Міністерстві юстиції України 18.05.2000 р. за № 288/4509 із змінами та доповненнями. 4. Міжнародні стандарти оцінки. Восьме видання, 2008 / Пер. з англ. С.О. Пузанка. – К.: АртЕк, 2008. – 432 с. 5. Львівську промислову нерухомість продають дешевше від собівартості [Електронний ресурс]: за матеріалами Львівського порталу. – Режим доступу: [http://www.cupol.lviv.ua/?newssingle&tt\\_news=63493](http://www.cupol.lviv.ua/?newssingle&tt_news=63493). 6. Національний стандарт № 1 "Загальні засади оцінки майна і майнових прав", затверджений Постановою Кабінету Міністрів України від 10 вересня 2003 р. № 1440.

УДК 330.45

Б.Ю. Кишакевич

Дрогобицький державний педагогічний університет ім. Івана Франка

## ОБЧИСЛЕННЯ ЕКОНОМІЧНОГО КАПІТАЛУ БАНКУ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО

© Кишакевич Б.Ю., 2010

Розроблено методику обчислення економічного капіталу, яка ґрунтується на нових базельських угодах про врахування ризиків під час визначення регулятивного капіталу (Базель II). Запропоновано методику визначення економічного капіталу банку на основі IRB підходу з використанням бета-розподіленої норми відновлення капіталу (RR). Застосовано моделі Мертона (1974) та Васічека (1987) для симуляції втрат кредитного портфеля. Для отримання емпіричної функції розподілу втрат по кредитному портфелю застосовано метод симуляцій Монте-Карло.

**Ключові слова:** економічний капітал, непередбачувані втрати, VaR, метод Монте-Карло, втрати при дефолті, бета-розподіл, Базель II, IRB підхід.

The new Basle agreements on credit risk estimation of regulatory capital (Basle II) have been put into the foundation of this research. The author offers the methods for identifying a bank's economic capital on the basis of the IRB approach by means of beta-distributed recovery rate (RR). The Merton (1974) and Vasicek (1987) models for simulation of credit portfolio losses have been used. To obtain the empiric function of loss distribution on the credit portfolio the Monte-Carlo method has been used.

**Keywords:** economic capital, unexpected losses, VaR, Monte-Carlo method, loss given default, beta distribution, Basel II, IRB approach.

### Постановка проблеми

У вітчизняній та зарубіжній літературі ще не сформовано єдиного підходу до визначення суті економічного капіталу, особливо до методологій його розрахунку. Невирішеним залишається питання місця і ролі економічного капіталу в банківській практиці, особливо в системі регулювання банківської діяльності [1, с. 27]. Те саме стосується сучасних моделей обчислення та розподілу економічного ризику, в яких втрати у разі дефолту (LGD) фактично завжди вважаються константою, це при тому, що розмір капіталу на покриття банківських ризиків є чутливішим до змін саме LGD, ніж ймовірності дефолту (PD). У роботі зроблено спробу врахувати стохастичний характер LGD, використавши бета-розподіл, який дуже вдало описує випадковий характер змін норми відновлення капіталу (recovery rate –  $RR=1-LGD$ ) під час побудови емпіричної функції розподілу втрат кредитного портфеля та обчислення економічного капіталу.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Питанню дослідження економічного капіталу присвячено багато наукових праць здебільшого зарубіжних авторів, оскільки банки високорозвинутих країн мають значно більший досвід в адаптації до нових вимог Базельського комітету. У роботах [2–5] описано методологію обчислення економічного капіталу із врахуванням сучасних вимог “Базеля II”. Серед українських дослідників проблем економічного капіталу потрібно відзначити В.М. Гейця, К.О. Кіреєву, І.О. Лютого, М.І. Савлука [1], В.Л. Кротюка [6], С. Міщенко [7]. Проте сьогодні не вирішеними залишаються ключові питання методології обчислення економічного капіталу.

### Постановка цілей

Метою дослідження є розроблення методики обчислення економічного капіталу банку із застосуванням методу симуляцій Монте-Карло, у якій норма відновлення капіталу (recovery rate – RR) є випадково бета розподіленою величиною.

### Виклад основного матеріалу

Економічний капітал визначається як міра ризику, що показує величину капіталу, яка є необхідною для компенсації неочікуваних втрат через певний горизонт часу, як правило один рік, із наперед заданим рівнем значимості. Він став відправною точкою для фінансових інститутів, які стикаються із проблемою управління кредитними портфелями, та ґрунтується на ймовірнісній оцінці потенційних втрат. Економічний капітал визначається як різниця між процентилем розподілу втрат та очікуваними втратами. Довірчий інтервал встановлюється топ-менеджментом банку і відображає ризик банкрутства через певний горизонт часу. Горизонт часу, своєю чергою, визначається як період часу, протягом якого поведінка факторів ризику та їхній вплив на капітал банку допускають статистичну оцінку. На практиці фінансові інститути прив'язують довірчий інтервал до їхнього бажаного кредитного рейтингу. Так, фінансові інститути із рейтингом AA вибирають довірчий інтервал 99,97 % із часовим горизонтом 1 рік.



Рис. 1. Рівень очікуваних та непередбачуваних втрат кредитного портфеля

Моделі економічного капіталу оперують такими фундаментальними параметрами, як ймовірність дефолту (PD), сумою під ризиком (exposure-at-default EAD), втратами у разі дефолту (loss given default LGD), кореляцією дефолтів, терміном кредиту та міграцією кредитних рейтингів. Багатофакторні кредитні моделі визначають структуру кредитного портфеля та є основним інструментом обчислення функції розподілу втрат портфеля. Економічний капітал може бути одержаний як різниця квантиля такого розподілу за вибраного довірчого інтервалу та очікуваними втратами [2, с. 107].

В основу нашого дослідження економічного капіталу покладено нові базельські угоди про врахування ризиків діяльності банків під час визначення регулятивного капіталу (Базель II). Застосуємо моделі Мертона (1974) та Васічека (1987) для симуляції втрат кредитного портфеля. Практика підтвердила, що модель Васічека допускає прості асимптотичні апроксимації функції розподілу втрат та VaR. Такі апроксимації спрацьовують дуже вдало у разі великих за розміром портфелів і коли не

спостерігається значного домінування в портфелі декількох позик. У цій моделі стан кожного позичальника у кінці часового горизонту (дефолт або не дефолт) визначається його здатністю оплатити певну суму  $C_i$  [3, с. 20]. Таким показником  $Y_i$ , який фактично є випадковою змінною і від якого залежить платоспроможність компанії, можна взяти вартість або прибутковість активів. Якщо для  $i$ -го позичальника  $Y_i$  впаде нижче від деякого граничного значення  $C_i$ , тоді вважається, що з таким позичальником трапився дефолт. Отже,  $i$ -й позичальник банкрутує тоді і лише тоді, якщо

$$Y_{i,t} < C_{i,t} \quad (1)$$

$Y_i$  повинна бути нормалізована [1, с. 27] :

$$Y_{i,t} \equiv \frac{\hat{Y}_{i,t} - \mu_i}{\sigma_i}$$

де  $\mu_i$  – середнє значення,  $\sigma_i$  – дисперсія  $Y_{i,t}$ .

$$Y_{i,t} \sim N(0,1)$$

Безумовна ймовірність дефолту  $p_i$  визначається із такого співвідношення:

$$p_i = \Pr(Y_i < C_i) = \Phi(C) \quad (2)$$

де  $\Phi$  – це cdf стандартного нормального розподілу.

Здатність оплатити  $i$ -м позичальником  $Y_i$  може бути виражена як функція від систематичних факторів  $X_i$  та ідіосинкратичного фактора  $Z_i$ : так:

$$\begin{cases} Y_i = \sqrt{\beta_i^2} \sum_{j=1}^m w_{ij} X_j + \sqrt{1 - \beta_i^2} Z_i \\ Z_j \sim N(0,1) \quad X_i \sim N(0, \Sigma) \end{cases}$$

Тут  $(w_{i1}, \dots, w_{im})$  – вектор ваг, який характеризує чутливість  $i$ -го позичальника до  $j$ -го фактора. Систематичні фактори, як правило характеризують стан економік певних країн чи її галузей. Так, наприклад, аналогічна модель в Deutsche Bank містить 75 систематичних факторів [4, с.5]. Для спрощення математичних розрахунків розглянемо спочатку однофакторну модель, у якій припускається, що  $Y_i$  є функцією одного систематичного фактора  $X$  та ідіосинкратичних факторів  $Z_i$ :

$$Y_i = \sqrt{\beta_i} X + \sqrt{1 - \beta_i} Z_i \quad (3)$$

Систематичним фактором здебільшого обирають деякий макроекономічний показник, який характеризує стан економіки загалом. Він впливає на всіх позичальників через коефіцієнт чутливості  $\beta_i$ . Якщо  $\beta_i$  зростає, тоді на значення  $Y_i$  більший вплив матиме систематичний фактор  $X$ , а у разі зменшення  $\beta_i$ , величина активів компанії-позичальника більшою мірою залежатиме від внутрішньо-фірмового фактора ризику  $Z_i$ . Тут  $Y_i$ ,  $X_i$  та  $Z_i$  є змінними стандартного нормального розподілу

$$X \sim N(0,1), \quad Z_{i,t} \sim N(0,1) \quad (4)$$

Припустимо, що  $X_t$  та  $Z_{i,t}$  є некорельованими, а отже, незалежними. Звідси

$$\text{Cov}(X_t, Z_{i,t}) = \text{Cov}(X_t, X_{t-s}) = \text{Cov}(Z_t, Z_{t-s}) = 0 \quad (5)$$

Коефіцієнт  $\beta$  має головне значення у визначенні рівня взаємозалежності між доходністю активів двох різних позичальників. Кореляція двох довільних  $Y_{i,t}$  та  $Y_{j,t}$  не залежить від величини систематичного фактора  $X$  і матиме такий вигляд:

$$\text{Corr}(Y_{i,t}, Y_{j,t}) = \text{Cov}(Y_{i,t}, Y_{j,t}) = \sqrt{\beta_i} \sqrt{\beta_j} \quad (6)$$

Отже, величина кореляції активів визначається чутливістю  $Y_i$  до систематичного фактора  $X$ . У разі малого значення кореляції активів фінансові проблеми, які переживають компанії, здебільшого є незалежними одне від одного. Проте за великих кореляцій проблеми із сплатою кредиту виникають у всіх позичальників одночасно і є результатом загальноекономічних проблем в країні.

Базель II не заохочує повноцінного використання кореляції активів, так, як це робиться, наприклад у багатофакторних моделях CreditMetrics та KMV, а натомість наполягає на розробленні банками своїх власних внутрішніх методик оцінки ризику. Це може бути обґрунтованим значним ускладненням обчислювального процесу, що має місце у багатофакторних моделях, і як наслідок

виникненням значних похибок у розрахунках. У подальшому для визначення кореляції активів використаємо формулу (7), яка рекомендована Базельським комітетом для IRB підходу. Достовірність такої формули часто є предметом дискусій, оскільки вона ґрунтується на таких двох припущеннях. По-перше, усі позичальники з однаковим кредитним рейтингом мають також однакову ймовірність дефолту та кореляцію активів  $R$ . По-друге, кореляція активів є обернено-пропорційна до ймовірності дефолту (PD). Це має певне інтуїтивне пояснення: чим більше значення PD, тим більшою є ідіосинкратична компонента компанії-позичальника, і, отже, ризик дефолту залежить меншою мірою від загального стану економіки, а більшою – від внутрішньо-фірмових чинників.

$$R = 0,12 \left( \frac{1 - e^{-50PD}}{1 - e^{-50}} \right) + 0,24 \left( 1 - \frac{1 - e^{-50PD}}{1 - e^{-50}} \right) \quad (7)$$

$R$  може бути інтерпретовано, як кореляція активів між двома позичальниками з однаковим кредитним рейтингом. Отже, якщо  $Y_{i,t}$  та  $Y_{j,t}$  мають однакову ймовірність дефолту, то однаковим для них буде і коефіцієнт чутливості  $\sqrt{\beta}$ , а отже,

$$\text{Corr}(Y_{i,t}, Y_{j,t}) = \sqrt{\beta_j \beta_i} = \beta = R \quad (8)$$

Розглянемо обчислювальні аспекти нашої моделі. Для зручності застосуємо горизонт аналізу один рік.

Банківська практика та вимоги міжнародних регуляторів є такими:

- резерви формуються під очікувані втрати (expected losses);
- капітал повинен покривати потенційні втрати (unexpected losses);
- очікувані втрати по кредитному ризику розраховуються просто як сума  $EAD \cdot PD \cdot LGD$  по всіх кредитах в портфелі.

Розглянемо портфель із 20 кредитів, наданих позичальникам із різними кредитними рейтингами (табл. 1).

Таблиця 1

Кредитний портфель банку

Позичальник	Рейтинг	Ймовірність дефолту (PD)	EAD (тис. грн.)	$\beta_i$	Позичальник	Рейтинг	Ймовірність дефолту (PD)	EAD (тис. грн.)	$\beta_i$
1	BB-	1,33 %	200	0,1817	11	B	8,38 %	260	0,1218
2	BB-	1,33 %	300	0,1817	12	B	8,38 %	250	0,1218
3	B+	2,91 %	100	0,1480	13	B	8,38 %	140	0,1218
4	B+	2,91 %	150	0,1480	14	B-	10,32 %	110	0,1207
5	B+	2,91 %	230	0,1480	15	B-	10,32 %	320	0,1207
6	BB-	1,33 %	130	0,1817	16	B-	10,32 %	245	0,1207
7	B+	2,91 %	200	0,1480	17	B	8,38 %	111	0,1218
8	B+	2,91 %	50	0,1480	18	B+	2,91 %	212	0,1480
9	B+	2,91 %	20	0,1480	19	B	8,38 %	350	0,1218
10	B	8,38 %	500	0,1218	20	B	8,38 %	600	0,1218

Для обчислення економічного капіталу нам необхідними будуть  $EAD_i$  та  $LGD_i$  по кожному кредиту. Введемо випадкову змінну  $L_i$ , яка має розподіл Бернуллі та представляє втрати по  $i$ -му кредиту у разі банкрутства позичальника. Для  $i$ -го кредиту ймовірність банкрутства згідно із (2) становитиме  $p_i$ , при цьому  $L_i = EAD_i \cdot LGD_i$ . Очевидно, що позичальник сплачуватиме кредит із ймовірністю  $1 - p_i$ .

$$L_i = \begin{cases} EAD_i \cdot LGD_i & \text{якщо } Y_i \leq \Phi^{-1}(p_i) \\ 0 & \text{якщо } Y_i > \Phi^{-1}(p_i) \end{cases} \quad (9)$$

Тут  $\Phi$  – функція стандартного нормального розподілу.  $Y_i$  – нормально розподілена змінна, яка характеризує здатність позичальника сплачувати кредит і залежить, згідно із (3), від систематичного фактора  $X$  та ідіосинкратичної складової  $Z_i$ .

Практично у всіх моделях економічного капіталу банку втрати у разі дефолту LGD вважаються сталою величиною, що, з одного боку, можна пояснити бажанням спростити обчислювальний процес, проте, з іншого, ігнорується кореляція між LGD та PD, що не може не позначитись на коректності моделі. Згідно із статтею 87 № 6,7 Capital Requirements Directive (CRT) банки повинні самостійно оцінювати PD та LGD. Таке оцінювання повинно передбачати аналіз стійкості та точності моделі. Хоча аналіз моделей оцінювання PD проводиться доволі інтенсивно в науковій літературі, дослідження моделей оцінювання LGD є дуже рідкими. Це при тому, що розмір капіталу на покриття банківських ризиків є чутливішим до змін саме LGD, ніж PD. Саме тому, аналіз LGD моделей фактично є ключовим моментом оцінювання кредитного ризику портфеля. Найбільшої популярності набув метод, за якого рівень відшкодування втрат RR (recovery rate) ( $RR = 1 - LGD$ ) моделюється як випадкова величина на основі припущення про існування бета-розподілу.

Як відомо, випадкова величина  $U$  буде бета-розподіленою, якщо щільність такого розподілу задається так:

$$f_U(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

де  $B(\alpha, \beta)$  – бета-функція,  $\alpha, \beta$  – довільні фіксовані параметри. У такому випадку середнє значення такої бета-розподіленої величини дорівнюватиме  $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ . Відповідно до рекомендацій Базельського

комітету для незабезпечених кредитів LGD потрібно вважати 75 %, для забезпечених – LGD=45 %. З цією метою в нашій моделі використаємо бета розподіл з  $\alpha=2$  та  $\beta=6$  для незабезпечених кредитів та  $\alpha=4$  та  $\beta=3,3$  для забезпечених.

Для одержання емпіричної функції розподілу втрат по кредитному портфелю пропонується такий алгоритм методу Монте-Карло:

- 1) обчислюємо ключові параметри моделі  $C_i$  з рівності (2) та  $\sqrt{\beta_i}$  з (7);
- 2) для кожного  $k$ -го сценарію генеруємо одне випадкове число для систематичного параметра  $X^k \sim N(0,1)$ , 20 випадкових чисел  $Z_i^k \sim N(0,1)$  для ідіосинкратичної складової та 20 бета-розподілених  $RR_i^k, i=1..N$ , де  $N$  – кількість кредитів в портфелі;
- 3) обчислюються збитки по кожному кредиту на основі функції розподілу

$$L_i^k = \begin{cases} EAD_i(1 - RR_i^k) & \text{якщо } \sqrt{\beta_i} X^k + \sqrt{1 - \beta_i} Z_i^k \leq C_i ; \\ 0 & \text{якщо } \sqrt{\beta_i} X^k + \sqrt{1 - \beta_i} Z_i^k > C_i \end{cases}$$

- 4) обчислюємо суму збитків по кожному сценарію  $L^k = \sum_{i=1}^N L_i^k$ ;

5) у результаті застосування 70 000 сценаріїв (повторення пунктів 1–3) одержимо статистичну вибірку і на її основі можна побудувати емпіричну функцію розподілу втрат кредитного портфеля (рис. 2)

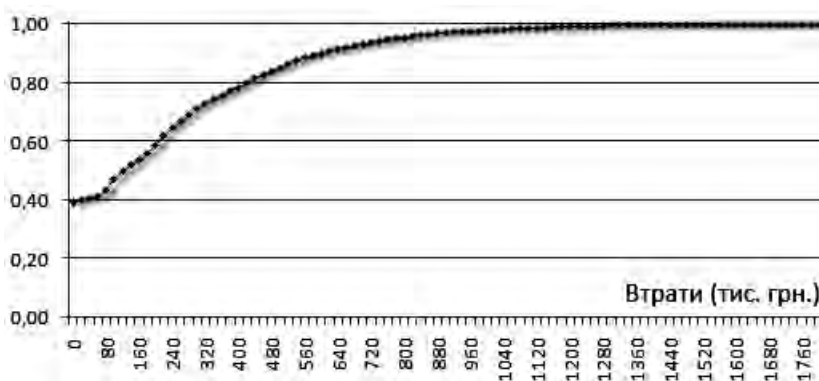


Рис. 2. Емпірична функція розподілу втрат кредитного портфеля

Величина економічного капіталу обчислюється як різниця максимально можливих втрат та сформованих резервів. Результати обчислень основних параметрів кредитного ризику портфеля наведено в табл. 2.

Таблиця 2

### Економічний капітал при різних довірчих інтервалах

	Recovery rate	25 %	55%	~Beta(2;6)	~Beta(4;3,3)
1	VaR ( $\alpha=95\%$ )	765	454,5	757,26	488,44
2	VaR ( $\alpha=99,9\%$ )	1558,78	948,12	1695,93	1063,10
3	Очікувані збитки (резерви)	217,57	129,76	211,21	132,80
4	Економічний капітал ( $\alpha=95\%$ ) тис. грн. (1-3) (% від об'єму портфеля)	547,43 (12,2 %)	324,74 (7 %)	546,06 (12 %)	355,65 (8 %)
5	Економічний капітал ( $\alpha=99,9\%$ ) тис. грн. (2-3) (% від об'єму портфеля)	1341,20 (30 %)	818,36 (18 %)	1484,73 (33 %)	930,30 (21 %)

Для порівняння подано результати обчислення економічного капіталу при сталих значеннях LCD, які збігаються із математичним сподіванням бета-розподілів Beta(2;6) та Beta(4;3,3). Отримані результати свідчать про значне збільшення необхідного економічного капіталу для незабезпечених кредитів.

### Висновки

Незважаючи на те, що сьогодні не має єдиного підходу до визначення економічного капіталу, у світовій практиці найуживанішим став підхід, рекомендований Базельським комітетом. Основними недоліками таких моделей оцінювання економічного капіталу є нехтування кореляції активів позичальників (враховуються лише кореляції активів позичальників зі спільним рейтингом) та фіксування сталого значення LGD під час розрахунків потенційних втрат кредитного портфеля. Запропонована у роботі методика обчислення економічного капіталу враховує випадковий характер LGD через використання бета-розподілу, який, як показує практика, вдало підходить до моделювання RR. Результати симуляції 70 000 сценаріїв за допомогою методу Монте-Карло свідчать, що економічний капітал при  $\alpha=99,9\%$  для незабезпечених кредитів (RR~Beta(2;6)) становитиме близько 33 % об'єму портфеля, тоді як для забезпечених (RR~Beta(4;3,3)) – близько 21 %. Із зменшенням довірчого інтервалу ( $\alpha=95\%$ ) істотно зменшується і необхідний економічний капітал до, відповідно, 12 % та 8 %. Можливим шляхом удосконалення запропонованої моделі є врахування історичних даних під час визначення параметрів бета-розподілу RR –  $\alpha$  і  $\beta$ .

### Перспективи подальших досліджень

В Україні виникла об'єктивна потреба у розробленні єдиного підходу до обчислення економічного капіталу банку. Проблема полягає у тому, що адаптація методик Базелю II потребує наявності в Україні власної значної за обсягом історії дефолтів, яка зробить можливим коректне моделювання основних параметрів кредитного ризику.

1. Савлук С.М. Економічний капітал банку: призначення та методи розрахунку / Проблеми та перспективи розвитку банківської системи України / Савлук С.М// Збірник наукових праць ДВНЗ “Українська академія банківської справи” НБУ / Вип. 24 – 2008. – С. 25–32 Режим доступу: [http://www.nbuv.gov.ua/portal/soc\\_gum/pprbsu/texts/2008\\_24/24.1.21.pdf](http://www.nbuv.gov.ua/portal/soc_gum/pprbsu/texts/2008_24/24.1.21.pdf) 2. Dimitris Chorafas. Economic Capital Allocation With Basel II: Cost, Benefit and Implementation Procedures/ Dimitris Chorafas. // Butterworth Heinemann – Dec. 2007 – 448 p. 3. Amit Kulkarni. Monte Carlo simulation of economic capital requirement & default protection premium ICFAI / Amit Kulkarni// Journal of Bank Management, Vol. 6, № 2, (May 2007), pp. 19–52. Режим доступу: [http://www.defaultrisk.com/\\_pdf6j4/Monte\\_Carlo\\_Simulation\\_o\\_Ecnmc\\_Cptl\\_Rrqurmnt\\_n\\_Dflt\\_Prtctn\\_Prrm.pdf](http://www.defaultrisk.com/_pdf6j4/Monte_Carlo_Simulation_o_Ecnmc_Cptl_Rrqurmnt_n_Dflt_Prtctn_Prrm.pdf) 4. Michael Kalkbrener. Deutsche Bank's Economic Capital Model. / Michael Kalkbrener// COMISEF Tutorial on Quantitative finance – London. October 2007. – 21 c. Режим доступу: [http://www.ems.bbk.ac.uk/for\\_students/msc\\_finance/KalkbrennerCOMISEF.pdf](http://www.ems.bbk.ac.uk/for_students/msc_finance/KalkbrennerCOMISEF.pdf) 5. Stefan Hlawatsch. A Framework for LGD Validation of Retail Portfolios / Stefan Hlawatsch, Peter Reichling // FEMM Working paper № 25 – August, 2009 – 29 c. Режим доступу: [http://www.wv.uni-agdeburg.de/fwwdeka/femm/a2009\\_Dateien/2009\\_25.pdf](http://www.wv.uni-agdeburg.de/fwwdeka/femm/a2009_Dateien/2009_25.pdf) 6. Кротюк, В. Еволюція підходів до оцінки капіталу в Базельських угодах [Текст] / В. Кротюк, В. Міщенко // Банківська справа. – 2005. – № 4. – С. 3–9. 7. Міщенко С. Сутність економічного капіталу та його роль у забезпеченні фінансової стійкості банку / С. Міщенко // Вісник НБУ. – 2008. – № 1. – С. 58–64.