УДК 512.64

М.І. Кучма
Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери 12, 79013, м. Львів, Україна

СИМЕТРИЧНІ МАТРИЦІ І ЇХ ФАКТОРИЗОВАНІСТЬ НАД КІЛЬЦЯМИ З ІНВОЛЮЦІЯМИ

Нехай K – комутативна область головних ідеалів з інволюцією ∇, визначеною в [1], і перенесеною на кільце матриць $M_n(K)$ так [2]: $A^{\nabla} = \|a_{ij}\|^{\nabla} = \|a_{ji}{}^{\nabla}\|$.

В [3] для матриць $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ з $M_{2^n}(K)$ визначена симплектична інволюція так:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_4{}^* & -A_2{}^* \\ -A_3{}^* & A_1{}^* \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де A_i^* знову визначаються згідно з (1) вже в кільці $M_{2^{n-1}}(K)$.

У кільці матриць $M_{2n}(K)$ інволюцію змішаного типу можна задати таким чином

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^{\#} = \begin{pmatrix} A_4{}^{\nabla} & -A_2{}^{\nabla} \\ -A_3{}^{\nabla} & A_1{}^{\nabla} \end{pmatrix}.$$

Матрицю $A \in M_n(K)$ називатимемо ∇ – симетричною, якщо $A^{\nabla} = A$. Аналогічно, матрицю $A \in M_{2^n}(K)$ назвемо *–симетричною, якщо $A^* = A$, а $A \in M_{2n}(K)$ – #– симетричною, якщо $A^{\#} = A$.

Теорема 1. Для довільної матриці $A \in M_{2^n}(K)$ з інволюціями *, # і тотожною інволюцією ∇ і для матриці $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ виконується рівність

$$A^* = (-1)^{n-1}(E \otimes J^{\otimes(n-1)})A^{\#}(E \otimes J^{\otimes(n-1)}),$$

де E – одинична матриця другого порядку, $J^{\otimes(n-1)} = \underbrace{(J \otimes \ldots \otimes (J \otimes J))}_{n-1}$.

Лема. Для довільної матриці A з кільця $M_{2n}(K)$ з інволюцією # і одиничної матриці E порядку $2n$ мають місце рівності: $(A \otimes E)^{\#} = A^{\#} \otimes E$, $(E \otimes A)^{\#} = (E \otimes A)^{\nabla}$, причому, якщо $A^{\#} = A^{\nabla}$, то $(E \otimes A)^{\#} = E \otimes A^{\#}$.

Теорема 2. Для #– симетричної матриці $A(x) \in M_{2^n}(C[x])$ існує факторизація $A(x) = B(x)C(x)B(x)^{\#}$, де $B(x)$ – регулярна матриця, тоді і лише тоді, коли з матриці $(E \otimes J^{\otimes(n-1)})A(x)^*$ одночасно виділяється лівий регулярний множник $B(x)$ і правий регулярний множник $B(x)^*$.

1. *Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А., Скорняков Л.А., Шестаков И.П. Общая алгебра. Т.1. М.: Наука, 1990. –592 с.*
2. *Любачевский Б.Д. Факторизация симметрических матриц с элементами из кольца с инволюцией. I. // Сибирск. матем. журн. -1973. Вип. 14, № 3. –С. 337-356.*
3. *Зеліско В.Р., Сенькусь Л.Р. Про інволюції в кільцях матриць // Вісн. львівського ун-ту. -1998. –Вип. 49. –С.42-45.*