УДК 517.95

О.М. Медвідь, М.М. Симотюк
Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери 12, 79013, м. Львів, Україна
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, 79060, м. Львів, Україна

ЗАДАЧА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ДАНИМИ ДЛЯ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Нехай $G(k): Z^p \to R$ – така функція, що $G(k) \ge 1$ для всіх $k \in Z^p$ і $\lim_{|k|\to\infty} G(k) = \infty$. Через $W_{\alpha,\beta}(G)$ позначимо простір, одержаний поповненням множини скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ik, x)$ за нормою $\| \varphi; W_{\alpha,\beta} \| = \sqrt{\sum |\varphi_k|^2 G^{2\alpha}(k)\exp(2\beta G(k))}$. Через $S(G)$ позначимо множину псевдодиференціальних операцій (п.д.о.) $A(t, D_x)$, дія яких на функцію $u(t,x) = \sum_{k\in Z^p} u_k(t)\exp(ik,x)$, $x = (x_1,\dots x_p) \in \Omega_p \equiv (R/2\pi Z)^p$, визначається рівністю

$$A(t, D_x)u(t,x) = \sum_{k\in Z^p} A(t,k)u_k(t)\exp(ik,x), \quad A(t,k) \in C[0,T], \quad k \in Z^p,$$

причому послідовність амплітуд $\{A(t,k)\}_{k\in Z^p}$ є такою, що $\sup_{k\in Z^p} \| A(t,k) \|_{C[0,T]} / G(k) < \infty$.

Нехай $A_j(t, D_x) \in S(G)$, $j = 1,2$. Через $f_{j,q}(t,k)$, $j,q = 1,2$, $k \in Z^p$, позначимо розв'язки таких задач Коші: $f_{j,q}''(t,k) + A_j(t,k) f_{j,q}(t,k) = 0$, $f_{j,q}^{(r-1)}(0,k) = \delta_{q,r}$, $q,r = 1,2$, де $\delta_{q,r}$ – символ Кронекера.

Розглянемо таку задачу:

$$\partial^2 u(t,x)/\partial t^2 + A_1(t, D_x)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega_p, \qquad (1)$$

$$\int_0^{t_1} f_{2,j}(t, D_x)u(t,x)dt = \varphi_j(x), \quad j = 1,2, \quad x \in \Omega_p, \qquad (2)$$

де $f_{2,j}(t, D_x)$, $j = 1,2$, – п.д.о., амплітудами яких є функції $f_{2,j}(t,k)$, $j = 1,2$, $k \in Z^p$. Позначимо: $\Delta(k) = \det \| \int_0^{t_1} f_{1,j}(t,k) f_{2,q}(t,k)dt \|_{j,q=1}^2$, $A_j = \left(1 + \sup_{k\in Z^p} \| A_j(t,k) \|_{C[0,T]}^2\right)^{1/2} / G(k)$, $j = 1,2$.

Теорема 1. Нехай $A_j(t, D_x) \in S(G)$, $j = 1,2$, і нехай для всіх $k \in Z^p$ виконується нерівність

$$|\Delta(k)| \ge CG^{-\gamma}(k)\exp(-\delta G(k)), \quad C > 0, \ \gamma,\delta \in R, \qquad (3)$$

Якщо $\varphi_1, \varphi_2 \in W_{\alpha_1,\beta_1}(G)$, $\alpha_1 \ge \alpha + \gamma + 1$, $\beta_1 \ge \beta + \delta + (A_1 + A_2)T$, то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з простору $C^2([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G))$, який неперервно залежить від φ_1, φ_2.

Теорема 2. Нехай $A_j(t, D_x) \in S(G)$, $j = 1,2$, і $\sum_{k\in Z^p} G^{-\lambda}(k)\exp(-\mu G(k)) < \infty$ для деяких сталих λ, μ. Тоді для довільного $\rho \in (0,1]$ нерівність (3) виконується для майже всіх (стосовно ρ-міри Гаусдорфа) чисел $t_1 \in (0,T]$ і для всіх $k \in Z^p$, якщо

$$\gamma \ge ((4\lambda + 7)\rho + 3(\lambda+1))/\rho^2, \quad \delta \ge (A_1 + 2A_2)T + ((6A_1 + 17A_2)T + 4\mu)/\rho + 3(2A_2T + \mu)/\rho^2.$$

Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект № 29.1/005).

1. *Медвідь О.М., Симотюк М.М. Задача з інтегральними умовами для псевдодиференціальних рівнянь // Наук. вісн. Чернівецького нац. ун-ту. Сер. Математика, 2004. – Вип. 191–192. – С. 109–116.*