УДК 519.62

Р.В. Слоньовський, І.Є. Тесак
Національний університет “Львівська політехніка”,
вул. С. Бандери 12, 79013, м. Львів, Україна

СТІЙКИЙ БАГАТОКРОКОВИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЖОРСТКИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 2-ГО ПОРЯДКУ

Для задачі

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \text{ де } x \in [x_0, X_k], \tag{2}$$

побудуємо багатокрокову апроксимацію розв’язку в деякій вузловій точці $x_{n+1} = x_n + h$ на прикладі методів третього, четвертого порядків у вигляді

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{[k]} &= R(z)y_n + A_0(z)(hy'_n - zy_n) + B_0(z)\left(h^2 y''_n - hzy'_n\right) + \ldots \\ &+ A_k(z)(hy'_{n-k} - zy_{n-k}) + B_k(z)\left(h^2 y''_{n-k} - hzy'_{n-k}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

де $z = hJ_n$, J_n – матриця Якобі правої частини системи (1); R, A_i, B_j – матриці розмірності заданої системи рівнянь.

$R(z)$ – матриця, що є оператором переходу при розв’язуванні лінійної системи

$$y'' = \lambda y', \; \lambda < 0. \tag{4}$$

Структура матриці R визначається вимогами забезпечення стійкості при використанні перетворень Паде.

Для побудови вказаного методу необхідно визначити структуру всіх інших матричних коефіцієнтів, а також методику знаходження їх елементів. Вибір такої структури наближення обумовлений тим, що при дослідженні лінійних систем вигляду (4) вирази у дужках у співвідношенні (3) при коефіцієнтах A_i, B_i, де $i = \overline{0, k}$, перетворюються в нуль, що в свою чергу дозволяє будувати методи зазначеної структури з A чи L – стійкістю.

Введемо позначення $Q_4 = E - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2$ – матричний многочлен для $A-$ стійкого методу четвертого порядку точності. Тоді операторна функція переходу буде визначатися наступною структурою:

$$R(z) = \left(E + \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2\right) \Big/ Q_4, \tag{5}$$

а матричні коефіцієнти відповідно

$$A_i(z) = \left(a_{i1}E + b_{i1}z + c_{i1}z^2\right)/Q_4, \quad B_i(z) = (a_{i2}E + b_{i2}z)/Q_4, \tag{6}$$

де a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} – скалярні коефіцієнти.

Для ілюстрування методики визначення вказаних скалярних величин на прикладі методу 4-го порядку у співвідношенні (3) покладемо $k = 4$, підставимо вирази (6) та здійснимо елементарні перетворення, замінюючи значення похідних першого та другого порядків у точках x_{n-i} розвиненням у ряд Тейлора відповідного порядку точності відносно вузла x_n. Після групування виразів відносно степенів z одержимо співвідношення, яке з урахуванням вимоги відсутності “паразитних” коренів, набуде вигляду

$$Q_4 y_{n+1}^4 = G_4(h, y_{n-i}, y'_{n-i}, y''_{n-i}),$$

з якого й будуть визначені шукані скалярні коефіцієнти.