УДК 539.3

М.А. Сухорольський, Н.М. Тимошенко, Л.П. Швець
Національний університет “Львівська політехніка”,
вул. С. Бандери, 12, 79013, м. Львів, Україна

ДО ПОБУДОВИ СПРОЩЕНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК

Побудова математичних моделей теорії оболонок ґрунтується на формулюванні в межах загальнішої теорії деформування тонкостінного пружного тіла (зокрема, просторової теорії пружності) крайових задач з малими параметрами і наближенні шуканих величин послідовностями частинних сум рядів за однією з координат або за малими параметрами. Одержана за цим способом система диференціальних рівнянь і умов складає відповідну спрощену математичну модель деформування тонкостінного пружного тіла.

В роботі, ґрунтуючись на класичній математичній моделі згину пластинки розглянуто схему побудови спрощеної математичної моделі згину пластинки з використанням наближення невідомих функцій послідовностями часткових сум рядів за малим параметром, що відповідає гіпотезі малості нормальних жорстких поворотів.

За вихідну приймаємо математичну модель Тимошенка згину трансверсально-ізотропної пластинки [1]:

рівняння рівноваги

$$\partial M_{i1}/\partial x_1 + \partial M_{i2}/\partial x_2 - Q_i = -m_i\,,\ \partial Q_1/\partial x_1 + \partial Q_2/\partial x_2 = -q\,, \tag{1}$$

фізичні рівняння

$$M_{ii} = D\left(\partial\gamma_i/\partial x_i + \nu\partial\gamma_j/\partial x_j\right),\ Q_i = \Lambda\left(\gamma_i + \partial w/\partial x_i\right), \tag{2}$$

$$M_{ij} = D(1-\nu)/2\left(\partial\gamma_i/\partial x_j + \partial\gamma_j/\partial x_i\right)\ \left(i, j = 1{,}2,\ i \neq j\right). \tag{3}$$

Характерними при згині пластинки (поперечними силами) є малі жорсткі повороти (відносно нормалі до пластинки) в порівнянні з іншими деформаціями, $2\omega_3 = \partial\gamma_2/\partial x_1 - \partial\gamma_1/\partial x_2$, тобто, крайова задача (1), (2), (3) при відповідних граничних умовах містить неявно малий параметр.

Реалізуємо гіпотезу про нехтовну малість нормальних жорстких поворотів. Спочатку, вводячи у рівняння (3) і, відповідно, крайову задачу малий параметр $\alpha = 2/[D(1-\nu)]$, а також функції H_{ij} (реакції на жорсткий поворот), запишемо ці рівняння у вигляді:

$$M_{ij} = D(1-\nu)\partial\gamma_i/\partial x_j + H_{ij},\ H_{21} = -H_{12}\,,\ \alpha H_{12} = \partial\gamma_2/\partial x_1 - \partial\gamma_1/\partial x_2\,. \tag{4}$$

Потім, апроксимуючи шукані величини крайової задачі з малим параметром послідовностями часткових сум рядів за цим параметром, одержимо спрощені математичні моделі деформування пластинки. Відповідна вироджена система рівнянь при $\alpha = 0$ також є спрощеною математичною моделлю деформування пластинки з відсутніми нормальними жорсткими поворотами. При цьому останнє рівняння (4) запишеться у вигляді $\partial\gamma_2/\partial x_1 - \partial\gamma_1/\partial x_2 = 0$. Задовольнимо його, прийнявши $\gamma_i = -\partial\gamma/\partial x_i$. Тоді система рівнянь (1) –(4) зведеться до таких ключових рівнянь

$$D\Delta\Delta\gamma = q + \partial m_1/\partial x_1 + \partial m_2/\partial x_2\,,\ \Lambda\Delta(\gamma - w) = q\,. \tag{5}$$

Для побудови розв’язків крайових задач, сформульованих для рівнянь (5) ефективно можна використати математичний апарат теорії аналітичних функцій.

1. *Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. – К.: Наук. думка, 1977. -182 с.*