УДК 513.832:513.835

З.І. Крупка, І.Я. Олексів
Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери, 12, 79013, м. Львів, Україна

ВЛАСТИВОСТІ МІРИ МНОЖИН РІВНЯ ПІДМНОЖИН ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

Розглядаємо обмежену множину M в евклідовому просторі E^n. Множина M_r точок простору, які знаходяться на відстані r від M, називається r-рівнем множини M. У доповіді встановлюються властивості множин r-рівнів множини M.

Якщо множину M можна помістити в кулю радіуса r_0, то для $r > r_0$ множина M_r є зіряною відносно центра кулі. У цьому випадку для кожної точки $x \in M_r$ існує такий окіл U точки x, що множина $U \cap M$ є графіком функції від ($n-1$)-ої змінної, для якої виконується умова Ліпшица зі сталою, яка залежить лише від чисел r і r_0. Тому, якщо $r > r_0$, то множину M_r можна подати як об'єднання скінченої кількості множин, які є графіками ліпшицевих функцій від $n-1$ змінних. Звідси випливає, що ($n-1$)-міра Хаусдорфа $H_{n-1}(M_r)$ множини M_r є скінченною, якщо $r > r_0$.

Якщо тепер $r < r_0$, то обмежену множину M розбиваємо на скінченну кількість множин $M^1,...,M^k$ діаметра, меншого за r: $M = \bigcup_{i=1}^{k} M^i$. Оскільки $M_r \subset \bigcup_{i=1}^{k} (M^i)_r$, то міра $H_{n-1}(M_r) \le \sum_{i=1}^{k} H_{n-1}((M^i)_r)$ є скінченною для кожного $r > 0$.

У доповіді встановлено також властивості функції $H_{n-1}(M_r)$.

Теорема 1. Якщо множина $M \subset E^n$ розташована в n-вимірній кулі радіуса r_0 і $r > r_0$, то $H_{n-1}(M_r) \le A_n r^{n-1}$, де A_n – стала, яка залежить лише від розмірності простору E^n.

Теорема 2. Якщо M – обмежена множина в просторі E^n, то для всіх досить малих значень r виконується нерівність $H_{n-1}(M_r) \le \dfrac{A}{r}$, де стала A залежить лише від розмірності простору E^n і діаметра множини M; більше того, виконується також співвідношення $\lim_{r \to 0} rH_{n-1}(M_r) = 0$.