

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РУХУ СИПКОВОГО МАТЕРІАЛУ В ПРОЦЕСІ ВІБРАЦІЙНОЇ СЕПАРАЦІЇ

© Стоцько З. А., Ребот Д. П., Топільницький В. Г., 2019

Використовуючи методи Ван-дер-Поля та ідею хвильової концепції руху, побудовано математичну модель руху сипкого матеріалу. Отримано залежності для визначення амплітуди та частоти його коливань. Описано вплив нелінійних сил та співвідношення частот власних та вимушених коливань матеріалу на процес сепарації. Розроблено методику дослідження впливу зміни швидкості руху матеріалу по ситі вібраційного сепаратора на частоту коливання сипкого матеріалу та проходження коливного процесу.

Ключові слова: вібраційна сепарація, динамічний процес, математична модель, сипкий матеріал.

Using the methods of Van-der-Pol and the idea of the wave concept of motion, a mathematical model of motion of loose material was constructed. Dependences are obtained for determining the amplitude and frequency of its oscillations. The influence of nonlinear forces and the ratio of frequencies of the intrinsic and forced oscillations of the material to the separation process is described. The technique of studying the effect of changing the velocity of material on the vibration separator's surface on the frequency of oscillation of loose material and passing the oscillatory process is developed.

Key words: vibration separation, dynamic process, mathematical model, loose material

Вступ. Значного поширення в промисловості набувають вібраційні сепаратори об'ємного типу. Їх будова сприяє зменшенню робочої площі та економії часу сепарації. Сучасні моделі вібросепараторів відрізняються високою продуктивністю, точністю сортування, незначним рівнем шуму та простотою експлуатації. Дослідження процесів вібраційної сепарації та чинників, які на них впливають, дають змогу оптимізувати конструкцію вібросепараторів та підвищити ефективність сепарації.

На ефективність та продуктивність роботи вібраційних сепараторів впливають не лише зовнішні чинники – такі, як вид збурення робочого органу, геометричні характеристики сепаратора, але й фізико-механічні характеристики матеріалу завантаження та його взаємодія із ситом та стінками робочого контейнера. Враховуючи, що при вібраційній сепарації контейнер сепаратора та шар матеріалу завантаження виконують складний просторовий рух, дослідження їх взаємодії є доволі складним процесом, що не може бути описаним у межах одного рівняння чи системи рівнянь [1, 2]. Визначаючи ефективність роботи вібраційних сепараторів, основну увагу приділяють дослідженням швидкості переміщення шару завантаження на ситі сепаратора, інтенсивності його переміщення, режиму коливань – амплітуди, частоти, кута зсуву фаз, кута нахилу сита до горизонту.

Попередніми дослідженнями встановлено, що із збільшенням кута нахилу сита до горизонту частота переміщення сипкого матеріалу та інтенсивність сепарації зростають, проте за значного збільшення кута нахилу, а саме понад 10–15° якість сепарації зменшується, і сипкий матеріал нашаровується в нижніх зонах сита. Тому кут нахилу сита в процесі сепарації є ефективним за умови його малої величини та збільшення частоти і зменшення амплітуди коливання шару заванта-

ження [3]. Також на ефективність сепарації впливає товщина шару сипкого матеріалу на ситі сепаратора. Зазвичай що більша товщина шару сипкого матеріалу, то менша швидкість його руху вздовж сита та просіювання. Це пояснюється тим, що із збільшенням товщини шару завантаження в матеріалі, що сепарується, значно знижується інтенсивність перемішування та проходження частинок відповідного розміру крізь отвори сита.

Формулювання мети дослідження. Як правило, вібраційний сепаратор складається із корпусу, в якому знаходяться два або більше сит, пружинної підвіски та інерційного приводу (рис. 1). За зворотно-поступального руху сита матеріали перемішуються, дрібні фракції проходять крізь отвори, а більші залишаються згори. Вібрація генерується зазвичай одним або двома двигунами із регульованими ексцентриками. Така конструкція двигунів дає змогу легко регулювати противаги та змінювати вібрацію, щоб знайти оптимальний режим сепарації продукту.

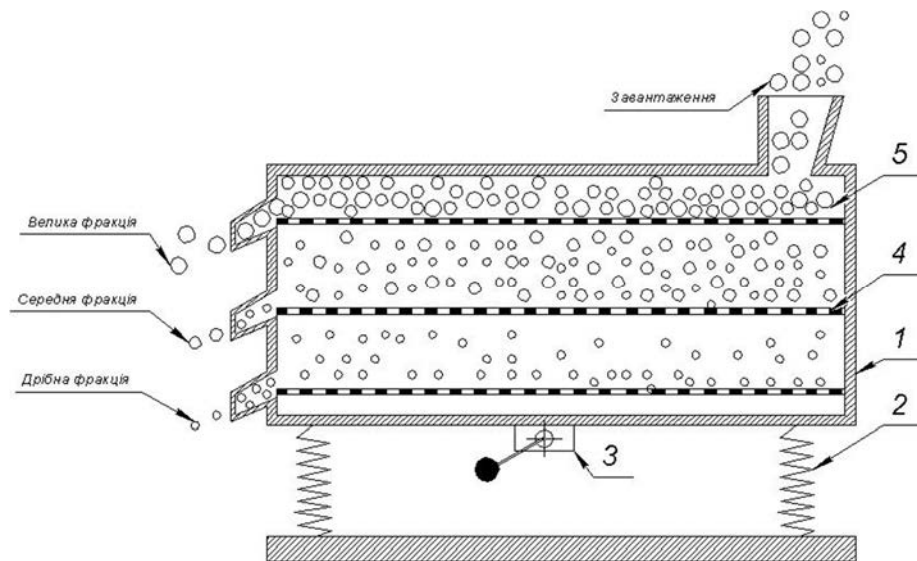


Рис. 1. Схема вібраційного сепаратора:
1 – корпус; 2 – пружина; 3 – ексцентричний привод;
4 – сито; 5 – сипкий матеріал

Процес сепарації сипкої продукції визначається зовнішніми та внутрішніми чинниками [4–6]. До зовнішніх чинників належать:

- спосіб збудження поперечних або поздовжніх коливань матеріалу, що сепарується;
- геометричні розміри вібраційного сепаратора;
- характеристики сит (жорсткісні параметри, розміри отворів, їх розташування та ін.).

До внутрішніх чинників, які впливають на процес вібраційної сепарації, належать фізико-механічні та геометричні характеристики сипкого матеріалу, його здатність змінювати свою структуру внаслідок інтенсивного руху та ін.

Дослідити вплив усього спектра чинників на процес вібросепарації можна тільки на основі адекватної процесу математичної моделі руху середовища. Для досягнення цієї мети необхідно:

- за прийнятою фізичною моделлю побудувати (за обґрунтованих припущень) відповідну математичну модель руху сипкого середовища у вібросепараторі на основі нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та однорідні крайові умови;
- розробити методику розв’язування цих рівнянь для випадків малої та значної швидкостей руху середовища вздовж сита;
- за викладеною методикою отримати базові співвідношення, які описують процес вібраційної сепарації сипкого матеріалу.

Останні дадуть змогу оцінити вплив широкого спектра зовнішніх та внутрішніх чинників на амплітудно-частотну характеристику сипкого середовища, а отже, на ефективність вібросепарації.

Виклад основного матеріалу. Для побудови математичної моделі процесу вібраційної сепарації сипких матеріалів адаптовано основну ідею хвильової концепції руху поздовжньо рухомих тіл в поєднанні з методом Ван-дер-Поля. В цьому випадку хвильові числа (k , c) та частота коливань лінійної моделі сипкого матеріалу, який рухається відносно сита із швидкістю V , дорівнюють:

$$\begin{aligned} k &= \frac{kp}{al}(a+V), \\ c &= \frac{kp}{al}(a-V), \\ w &= \frac{kp}{al}(a^2 - V^2). \end{aligned} \quad (1)$$

де l – довжина сита вібросепаратора; a – функція, яка враховує основні фізико-механічні характеристики сипкого матеріалу.

Наведені залежності показують, що за швидкості руху сипкого середовища вздовж сита, яка дорівнює $V = a$, коливного процесу в останньому не виникає. Це призводить до значного зниження продуктивності машини для сепарації сипкого середовища.

Математичною моделлю руху сипкого матеріалу у процесі його вібраційної сепарації є квазілінійне рівняння, тобто максимальні значення нелінійних сил є малими порівняно із відновлюючою силою. Швидкість поздовжнього руху середовища вздовж сита враховується за допомогою лінійних доданків відносно похідних шуканої функції. Вказане, а також опис динаміки процесу лінійної моделі за допомогою хвиль [7–10] відкривають шлях для поширення на цей клас задач ідей методів збурень. Серед останніх найбільш простим та одночасно ефективним для інженерних досліджень є метод Ван-дер-Поля. Поширення основної ідеї цього методу на досліджувані класи задач значною мірою полегшує принцип одночастотності коливань нелінійних систем. Із її урахуванням перше одночастотне наближення розв'язку рівняння матиме вигляд:

$$u(x,t) = a(t)[\cos(kx + wt + j(t)) - \cos(cx - wt - j(t))], \quad (2)$$

де $u(x,t)$ – переміщення перерізу елементарного шару сипкого матеріалу із координатою x у довільний момент часу t вздовж сита сепаратора.

Продиференціювавши (2) за незалежними змінними x , t , отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a w [-\sin(kx + wt + j) - \sin(cx - wt - j)] + \frac{\partial a}{\partial t} [\cos(kx + wt + j) - \\ &\quad - \cos(cx - wt - j)] - a \frac{\partial j}{\partial t} [\sin(kx + wt + j) + \sin(cx - wt - j)]; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} [\cos(kx + wt + j) - \cos(cx - wt - j)] + a \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} [\sin(kx + wt + j) + \\ &\quad + \sin(cx - wt - j)] - a \left(\frac{\partial j}{\partial t} \right)^2 [\cos(kx + wt + j) - \cos(cx - wt - j)] - \\ &\quad - 2 \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial j}{\partial t} [\sin(kx + wt + j) + \sin(cx - wt - j)] - 2 w a \frac{\partial j}{\partial t} [\cos(kx + wt + j) - \\ &\quad - \cos(cx - wt - j)] - a w^2 [\cos(kx + wt + j) - \cos(cx - wt - j)]; \quad (3) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= a w [-k \cos(kx + wt + j) - c \cos(cx - wt - j)] - \frac{\partial a}{\partial t} [k \sin(kx + wt + j) - \\ &\quad - c \sin(cx - wt - j)] - a \frac{\partial j}{\partial t} [k \cos(kx + wt + j) + c \cos(cx - wt - j)]; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= a [-k^2 \cos(kx + wt + j) + c^2 \cos(cx - wt - j)]. \end{aligned}$$

Підстановкою (2) до вихідного диференціального рівняння [3]

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} - (a^2 - V^2) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = e\bar{f}\left(x, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) \quad (4)$$

отримуємо зв'язок між невідомими параметрами $a(t)$, $j(t)$, їхніми похідними та функцією, що описує нелінійні сили, у вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} [\cos(kx + wt + f) - \cos(cx - wt - f)] + a \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} [\sin(kx + wt + f) + \\ & + \sin(cx - wt - j)] - a \left(\frac{\partial j}{\partial t} \right)^2 [\cos(kx + wt + j) - \cos(cx - wt - j)] - \\ & - 2 \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} [\sin(kx + wt + f) + \sin(cx - wt - f)] - 2wa \frac{\partial f}{\partial t} [\cos(kx + wt + j) - \\ & - \cos(cx - wt - j)] - aw^2 [\cos(kx + wt + j) - \cos(cx - wt - j) + \\ & + 2V \{ a w [-k \cos(xk + wt + j) - c \cos(cx - wt - j)] - \frac{\partial a}{\partial t} [k \sin(kx + wt + j) - \\ & - c \sin(cx - wt - f)] - a \frac{\partial f}{\partial t} [k \cos(kx + wt + f) + c \cos(cx - wt - f)] \} - \\ & - (a^2 - V^2) \{ a [-k^2 \cos(kx + wt + j) + c^2 \cos(cx - wt - j)] \} - \\ & - g^2 a [-d^2 \cos(xk + wt + f) + d^2 \cos(cx - wt - f)] = e\bar{f}(a, x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

де $\bar{f}(a, x, y)$ відповідає значенню функції, яка характеризує нелінійне відхилення властивостей сипкого матеріалу від лінійного закону $f(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2})$ за умови, що u та її похідні визначаються відповідно до розв'язку незбуреної задачі, а $y = wt + f$. Шляхом подальших перетворень отримаємо залежності:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{e}{4plb[(w + Vk)^2 + (w - Vc)^2]} \times \\ & \times \left(\int_0^l (\Psi(x) \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y) \cos y dy + \int_0^l \Theta(x) \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y) \sin y dy \right) dx; \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{-e}{4plba[(w + Vk)^2 + (w - Vc)^2]} \times \\ & \times \left(\int_0^l (\Psi(x) \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y) \sin y dy + \int_0^l \Theta(x) \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y) \cos y dy \right) dx; \end{aligned} \quad (6)$$

Тобто, вираз (2) описує динамічний процес за умови, що параметри $a(t)$ та $f(t)$ задані залежностями (6). Отримані співвідношення показують, що у загальному випадку процес не є ізохронним. До того ж, на закони зміни амплітуди та частоти коливань впливає швидкість поздовжнього руху сипкого середовища.

Для неавтономних систем необхідно врахувати той факт, що на характер процесу вібраційної сепарації суттєво впливають не тільки нелінійні сили, але й співвідношення між частотами власних та вимушених коливань сипких матеріалів. Їх вплив є найістотнішим для резонансного випадку, тобто коли між власною W частотою та частотою періодичного збурення Ω існує зв'язок, виникають два можливі випадки: нерезонансний та резонансний. Розглянемо нерезонансний випадок як найпростіший.

Вважатимемо, що жодна із комбінаційних частот $(nm + mw)$ не дорівнює чи є близькою до спектра власних частот сипкого середовища, тобто виконується співвідношення:

$$nm + mw \neq w. \quad (7)$$

Для побудови наближеного розв'язку поставленої задачі у вказаному випадку будемо виходити із тих самих міркувань, що й у випадку збурень, котрі явно не містять часової змінної: малі за величиною сили неавтономного типу спричиняють у нерезонансному випадку малі зміни основних параметрів динамічного процесу.

Отже, для нерезонансного випадку динамічний процес описується залежністю, у якій амплітуда та фаза хвиль є повільно змінними функціями, тобто визначаються диференціальними рівняннями

$$\frac{da}{dt} = e\Lambda(a); \quad \frac{dj}{dt} = e\Xi(a), \quad (8)$$

де $\Lambda(a)$, $\Xi(a)$ – деякі функції, вигляд котрих необхідно записати так, щоб представлення (6) із точністю e^1 задовольняло крайові умови

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=l} = 0.$$

Зауважимо, що праві частини цих співвідношень повинні залежати лише від амплітуди, оскільки у випадку відсутності резонансу фаза власних коливань не пов'язана із фазою зовнішніх сил [3]. Тому остання не впливає ні на амплітуду коливань, ні на повну фазу. Звичайно, у резонансному ж випадку необхідно у виразі як для миттєвої частоти, так і для миттєвої амплітуди ввести залежність від зсуву фаз, що буде розглянуто нижче.

Невідомими у (2) є функції $a(t)$ та $j(t)$. Перейдемо до побудови системи диференціальних рівнянь. Для їх знаходження, а точніше – до визначення функцій $\Lambda(a)$, $\Xi(a)$ діємо аналогічно, як і в автономному випадку. Шляхом диференціювання за незалежною змінною t після нескладних перетворень отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a}{\partial t} \{-2w \sin(kx + wt + f) - 2w \sin(cx - wt - f) - \\ & - 2Vk \sin(kx + wt + f) + 2Vc \sin(cx - wt - j)\} + \\ & + a \frac{\partial j}{\partial t} \{-2w \cos(kx + wt + f) + 2w \cos(cx - wt - f) - \\ & - 2Vk \cos(kx + wt + f) - 2Vc \cos(cx - wt - f)\} = e \bar{f}(a, x, y, q), \end{aligned} \quad (9)$$

де $\bar{f}(a, x, y, q)$ – відповідає значенню правої частини рівняння (9) за умови, що u та її похідні визначаються відповідно до розв'язку незбуреної задачі, тобто (2). Враховуючи, що функції $\frac{\partial a}{\partial t}$ та $\frac{\partial f}{\partial t}$ є повільно змінними у часі величинами, після усереднення по лінійній змінних x , із (3,5) знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{e}{2plb[(w+Vk)^2 + (w-Vc)^2]} \times \left(\int_0^l \left[\Psi(x) \int_0^{2p} \int_0^{2p} f(a, x, y, q) \cos y dy dq + \right. \right. \\ & \left. \left. + \Theta(x) \int_0^{2p} \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y, q) \sin y dy dq \right] dx, \right. \\ \frac{\partial j}{\partial t} &= \frac{-e}{2plba[(w+Vk)^2 + (w-Vc)^2]} \times \left(\int_0^l \left[\Psi(x, y) \int_0^{2p} \int_0^{2p} f(a, x, y, q) \sin y dy dq - \right. \right. \\ & \left. \left. - \Theta(x, y) \int_0^{2p} \int_0^{2p} \bar{f}(a, x, y, q) \cos y dy dq \right] dx, \right. \end{aligned} \quad (10)$$

де $\Psi(x, y)$, $\Theta(x, y)$ визначаються так само, як і в автономному випадку.

Висновки. Знайдені співвідношення (6) та (10) є базовими у дослідженні відповідно автономних та неавтономних коливань сипких матеріалів за довільної заданої швидкості їх руху вздовж сита. Вони дають можливість визначити закони зміни амплітуди та частоти коливань сипкого продукту в процесі вібросепарації. У випадку неавтономних коливань періодичні сили частоти котрих близькі до частоти власних коливань сипких матеріалів, значно зростають амплітуди коливань, а отже, у сипких матеріалах виникають значні амплітуди коливань, що посилює процес подрібнення продукту та його сепарації.

Саме аналіз розв'язків математичних моделей процесів вібросепарації сипких матеріалів із урахуванням всього спектра сил, зокрема і періодичних, дає можливість раціонально сконструювати машини із найбільшою продуктивністю роботи. А отримання зручних для інженерних розрахунків співвідношень, що описують процеси у сипких матеріалах, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху з урахуванням всього спектра силових чинників, зокрема періодичних, є важливою задачею.

1. Стоцько З. А. Вплив динаміки руху сипкого середовища на продуктивність вібраційних сепараторів / З. А. Стоцько, Д. П. Ребот *Технологічні комплекси*. – 2014. – № 1(9). – С. 150–153.
2. Stotsko Z. A. Modeling and optimization of the parameters of loose environment vibratory separation / Z. A. Stotsko, D. P. Rebot, V. G. Topilnytsky // *Scientific journal Technological Complexes*. No. 1 (13). – 2016. – p. 86–90.
3. Стоцько З. А. Вплив зміни амплітудо-частотних характеристик сипкого середовища на процес вібраційної сепарації / З. А. Стоцько, Д. П. Ребот, Б. І. Сокіл, В. Г. Топільницький // *Вісник Нац. ун-ту Львівська політехніка, “Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні”*. – 2015. – № 822. – С. 52–57.
4. V. Topilnytsky, D. Rebot and others. Modeling the dynamics of vibratory separator of the drum type with concentric arrangement of sieves. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. No. 2/7(87). – 2017. – p. 26–35.
5. Стоцько З. А. Динаміка сипкого середовища у вібросепараторі з вертикальним приводом сит / З. А. Стоцько, Б. І. Сокіл, Д. П. Ребот, В. Г. Топільницький // *Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”*. Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. – 2014. – № 788 – С. 60–65.
6. Стоцько З. А. Визначення впливу властивостей сипкого середовища на ефективність сепарації / З. А. Стоцько, Д. П. Ребот, В. Г. Топільницький // *Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні*. – 2018. – № 891. – С. 60–65.
7. Ребот Д. П. Математична модель визначення зміни амплітуди та частоти коливання сипкого матеріалу в процесі вібросепарації / Д. П. Ребот, В. Г. Топільницький // *Науковий вісник НЛТУ України*. – 2018. – Т. 28, №2. – С. 164–166.
8. Топільницький В. Г. Математичне моделювання динамічних процесів завантаження вібраційних технологічних машин / В. Г. Топільницький, М. Б. Сокіл, Д. П. Ребот, Я. М. Кусий // *Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, Динаміка, міцність та проектування машин і приладів*. – 2017. – №. 866. – С. 92–98.
9. Ребот Д. П. Динаміка та математична модель руху сипкого середовища під час його вібросепарації / Д. П. Ребот // *Науковий вісник НЛТУ України*. – 2012. – № 22.8. – С. 362–368.
10. Стоцько З. А. Вплив неперіодичних сил на динамічні процеси у сипкому середовищі під час вібраційної сепарації / З. А. Стоцько, Д. П. Ребот, В. Г. Топільницький // *Науковий вісник НЛТУ України*. – 2014. – Вип. 24.4. – С. 336–341.