УДК 517.576

О.Г. Орищин, Д.М. Білонога
Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери, 12, 79013, м. Львів, Україна

ЗБІЖНІСТЬ ЧАСТКОВИХ СУМ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Нехай $H(\Lambda)$ – клас абсолютно збіжних у всій площині рядів Діріхле $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n e^{z\lambda_n}$ де $\Lambda=(\lambda_n)$, $0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow\infty$ $(n\to+\infty)$. Нехай L – клас додатних неперервних на $[0,+\infty)$ функцій, що зростають до $+\infty$; L_1 – клас функцій $h\in L$ таких, що $x=O(h(x))$ $(x\to+\infty)$, $h(0)=0$.

Для $\Phi\in L$ позначимо $H_1(\Lambda,\Phi)=\{F\in H(\Lambda):\ln\mu(\sigma,F)=O(\sigma F(\sigma))\ \ (\sigma\to+\infty)\}$.

Через $H_2(\Lambda,\Phi)=\{F\in H(\Lambda):(\exists\,\sigma_j\uparrow+\infty)\ \ (\ln\mu(\sigma_j,F)=O(\sigma_j\Phi(\sigma_j)))\}$, де $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n e^{\sigma\lambda_n}|:n\geq 0\}$. Через $H^+(\Lambda)$, $H_i^+(\Lambda,\Phi)$ позначимо відповідно класи цілих рядів Діріхле, для яких $a_0=1$, $a_n\geq 0$ $(n\geq 1)$.

Через Λ_1 позначаємо послідовність Λ, для якої

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda_n}{\ln n}\int_0^{\lambda_n}\frac{h(\ln n(t))}{t^2}dt=+\infty,$$

де $n(t)=\sum_{\lambda_n\leq t}1$ – лічильна функція послідовності (λ_n).

Через Λ_2 позначаємо послідовність Λ, для якої виконується умова

$$\sup\left\{\frac{\ln n(t)}{t}:t\geq x\right\}=O\left(\frac{\ln n(x)}{x}\right)\ \ (x\to+\infty).$$

Теорема. Нехай $h\in L_1$, $\Phi\in L$. Тоді для функції $F\in H^+(\Lambda)$ виконується співвідношення

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{h(\ln n)}\ln\frac{1}{\sigma_n(F)}=+\infty,$$

де $\sigma_n(F)=\max\left\{\frac{1}{S_n(x)}-\frac{1}{F(x)}:\ \ x\in R\right\}$, $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k e^{x\lambda_k}$, як тільки справджується хоча б одна з наступних трьох умов:

1) $\int_0^{+\infty}t^{-2}h(\ln n(t))dt<+\infty$;

2) $F\in H_1^+(\Lambda_2,\Phi)$ і $(\forall b>0)$: $\underline{\lim}_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{b\Phi(x)}t^{-2}h(\ln n(t))dt=0$;

3) $F\in H_2^+(\Lambda_2,\Phi)$ і $(\forall b>0)$: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{b\Phi(x)}t^{-2}h(\ln n(t))dt=0$.

1. *Sheremeta M.N. On the convergence rate of the partial sums of positive entere Dirichlet series //Anal. Math. -1991. V.17, №1. – P. 47-53.*