

ОПРАЦЮВАННЯ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИГНАЛІВ

ЗАЛЕЖНІСТЬ ДИСПЕРСІЇ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ ВІД ТРИВАЛОСТІ ВИМІРЮВАНЬ

DEPENDENCE OF DISPERSION OF MEASUREMENT RESULTS ON DURATION OF MEASUREMENT

Колодій З. О., д-р техн. наук, доц., Яців М. Р., бакалавр

Національний університет "Львівська політехніка", Україна; e-mail: kzenoviy@gmail.com

Zenoviy Kolodiy, Dr. Sc., As.-Prof., Maksym Yatsiv, bachelor

Lviv Polytechnic National University, Ukraine; e-mail: max.yatsiv@gmail.com

<https://doi.org/10.23939/istcmtm2019.02.005>

Анотація. Наведено результати статистичних вимірювань електричного опору металоплівкового резистора. Статистичні вимірювання подано у вигляді N вимірювань, здійснених через однакові проміжки часу Δt протягом загального часу вимірювання T . Отримана залежність стандартного відхилення результатів вимірювання від N підтверджує результати інших досліджень: зі зростанням N – зі збільшенням часу вимірювання T – дисперсія результатів вимірювання перестає зменшуватись. Сформульовано гіпотезу про вплив нерівноважного стану об'єкта досліджень на дисперсію результатів вимірювання. Запропоновано як один зі способів виявлення нерівноважного стану об'єкта досліджень аналіз енергетичного спектра флуктуацій його параметрів. Енергетичний спектр результатів вимірювань є нерівномірним і подібним до фліккер-шуму, відтак досліджуваній об'єкт не у рівноважному стані, що може вплинути на дисперсію результатів.

Ключові слова: вимірювання, дисперсія, стандартне відхилення, енергетичний спектр флуктуацій.

Abstract. The results of statistical measurements of the resistance of the metal film resistor are given below. The analysis of the dependencies of the standard deviation on the number of measurements $\sigma_R(N)$ envisages a tendency of raising σ_R with the number of measurements. It indicates that the obtained results are not independent since fluctuations of them are not of "white" noise type. The dependence of the standard deviation of measurement results on N confirms the results of other studies.

A hypothesis about the impact of the non-equilibrium state of the studied object on the dispersion of measurement results is proposed. The energy spectrum of the measurement results is uneven and similar to flicker noise's one, as the object under study is in non-equilibrium state, which affect the dispersion of results.

The dependence of the normalized standard deviation of the measurement results on the number of measurements is given. It is compared the normalized standard deviations: under the condition that $S(f)$ has the form of "white" noise (an equilibrium system) and under the condition of combination of "white" noise and flicker noise. From the above dependence it can be seen that averaging 100 measurements gives a 10-fold decrease in the standard deviation of the measured value. If the form of "white" noise is inherent in the energy spectrum $S(f)$, then a decrement of standard deviation in ~ 1.4 times is noticed. For energy spectrum of flicker noise the decrement is ≈ 1.7 times.

Real measured spectrum is similar to flicker noise's one. So, the random error of measurement cannot be reduced to an arbitrarily small value by averaging a large number of measurement results. Only if the $T_{measmax} \approx M_{max}\tau$ ratio is considered, where $T_{measmax}$ is the time of measurement of the fluctuating parameters of the real investigated system, τ is the relaxation time of the investigated system, M_{max} is the number of possible ways in which the equilibrium state of the system can be implemented, the random error approximates to the minimum value.

Key words: Measurement, Dispersion, Standard deviation, Energy spectrum of fluctuations.

Вступ

Під час високоточних статистичних вимірювань фізичної величини $X(t)$ результати вимірювань отримують у вигляді часових рядів x_1, x_2, \dots, x_N , причому графічно такі ряди виглядають як флуктуації значень вимірюваної величини навколо середнього значення. Очевидно, що, обробляючи такі результати, передусім визначають середнє значення \bar{X} та дисперсію D_x вимірюваної величини $X(t)$. Виникає запитання: якого розміру має бути часовий ряд значень вимірюваної величини, або яким

має бути загальний час вимірювання T (якою повинна бути кількість результатів вимірювань N , здійснених через однакові проміжки часу Δt протягом загального часу вимірювання T), щоб дисперсія була мінімальною. Згідно з теоретичними положеннями, якщо результати вимірювань незалежні, то дисперсія повинна зменшуватись зі збільшенням кількості вимірювань N як $D_x = \frac{S_x^2}{\sqrt{N}}$, де S_x – стандартне відхилення результатів вимірювання. Це означає що у випадку незалежності

результатів вимірювань випадкову похибку вимірювань, яка характеризується дисперсією D_x або стандартним відхиленням $S_{cp} = \sqrt{D_x} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}$, можна звести до як завгодно малого значення, збільшуючи кількість вимірювань N .

Недоліки

Однак збільшення N пов'язане зі зростанням тривалості вимірювань T , а умова незалежності результатів вимірювання не враховує однозначно зміни самої вимірюваної величини за час T . На великих інтервалах вимірювання реальні фізичні величини змінюються в часі, а відтак порушується статистична стійкість середнього значення вимірювань.

Мета роботи

Метою роботи є дослідження залежності дисперсії результатів вимірювання від тривалості вимірювань (від кількості вимірювань N , здійснених через однакові проміжки часу Δt протягом загального часу вимірювання T), електричного опору резистора.

Вплив стану системи на похибки вимірювання її параметрів

Донедавна вважали, що реальні статистики мають властивість збіжності, а тому на великих інтервалах вимірювання T можуть застосовуватись класичні ймовірнісні моделі, які припускають збіжність статистик. Однак численні експериментальні дослідження фізичного феномену статистичної стійкості показали, що можливості використання класичних ймовірнісних моделей обмежені [1].

З'ясувалося [2–7], що за невеликої кількості вимірювань N статистики (середнє значення, дисперсія, стандартне відхилення) виявляють тенденцію до стабілізації, однак у разі збільшення N тенденція збіжності статистик до фіксованих величин експериментально не підтверджується.

Порушення статистичної стійкості середнього значення і збільшення дисперсії можуть бути наслідком нерівноважного стану досліджуваної системи, оскільки можна стверджувати однозначно, що всі реальні системи у нерівноважному стані. Однак під час вимірювань вплив нерівноважного стану на результати вимірювання чітко проявлятиметься за співвідношення часу вимірювання T і часу релаксації τ досліджуваної системи $T \approx \tau$. В інших випадках $T \gg \tau$ і $T \ll \tau$ вплив нерівноважного стану досліджуваної системи на результати вимірювання проявлятиметься менше.

Одним зі способів виявлення того, чи досліджувана система у рівноважному, чи у нерівноважному стані, є аналіз флуктуацій її параметрів, якими можуть бути результати статистичних вимірювань параметрів

системи, подані у вигляді часових рядів. Із [8] енергетичний спектр флуктуацій $S(f)$ рівноважної системи є однаковим у діапазоні частот від 0 Гц аж до надвисоких частот $S(f) = \text{const}$. Відтак, якщо енергетичний спектр флуктуацій не є однаковим в усьому діапазоні частот, то система не у рівноважному стані. Зокрема, наявність флікер-складової у енергетичному спектрі флуктуацій є свідченням нерівноваженості системи.

У [9] наведено вираз для дисперсії результатів вимірювання, якщо енергетичний спектр $S(f)$ флуктуацій результатів вимірювання має вигляд “білого” шуму $S_x(2pf) = S_0 = \text{const}$:

$$D_x = \frac{2}{N^2} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin(pfDtN)}{\sin(pfDt)} \right]^2 \cdot S(f) \cdot df \approx \approx 2S_0 \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin(pfDtN)}{NpfDt} \right]^2 \cdot df = \frac{S_0 f_{\infty}}{N} = \frac{S_x^2}{N} \quad (1)$$

Тобто, якщо досліджувана система у рівноважному стані, то, усереднюючи N результатів вимірювань, випадкову похибку можна зменшити в \sqrt{N} разів.

В [9] наведено також вираз для дисперсії результатів вимірювання, якщо енергетичний спектр флуктуацій результатів вимірювання містить флікер-складову (досліджувана система не у рівноважному стані):

$$D_x = \frac{2}{N^2} \int_{f_n}^{\infty} \left[\frac{\sin(pfDtN)}{\sin(pfDt)} \right]^2 \cdot aS_0 \cdot \frac{1}{f} df \approx \approx aS_0 \frac{1}{x^2} \left(1 - \cos^2(x) + 2x \sin(x) \cos(x) - 2x^2 \text{Ci}(2x) \right), \quad (2)$$

де f_n – нижня гранична частота флікер-складової флуктуацій (флікер-шуму); $x = pf_n DtN$;

$\text{Ci}(x) = \gamma + \ln(x) + \int_0^x \frac{\cos(f) - 1}{f} df$ – інтегральний косинус; $\gamma = 0,577\dots$ – стала Ейлера.

Із (2) випливає: якщо досліджувана система у нерівноважному стані (реальна система), то кількість результатів вимірювання N^l (а відтак, і час вимірювання T), у разі усереднення яких випадкова похибка є такою самою, як і в (1), більша, ніж для рівноважної системи: $N^l > N$.

В [10] наведено вираз для часу вимірювання $T_{meas \max}$, необхідного для того, щоб зафіксувати нерівноважну систему в одному із M_{\max} її можливих станів:

$$T_{meas \max} = \frac{-t}{\ln \left(1 - \exp \left(-\frac{S_{\max}}{k} \right) \right)} = \frac{-t}{\ln \left(1 - \exp \left(-\frac{k \ln M_{\max}}{k} \right) \right)} = \frac{-t}{\ln \left(1 - \exp(-\ln M_{\max}) \right)}, \quad (3)$$

де τ – час релаксації досліджуваної системи. Фіксація одного стану системи означає мінімальну імовірність флуктуацій її параметрів, а отже, і мінімальне значення випадкової похибки вимірювання.

Із (3) $T_{meas\ max} \approx M_{max} t$, тобто $T_{meas\ max}$ залежить від того, наскільки відхилилась від стану рівноваги досліджувана система (час релаксації τ) і для забезпечення мінімального значення випадкової похибки час вимірювання параметрів нерівноважної (реальної) системи повинен бути в M_{max} разів більшим за час релаксації системи τ . Якщо проміжок часу між окремими вимірюваннями Δt , то кількість результатів вимірювання N_H , для яких значення випадкової похибки вимірювання параметрів нерівноважної системи мінімальне, визначається як

$$N_H = \frac{T_{meas\ max}}{\Delta t} \approx \frac{t}{\Delta t} M_{max}.$$

Дослідження стандартного відхилення результатів вимірювань електричного опору від кількості вимірювань

Проведено три серії експериментальних вимірювань електричного опору резистора із провідною плівкою із оксиду металу за допомогою мультиметра типу BR2820 LCR Meter. Тривалість між серіями вимірювань становила чотири дні. Часовий інтервал між окремими результатами вимірювань (відліками) $\Delta t = 4$ с. Визначено середнє значення вимірюваного опору \bar{R} та стандартне відхилення S_R , а також залежність стандартного відхилення від кількості вимірювань $S_R(N)$. На рис. 1 наведено статистичні результати трьох серій вимірювань у вигляді графіків (рис. 1, a, c, e), а також відповідні залежності $S_R(N)$ (рис. 1, b, d, f).

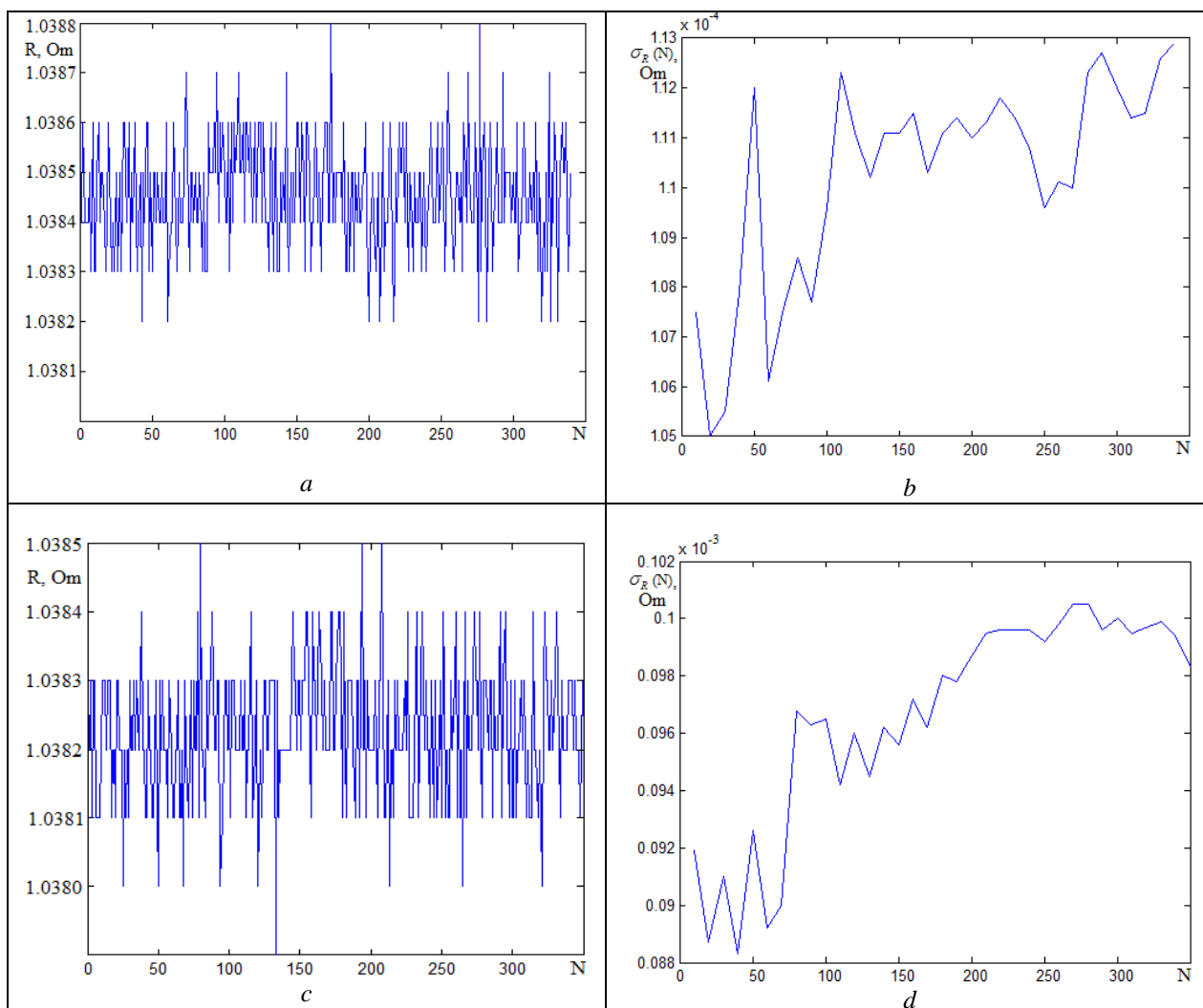


Рис. 1. Результати статистичних вимірювань електричного опору резистора R та залежності стандартного відхилення результатів вимірювань від кількості вимірювань $\sigma_R(N)$

Figure 1. Results of statistical measurements of the electrical resistance of the resistor R and the dependence of the standard deviation of the measurement results on the number of measurements $\sigma_R(N)$

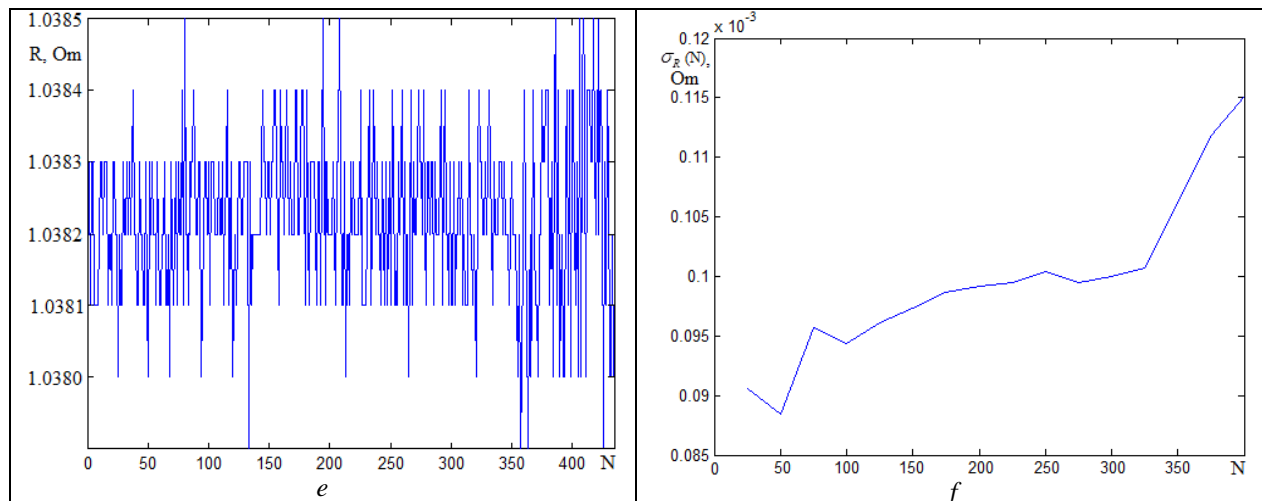


Рис. 1 (продовження). Результати статистичних вимірювань електричного опору резистора R та залежності стандартного відхилення результатів вимірювань від кількості вимірювань $\sigma_R(N)$

Figure 1. Results of statistical measurements of the electrical resistance of the resistor R and the dependence of the standard deviation of the measurement results on the number of measurements $\sigma_R(N)$

Середні значення електричного опору трьох серій вимірювань відповідно становлять: $\bar{R} = 1,0385$ Ом, $\bar{R} = 1,0382$ Ом, $\bar{R} = 1,0382$ Ом.

Аналіз залежностей стандартного відхилення від кількості показів $\sigma_R(N)$ (рис. 1, *b, d, f*) показує збільшення σ_R зі зростанням N , що може свідчити про те, що результати вимірювань не є незалежними (флуктуації отриманих результатів вимірювань не мають вигляду “білого” шуму).

З метою перевірки впливу вимірювального приладу на результати вимірювань здійснено фіксацію флуктуацій його показів у разі короткого замикання входу приладу після другої та третьої серій вимірювань опору R . На рис. 2 наведено результат фіксації флуктуацій показів приладу BR2820 LCR Meter (рис. 2, *a, c*), а також залежність стандартного відхилення від кількості показів $\sigma_R(N)$ (рис. 2, *b, d*).

За результатами рис. 2, *a, c* розраховано середнє значення показів приладу: $\bar{R} = 3,9573$ мОм, $\bar{R} = 4,0008$ мОм. Залежність стандартного відхилення флуктуацій показів приладу від кількості показів $\sigma_R(N)$ в першому випадку (рис. 2, *b*) показує незначне зростання зі збільшенням N , а в другому випадку спостерігається стабілізація $\sigma_R(N)$, тобто вплив вимірювального приладу на дисперсію результатів вимірювання опору є незначним.

Результати й обговорення

Отже, отримані результати експериментальних досліджень підтверджують висновки [2–7], що зі збільшенням кількості вимірювань N – зі зростанням тривалості вимірювання T дисперсія результатів вимірювань перестає зменшуватись.

Як зазначено вище, збільшення дисперсії може бути наслідком нерівноважного стану об’єкта досліджень. Нерівноважний стан об’єкта досліджень можна виявити, проаналізувавши енергетичний спектр флуктуацій його параметрів: якщо цей спектр не є однаковим у всьому діапазоні частот (не має вигляду “білого” шуму), то об’єкт досліджень не у рівноважному стані.

На рис. 3 наведено енергетичний спектр флуктуацій вимірюваного опору. Як видно, енергетичний спектр не є однаковим у всьому діапазоні частот і подібний до спектра флікер-шуму (зростає зі зниженням частоти). Отже, досліджуваний об’єкт (резистор) не перебуває у стані термодинамічної рівноваги, а, відтак, дисперсія (або стандартне відхилення результатів вимірювань σ_R) не змінюється, як випливає з (1). На рис. 4 наведено залежність нормованого стандартного відхилення результатів вимірювань $\sigma_{cp}/\sigma_{cp(N=1)}$ від кількості вимірювань за умови, що енергетичний спектр результатів вимірювань $S(f)$ має вигляд флікер-шуму FN (2); для порівняння наведено залежність $\sigma_{cp}/\sigma_{cp(N=1)}$ за умови, що $S(f)$ має вигляд “білого” шуму WN (рівноважна система) (1) і поєднання “білого” шуму і флікер-шуму $WN+FN$.

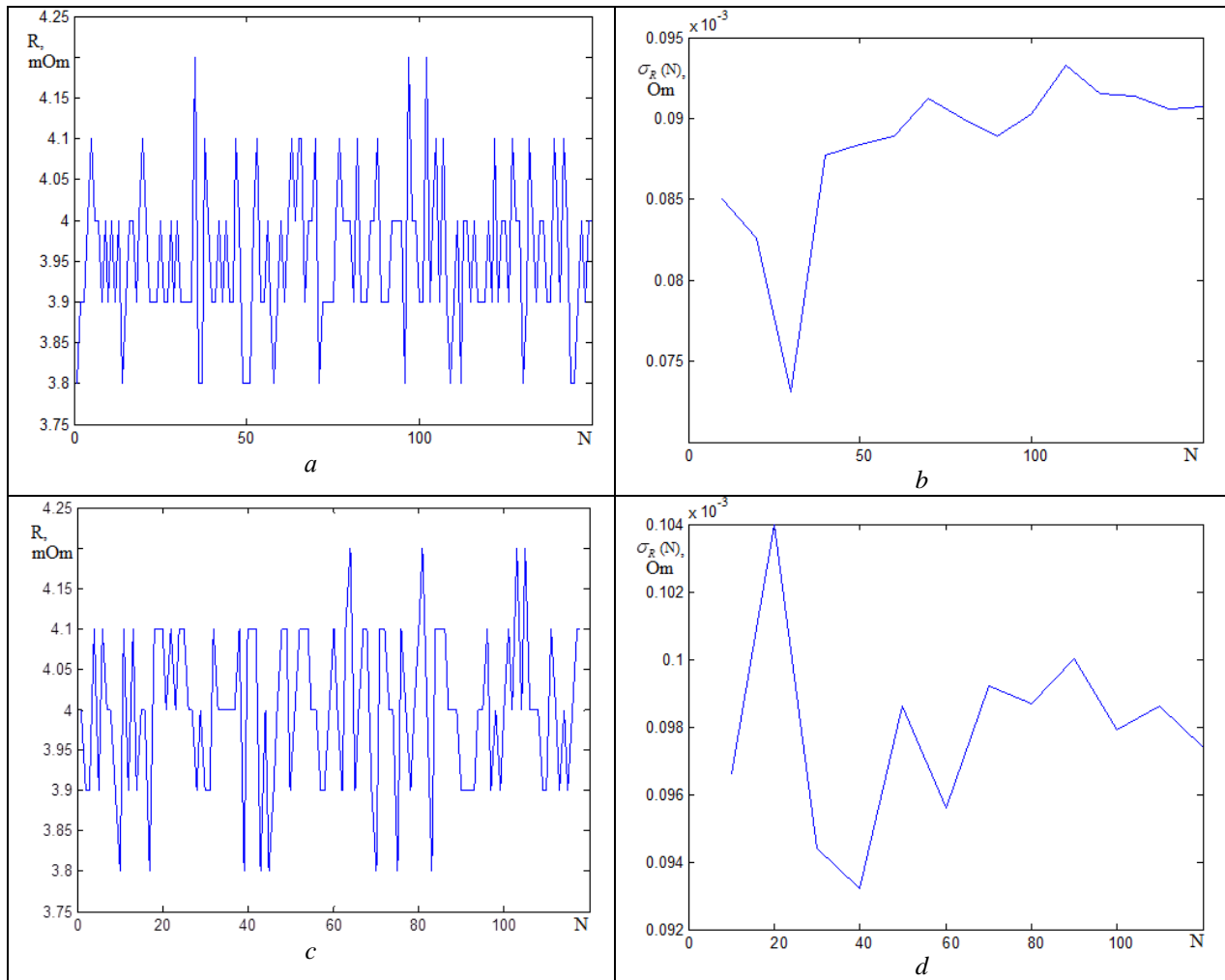


Рис. 2. Флуктуації показів приладу BR2820 LCR Meter (a, c) і залежність стандартного відхилення від кількості показів $\sigma_R(N)$ (b, d)

Figure 2. Fluctuations of the instrumentation BR2820 LCR Meter (a, c) and the dependence of the standard deviation on the number of measurements $\sigma_R(N)$ (b, d)

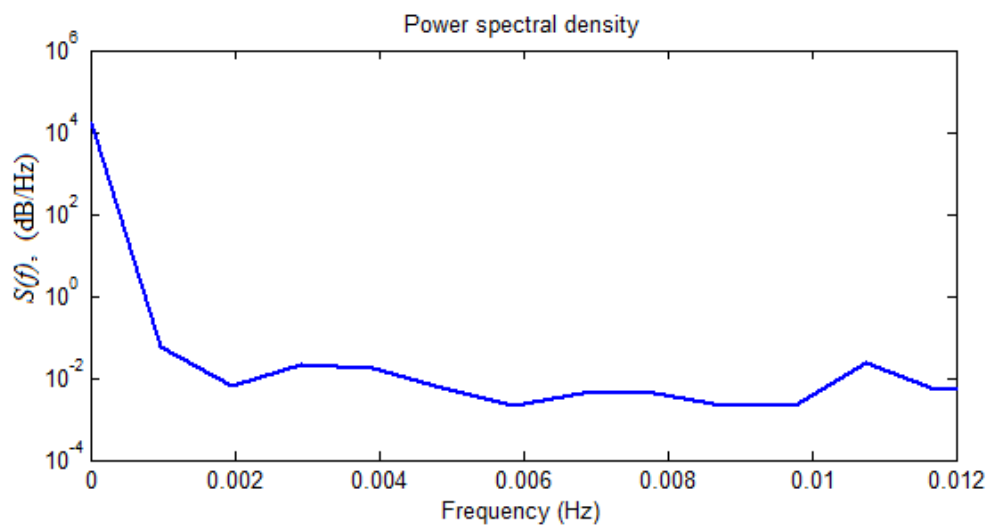


Рис. 3. Енергетичний спектр флуктуацій вимірюваного опору
 Figure 3. Energy spectrum of measured resistance fluctuations

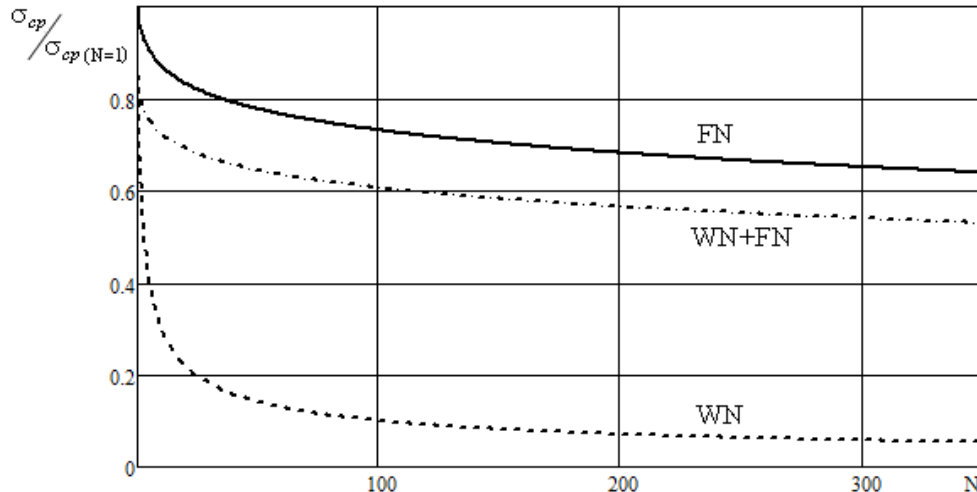


Рис. 4. Залежність нормованого стандартного відхилення результатів вимірювань від кількості вимірювань:
 WN – “білий” шум; FN – флікер-шум; WN+FN – “білий” шум і флікер-шум

Figure 4. The dependence of the normalized standard deviation of measurement results on the number of measurements at WN is “white” noise, FN is flicker noise, WN + FN is “white” noise and flicker noise

Із рис. 4 видно, що усереднення 100 вимірювань приводить до зменшення стандартного відхилення вимірюваної величини $X(t)$ у десять разів, якщо енергетичний спектр флуктуацій її параметрів має вигляд “білого” шуму; до зменшення стандартного відхилення в $\approx 1,4$ разу, якщо енергетичний спектр має вигляд флікер-шуму; в $\approx 1,7$ разу, якщо енергетичний спектр має вигляд “білого” шуму і флікер-складової шуму.

Висновки

Визначене усередненням результатів вимірювань стандартне відхилення, а, відтак, і випадкову похибку, можна звести до як завгодно малого значення тільки у випадку, якщо спектр зміни вимірюваної величини є однаковим в діапазоні частот від $f \rightarrow 0$ аж до надвисоких частот. У реальних умовах спектр зміни вимірюваної величини подібний до флікер-шуму і випадкову похибку вимірювання не можна зменшити до як завгодно малого значення усередненням великої кількості результатів вимірювань. Тільки за умови дотримання співвідношення $T_{measmax} \approx M_{max}\tau$, де $T_{measmax}$ – час вимірювання флуктувальних параметрів реальної системи, τ – час релаксації цієї самої системи, M_{max} – кількість можливих способів, якими можна реалізувати рівноважний стан системи, випадкова похибка досягатиме мінімального значення. Під час подальших досліджень, зокрема комп’ютерного моделювання, можна перевірити справедливості співвідношення між часом вимірювання флуктувальних параметрів реальної системи $T_{measmax}$, кількістю способів, якими можна забезпечити

рівноважний стан системи M_{max} , і значенням випадкової похибки.

Подяка

Автори висловлюють глибоку вдячність колективу кафедри інформаційно-вимірювальних технологій Національного університету “Львівська політехніка” за посильну допомогу в здійсненні досліджень.

Конфлікт інтересів

Конфлікту інтересів під час написання, підготовки та опублікування статті не виникало, як і взаємних претензій співавторів.

Література

- [1] И. Горбань, “Оценка статистически непредсказуемых изменений физических величин на больших интервалах наблюдения”, *Журнал технической физики*, т. 88, вып. 12, с. 1779–1786, 2018.
- [2] И. Горбань, *Феномен статистической устойчивости*. Київ, Україна: Наукова думка, 2014.
- [3] I. Gorban, *The statistical stability phenomenon*. Springer, 2017.
- [4] И. Горбань, *Случайность и гиперслучайность*. Київ, Україна: Наукова думка, 2016.
- [5] I. Gorban, *Randomness and hyper-randomness*. Springer, 2018.
- [6] В. Еськов, Т. Гавриленко, В. Еськов и др., “Феномен статистической неустойчивости систем третьего типа-complexity”, *Журнал технической физики*, т. 87, вып. 11, с. 1609–1614, 2017.
- [7] И. Горбань, “Феномен статистической устойчивости”, *Журнал технической физики*, т. 59, вып. 3, с. 22–30, 2014.

[8] H. Nyquist, “Thermal agitation of electric charge in conductors”, *Phys. Rev.*, vol. 32, no. 1, p. 110–113, 1928.

[9] Z. Kolodiy, B. Stadnyk, S. Yatsyshyn, “Development of Noise Measurements. Part 2. Random Error”, *Sensors & Transducers*, vol. 151, iss. 4, pp. 107–112, 2013.

[10] Z. Kolodiy, S. Yatsyshyn, “Entropy of Measurements of Electric and Non-electric Systems Fluctuating Parameters”, *Journ. Electr. Res. & Appl.*, vol. 2, iss. 3, pp. 26–30, 2018.

References

[1] I. Gorban, “Evaluation of statistically unpredictable changes in physical quantities over large observation intervals”, *Journ. Techn. Phys.*, vol. 88, iss. 12, p. 1779–1786, 2018.

[2] I. Gorban, *The phenomenon of statistical stability*, Kyiv, Ukraine: Scientific thought, 2014.

[3] I. Gorban, *The statistical stability phenomenon*, Springer, 2017.

[4] I. Gorban, *Randomness and hyper-randomness*, Kyiv, Ukraine: Scientific thought, 2016.

[5] I. Gorban, *Randomness and hyper-randomness*. Springer, 2018.

[6] V. Eskov, T. Gavrilenko, V. Eskov and al., “The phenomenon of statistical instability of systems of the third type-complexity”, *Journ. Techn. Phys.*, vol. 87, iss. 11, p. 1609–1614, 2017.

[7] I. Gorban, “The phenomenon of statistical stability”, *Journ. Techn. Phys.*, vol. 59, iss. 3, p. 22–30, 2014.

[8] H. Nyquist, “Thermal agitation of electric charge in conductors”, *Phys. Rev.*, vol. 32, no. 1, p. 110–113, 1928.

[9] Z. Kolodiy, B. Stadnyk, S. Yatsyshyn, “Development of Noise Measurements. Part 2. Random Error”, *Sensors & Transducers*, vol. 151, iss. 4, p. 107–112, 2013.

[10] Z. Kolodiy, S. Yatsyshyn, “Entropy of Measurements of Electric and Non-electric Systems Fluctuating Parameters”, *Journ. Electr. Res. & Appl.*, vol. 2, iss. 3, p. 26–30, 2018.