УДК 517.948.32

Є.М. Луцев
Національний університет „Львівська політехніка”,
вул. С. Бандери, 12, 79013, м. Львів, Україна

ЗБІЖНІСТЬ КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

До інтегрального рівняння

$$u(x,y) = f(x,y) + \iint_D K(x,y,s,t)u(s,t)dsdt \tag{1}$$

застосовується колокаційно-ітеративний метод, суть якого полягає в наступному. При умові, що $u_{k-1}(x,y)$ обчислено $(u_0(x,y) = f(x,y))$, в k-ому наближенні покладаємо

$$u_k(x,y) = f(x,y) + \iint_D K(x,y,s,t)\{u_{k-1}(s,t) + w_k(s,t)\}dsdt\,, \tag{2}$$

$$w_k(s,t) = \sum_{i=0}^{N_1}\sum_{j=0}^{N_2} a_{ij}^k s^i t^j\ ,k=1,2,3,\ldots \tag{3}$$

Невідомі параметри a_{ij}^k на кожній ітерації визначається з умови колокації

$$w_k(s_l,t_m) = u_k(s_l,t_m) - u_{k-1}(s_l,t_m), \quad l = \overline{O,N_1},\, m = \overline{O,N_2} \tag{4}$$

на деякій системі точок $\{s_l,t_m\}$, які називаються вузлами колокації. Збіжність колокаційно-ітеративного методу встановлює наступна

ТЕОРЕМА. Нехай:

1. Рівняння (1) має єдиний розв’язок.
2. Область D прямокутник: $a_1 \le x \le b_1, \quad a_2 \le y \le b_2$.
3. Вільний член $f(x,y)$ неперервна функція в області D.
4. Для любої неперервної функції $V(x,y)$

$$\max_{x,y\in D}\left|\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\iint_D K(x,y,s,t)V(s,t)dsdt\right| \le B\|V(x,y)\|$$

$m,\ n \ge 1$, $\boldsymbol{B}$ – стала, $\|\,\boldsymbol{.}\,\|$ – норма в простори $L_{2,\rho}(D)$.

5. Вузли колокації $\{s_l,t_m\}$ вибираються, як корні многочленів степені N_i+1, ортогональних на $[a_i,b_i]$ з вагою $\rho_i(x_i), \quad i=1,2$,тоді існують такі номери N_1, N_2 при яких колокаційно-ітеративний метод (2) – (4) рівномірно збігається і швидкість збіжності має вигляд

$$\max_{x,y\in D}\left|\frac{\partial^{l_1+l_2}}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}[u(x,y) - u_k(x,y)]\right| \le \varepsilon_{N_1N_2}\left(\frac{A_1}{N_1^{m_1}} + \frac{A_2}{N_2^{m_2}}\right)^{k-1}$$

$0 \le l_i \le m_i$, A_i – сталі, які не залежать від N_i $\quad \varepsilon_{N_1N_2} \to 0$, якщо $N_i \to \infty, \quad i=1,2$.