

Національний лісотехнічний університет України  
Міністерство освіти і науки України  
Національний університет «Львівська політехніка»  
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Левкович Мар'яна Володимирівна**

УДК 004.942:674.047

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙНИХ  
І ТЕПЛОМАСООБМІННИХ ПРОЦЕСІВ У СЕРЕДОВИЩАХ  
З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи  
«05 – Технічні науки»

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 М. В. Левкович

Науковий керівник:

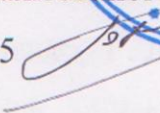
**Соколовський Ярослав Іванович**  
доктор технічних наук, професор

*Ідентичність всіх примірників дисертації*

**ЗАСВІДЧУЮ:**

Вчений секретар спеціалізованої

вченої ради Д 35.052.05

 /Р. А. Бунь/

Львів - 2019



## АНОТАЦІЯ

*Левкович М.В.* Математичне моделювання деформаційних і тепломасообмінних процесів у середовищах з фрактальною структурою. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Національний університет «Львівська політехніка», Міністерство освіти і науки України, Львів, 2019.

Підготовка здійснювалась на кафедрі інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України Міністерства освіти і науки України.

Спеціалізована вчена рада Д35.052.05 при Національному університеті «Львівська політехніка» Міністерства освіти і науки України.

Дисертаційна робота присвячена актуальному науковому завданню – підвищенню ефективності математичного моделювання процесів тепломасоперенесення та в'язко-пружного деформування деревини з врахуванням ефекту «пам'яті» та самоорганізації у процесі сушіння для забезпечення відповідної якості висушеного матеріалу.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету та завдання дисертаційної роботи, відзначено наукову новизну та практичну цінність отриманих результатів, наведено відомості про особистий внесок здобувача та апробацію одержаних результатів дисертаційної роботи.

У першому розділі проведено аналіз розвитку дробового інтегро-диференціального апарату та його використання для моделювання прямих та обернених задач у різних галузях науки, зокрема процесів в'язко-пружної деформації та тепломасоперенесення під час сушіння капілярно-пористих матеріалів. Вчені F. Mainardi, I. Podlubny, В. Учайкин, В. Васильев, С. Самко, А. Бутковский, Н. Вірченко, Г. Лопушанська, П. Костробій, А. Нахушев, Odibat, Р. Нигматуллин, Friedrich, Miller and Boss, Oldham and Spanier, Chen and Moore,

Ahmad and Sivasundaram застосовували нецілочисельне інтегро-диференціювання до моделювання систем, яким характерні біологічна мінливість реологічних властивостей, ефекти «пам'яті», структурна неоднорідність, просторова не локальність, детермінований хаос та самоорганізація. Неоднозначність застосування математичного апарату дробових операторів інтегрування та диференціювання пояснюється відсутністю явної фізичної, геометричної та ймовірнісної інтерпретацій таких операцій, накладанням властивостей нецілочисельного апарату диференціювання та різних підходів до його визначення – Рімана-Ліувілля, Капуто, Грюнвальда-Летнікова, Вейля, Маршо, Рісса, Райта.

Дослідження деформаційно-релаксаційних процесів у працях С.В. Ерохіна, Е.Н. Огородникова, В.П. Радченко, М. Javidі, S.W. Welch показали, що застосування дробового інтегро-диференціального апарату для таких процесів дозволяє більш адекватно, виходячи з фізичних міркувань, узагальнювати експериментальні дані для ідентифікації параметрів моделей. Зокрема праці Я.І. Соколовського та В.М. Шиманського присвячено дослідженням в умовах регулярного та нерегулярного режимів процесу сушіння капілярно-пористих матеріалів, що дає можливість враховувати ефекти «пам'яті» та самоорганізації деревини. На початковому етапі знаходяться дослідження, присвячені питанням пошуку ефективного методу ідентифікації фрактальних параметрів моделей, зокрема у частково це відображено у роботах В.П. Голуб, С.В. Ерохіна та А.С. Овсиенко.

Праці Б.І. Гайвась, Б.Н. Уголева, М.В. Дендюка та Г.С. Шубина присвячено розробленню математичних моделей неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів під час сушіння. Для розв'язку математичних моделей тепло-масоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою використовують і аналітичні, і чисельні методи реалізацій. У працях Р.П. Мейланова, Л.А. Фильштинського, У. Povstenko, В.У. Datsko, L. Kexue та Я.Д. П'янило найбільшу перевагу для аналізу та виведення самих дробових інтегро-диференціальних рівнянь надають аналітичним методам, наприклад: інтегральний метод перетворення Лапласа,

Мелліна, Фур'є, функції Гріна, спектральний метод з використанням многочленів Лагерра. Проте, оскільки аналітичні методи є обмежено застосованими, то більш ефективними та простішими у застосуванні є чисельні методи, зокрема метод скінченного елемента та скінченних різниць. Використання скінченно-різницевої апроксимації для реалізації математичних моделей, що забезпечує врахування ерідитарності та самоорганізації матеріалу, у своїх працях застосовували В.Д. Бейбалаев, А.К. Баззаев, Ф.И. Таукенова, В. Головизин, V.E. Lynch, I. Turner, Q. Liu та F. Liu.

У результаті проведеного аналізу можна зазначити, що використання нецілочисельного інтегро-диференціювання для моделювання деформаційних та тепло-масообмінних процесів, зокрема під час сушіння капілярно-пористих матеріалів, дає можливість описати нові властивості матеріалу, такі як ефекти «пам'яті», самоорганізації, неоднорідності структури та її самоподібності.

У другому розділі побудовано двовимірну математичну модель тепломасоперенесення капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, у процесі сушіння, що описується взаємозв'язаною системою диференціальних рівнянь у частинних похідних із дробовим порядком за часом та просторовими координатами. Побудована математична модель дає можливість досліджувати ефекти «пам'яті», самоорганізації та просторової нелокальності, анізотропію теплофізичних характеристик для періоду сталої та падаючої швидкості процесу сушіння. Встановлено умови стійкості для різницевої схеми зв'язаного тепломасоперенесення та показано, що у випадку цілочисельних параметрів отримані умови співпадають із умовами стійкості та збіжності для класичних рівнянь теплопровідності. Розроблено алгоритм чисельної реалізації математичної моделі, що ґрунтується на використанні методу предиктор-коректор та скінченно-різницевої різниць.

У третьому розділі використовуючи методи механіки спадкових середовищ та дробовий інтегро-диференціальний апарат, побудовано одновимірну математичну модель Кельвіна капілярно-пористих матеріалів з урахуванням

фрактальної структури під час сушіння та наведено дробово-диференціальні аналоги моделей Максвелла та Фойгта.

У четвертому розділі побудовано двовимірні в'язко-пружні моделі у середовищах з фрактальною структурою, що дозволяють розширити множину її реалізацій у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, з врахуванням початкового значення навантаження, вологості та температури, анізотропії тепломеханічних та реологічних характеристик, самоорганізації, структурної неоднорідності та ефекту «пам'яті» матеріалу. Розроблено алгоритм чисельного методу реалізації отриманої моделі та адаптовано метод розчеплення двовимірних дробово-диференціальних ядер, що дозволяють враховувати під час сушіння у деревині залишкові та в'язко-пружні значення напруження.

У п'ятому розділі встановлено закономірності моделювання процесів тепло- та вологоперенесення, в'язко-пружного деформування деревини з врахуванням ефектів «пам'яті» та самоорганізації під час сушіння, розроблено алгоритм ідентифікації дробово-диференціальних моделей та наведено його результати. Для ідентифікації фрактальних параметрів реологічних моделей капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння було використано метод Проні та ітераційний метод. Застосування ітераційного методу включає два етапи. На першому етапі приймаючи, що параметри  $\alpha, \beta$  функції деформації цілочисельні, на основі методу найменших квадратів здійснюється пошук початкового значення напруження, часу релаксації, модуля пружності. Отримані результати ідентифікації на першому етапі враховуються при наступному етапі, де значення дробово-диференціальних параметрів отримуються шляхом мінімізації виразів, що описують закон повзучості для реологічних моделей. Для уточнення ідентифікованих параметрів використано метод покоординатного спуску.

Встановлено наступні закономірності: не залежно від породи деревини з врахуванням її фрактальної структури температура на кінці бруска зростає швидше, ніж у центрі; через неоднорідність структури капілярно-пористого

матеріалу з ефектами «пам'яті» та самоорганізації із нижчою базисною густиною нагрівається швидше та має суттєвіший вплив на динаміку зміни температури та вологості на відміну від твердих порід деревини; зменшення параметрів  $\alpha, \beta$  моделі тепломасоперенесення призводить до пришвидшення процесу вологовиділення. Проведено верифікацію та валідацію отриманих результатів шляхом порівняння із експериментальними даними динаміки температури та вологовмісту деревини у процесі сушіння.

Встановлено, що для порід деревини із більшою пружністю ефект пам'яті спостерігається в більшій мірі та доля залишкових деформацій під час сушіння у них менша на відміну від хвойних порід. Окрім цього, зміна лише одного параметра реологічної моделі на нецілочисельний, призводить до зменшення деформації, зокрема найбільш виражено це відбувається на породах деревини із меншим модулем пружності. Встановлені закономірності співставлені із результатами, одержаними іншими дослідниками у часткових випадках та відомими теоретичними даними, звідки можна зробити висновки про адекватність моделей та методів їх реалізації.

Одержані в роботі результати використано для розрахунку тепломасообмінних та деформаційно-релаксаційних процесів під час конвективного сушіння деревини з урахуванням її властивостей еридитарності та самоорганізації, що дозволяє підвищити якість висушеної деревини за рахунок прогнозування пружних та залишкових значень напружень, розроблення композитних матеріалів на основі деревини.

*Ключові слова:* математична модель, дробовий інтегро-диференціальний апарат, фрактальна структура, деформаційні процеси, тепломасоперенесення, ефект «пам'яті», ідентифікація фрактальних параметрів, процес сушіння.

## **ПЕРЕЛІК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

*Наукові праці, у яких опубліковано основні наукові результати дисертації*

1. Sokolovsky Yu., Levkovych M. Two-dimensional mathematical models of visco-elastic deformation using a fractional differentiation apparatus // International Journal

- of Modern Education and Computer Science. 2018. Vol. 10, No. 4. P. 1-9.
2. Mathematical models of biophysical processes taking into account memory effects and self-similarity / Ya. Sokolovsky, M. Levkovich, O. Mokrytska, Ya. Kaplunsky // Informatics & Data-Driven Medicine. 2018. Vol. 2255. P. 215-228. ISSN: 1613-0073 (SCOPUS).
  3. Левкович М.В. Алгоритм ідентифікації дробово-експоненціальних ядер повзучості за експериментальними даними // Науковий вісник НЛТУ України. 2016. Вип. 26.1. С. 382-386.
  4. Соколовський Я.І., Москвітіна М.В. Математичне моделювання деформаційно-релаксаційних процесів з використанням похідних дробового порядку // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: Комп'ютерні науки та інформаційні технології : зб. наук. пр. 2015. № 826. С. 175-184.
  5. Соколовський Я.І., Левкович М.В. Чисельний метод дослідження неізотермічного вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: Комп'ютерні науки та інформаційні технології : зб. наук. пр. 2016. № 843. С. 288-296.
  6. Соколовський Я., Яркун В., Левкович М. Алгоритмічне та програмне забезпечення для дослідження неізотермічного вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою // Науковий вісник НЛТУ України. 2016. Вип. 26.7. С. 308-318.
  7. Sokolovsky I., Levkovich M., Mokrytska O. Numerical modeling and analysis of physical properties in biomaterials with fractal structure // Informatics & Data-Driven Medicine. 2018. Vol. 2255. P. 180-192. ISSN: 1613-0073 (SCOPUS).
  8. Соколовський Я., Москвітіна М. Числовий метод дослідження теплообміну на підставі похідних дробового порядку // Технічні вісті. 2015. 1(41), 2(42). С. 12-15.

***Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації***

9. Sokolovsky Ya., Shymanskyi V., Levkovich M. Mathematical modeling of non-isothermal moisture transfer and visco-elastic deformation in the materials with fractal

- structure // Computer Science and Information Technologies ‘CSIT 2016’ : proc. of the 11th Intern. Sci. and Techn. Conf., 6-10 Sept. 2016. Lviv, 2016. P. 91-95. (SCOPUS)
10. Mathematical and software providing of research of deformation and relaxation processes in environments with fractal structure / Ya. Sokolovskyy, V. Shymanskyi, M. Levkovich, V. Yarkun // Computer Science and Information Technologies ‘CSIT 2017’: proc. of the 12th Intern. Sci. and Techn. Conf., 5-8 Sept. 2017. Lviv, 2017. P. 24-27. (SCOPUS)
  11. Numerical simulation and analysis of systems with memory based on integro-differentiation of fractional order / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, Ya. Kaplunskyy // Computer Science and Information Technologies ‘CSIT 2018’: proc. of the 13th Intern. Sci. and Techn. Conf., 11-14 Sept. 2018. Lviv, 2018. P. 102-105. (SCOPUS, WEB of SCIENCE).
  12. Mathematical modeling of two-dimensional deformation-relaxation processes in environments with fractal structure / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, V. Atamanyuk // 2nd International Conference on Data Stream Mining and Processing ‘DSMP 2018’ : proc., 21-25 Aug., 2018. Lviv, 2018. P. 375-380. (SCOPUS).
  13. Mathematical modeling of heat and moisture transfer and reological behavior in materials with fractal structure using the parallelization of predictor-corrector numerical method / Ya. Sokolovskyy, V. Shymanskyi, M. Levkovich, V. Yarkun // 1st International Conference on Data Stream Mining and Processing : proc., 23-27 Aug., 2016. Lviv, 2016. P. 108-111. (SCOPUS)
  14. Mathematical modeling of visco-elastic state of materials with fractal structure // Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, V. Kryshtapovich // The Experience of Designing and Application of CAD System in Microelectronics ‘CADSM 2017’ : proc. of 14th Intern. Conf., 21-25 Feb., 2017. Lviv, Polyana, 2017. P. 35-38. (SCOPUS)
  15. Mathematical modeling of anisotropic visco-elastic environments with memory based on integro-differentiation of fractional order / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, V. Atamanyuk // Advanced Trends in Radioelectronics,



- Telecommunications and Computer Engineering 'TCSET 2018' : proc. of 14th Intern. Conf., 20-24 Feb., 2018. Lviv, Slavske, 2018. P. 816-820. (SCOPUS)
16. Чисельне моделювання двовимірного тепломасоперенесення на підставі похідних дробового порядку / Я.І. Соколовський, М.В. Левкович, В.І. Яркун, Ю.Т. Ликтей, Р.П. Стельмах // 18-th International Conference on System Analysis and Information Technology, May 30 – June 2, 2016. Kyiv, 2016. С. 158-161.
  17. Чисельне моделювання тепломасоперенесення в середовищах з фрактальною структурою з використанням розпаралелювання / Я.І. Соколовський, В.І. Яркун, М.В. Левкович, Р.П. Стельмах // 14 Міжнародна науково-практична конференція. «Математичне та імітаційне моделювання систем». Київ, Жукін, 2016. С. 75-78.
  18. Моделювання неізотермічного вологоперенесення та деформування у середовищах з використанням алгоритмів розпаралелювання / Я.І. Соколовський, В.М. Шиманський, М.В. Левкович, В.І. Яркун // IV Науково-технічна конференція «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації». Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка НАН України, 2016. С. 88-92.
  19. Чисельне моделювання тепломасоперенесення у середовищах з фрактальною структурою / Я.І.Соколовський, М.В.Левкович, О.П.Герасимчук, В.І.Яркун // III Міжнародна конференція з автоматичного управління та інформаційних технологій 'ICASIT-2015', 11-13 грудня 2015 р. Київ: НТУУ КПІ, 2015. С. 41-43.
  20. Чисельне моделювання теплообмінних процесів з використанням похідних дробового порядку / Я.І.Соколовський, М.В.Москвітін, А.В.Нечепуренко, І.Б.Борецька // X Міжнародна науково-практична конференція «Математичне та імітаційне моделювання систем», 22-26 червня 2015. Чернігів, 2015. С. 45-49.
  21. Математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів з використанням похідних дробового порядку / Я.І.Соколовський, М.В.Москвітін, І.Б.Борецька, В.І.Яркун // Праці IV Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки», 26-29.05. 2015. Чернівці, 2015. С. 43-45.
  22. Соколовський Я.І., Левкович М.В. Математичні моделі нерівноважних фізичних процесів з урахуванням ефекту «пам'яті» та самоорганізації // Сучасні проблеми

прикладної математики та інформатики: Матеріали XXIV Всеукраїнської наукової конференції. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2018. С. 143-147.

### **ABSTRACT**

*Levkovych M.V.* Mathematical modeling of deformation and heat and mass transfer processes in environments with fractal structure. – Qualifying scientific work on the rights of manuscripts.

Dissertation for obtaining the lowest degree of the candidate of technical sciences (doctor of philosophy) in specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – National University "Lviv Polytechnic", Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2019.

The training was carried out at the Department of Information Technologies of the National Forestry University of Ukraine of the Ministry of Education and Science of Ukraine.

Specialized Academic Council D35.052.05 at the National University of Lviv Polytechnic of the Ministry of Education and Science of Ukraine.

The dissertation is devoted to the actual scientific task – to increase the efficiency of mathematical modeling of heat and mass transfer processes and visco-elastic deformation of wood taking into account the effect of "memory" and self-organization in the drying process to provide the appropriate quality of the dried material.

The introduction substantiates the relevance of the research topic, formulates the purpose and objectives of the dissertation, points out the scientific novelty and the practical value of the results obtained, provides information on the individual contribution of the applicant and the testing of the results of the dissertation.

The first section analyzes the development of fractional integro-differential apparatus and its use for modeling of direct and inverse problems in various branches of science, in particular processes of visco-elastic deformation and heat transfer during the drying of capillary-porous materials. Scientists F. Mainardi, I. Podlubny, V. Uchaikin, V. Vasiliev, S. Samko, A. Butkovsky, N. Virchenko, G. Lopushanska,

P. Kostrobay, A. Nakhushev, R. Nigmatullin, Odibat, Friedrich, Miller and Boss, Oldham and Spanier, Chen and Moore, Ahmad and Sivasundaram, used non-integer integro-differentiation to model systems that are characterized by the biological variability of rheological properties, memory effects, structural heterogeneity, spatial non-locality, deterministic chaos, and self-organization. The ambiguity of the application of the mathematical apparatus of fractional operators of integration and differentiation is due to the absence of explicit physical, geometric and probabilistic interpretations of such operations, the overlapping of the properties of a non-integer apparatus of differentiation, and various approaches to its definition – Riemann-Liouville, Caputo, Grunwald-Letnikov, Weyl, Marcho, Ries and Wright .

Investigation of deformation-relaxation processes in the works of S.V. Erokhina, E.N. Ogorodnikova, V.P. Radchenko, M. Javidi, S.W. Welch showed that the use of fractional integro-differential apparatus for such processes allows more adequately based on physical considerations generalize experimental data to identify model parameters. In particular, the works of Ya.I. Sokolovsky and V.M. Shymansky are investigated in the conditions of the regular and irregular modes of the process of drying of capillary-porous materials, which enables to take into account the effects of "memory" and the self-organization of wood. At the initial stage, research is devoted to the search for an effective method for the identification of fractal parameters of models, in particular in some cases it is reflected in works by V.P. Golub, S.V. Erokhina and A.S. Ovsienko.

Works B.I. Guivas, B.N. Ugolev, M.V. Dandyuk, G.S. Shubin are devoted to the development of mathematical models of non-isothermal moisture transfer of capillary-porous materials during drying. To solve mathematical models of heat transfer and visco-elastic deformation in media with fractal structure, both analytical and numerical methods of realization are used. In the works of R.P. Meilanov, L.A. Filstinsky, Y. Povstenko, B.Y. Datsko, L. Kexue and Ya. Pjanylo the greatest advantage of analyzing and eliminating the fractional integro-differential equations was to give impetus to analytical methods such as: the integral method of the Laplace,

Mellin, Fourier transform, the Green's function, the spectral method using polygons of Lagerra. However, since analytical methods are limited in use, numerical methods are more effective and easier to apply, including finite element method and finite difference. The use of finite-difference approximations for the realization of mathematical models, which provides for the consideration of the eradicity and the material self-organization, was used in his writings by V.D Beybalaev, A.K. Bazzayev, F.I. Tauenkov, V. Golovzin, V.E. Lynch, I. Turner, Q. Liu and F. Liu.

As a result of the analysis, it can be noted that the use of non-integral integro-differentiation for the simulation of deformation and heat-mass exchange processes, in particular during the drying of capillary porous materials, makes it possible to describe new properties of a material such as the effects of "memory", self-organization, heterogeneity of structure and its self-similarity.

In the second section we construct a two-dimensional mathematical model of heat-mass transfer of capillary-porous materials, in particular wood, in the process of drying, which is described by the interconnected system of differential equations in partial derivatives with fractional order in time and spatial coordinates. The simulated mathematical model makes it possible to investigate the effects of "memory", self-organization and spatial non-locality, anisotropy of thermophysical characteristics for the period of steady and falling speed of the drying process. The stability conditions for the difference scheme of the coupled heat transfer mass are established and it is shown that in the case of integer parameters the conditions obtained coincide with the conditions of stability and convergence for the classical heat equations. An algorithm for numerical implementation of a mathematical model based on the use of the predictor-corrector method and finite-difference differences is developed.

In the third section, using the methods of the genetics of hereditary environments and fractional integro-differential apparatus, a one-dimensional mathematical model of Kelvin's capillary-porous materials is constructed, taking into account the fractal structure during drying, and the fractional-differential equivalents of the Maxwell and Voigt models are given.

In the fourth section, two-dimensional visco-elastic models are constructed in environments with a fractal structure, which allow to expand the plurality of its realizations in the process of drying capillary-porous materials, in particular wood, taking into account the initial value of loading, humidity and temperature, anisotropy of thermoelectric and rheological characteristics, self-organization, structural heterogeneity and the effect of "memory" of the material. The algorithm of numerical method for realization of the obtained model is developed and the method of decoupling of two-dimensional fractional-differential nuclei is adapted, allowing to take into account, when drying in wood residual and visco-elastic values of stress.

In the fifth section the regularities of modeling of heat and moisture transfer processes, viscoelastic deformation of wood, taking into account the effects of "memory" and self-organization during drying, are developed, algorithm of identification of fractional-differential models is developed and its results are presented. To identify fractal parameters of rheological models of capillary-porous materials in the process of drying, the method of Proni and the iteration method was used. The use of the iterative method involves two stages. In the first stage, assuming that the parameters  $\alpha, \beta$  of the deformation function are integers, on the basis of the least squares method, the search for the initial value of the stress, relaxation time, and elastic modulus is performed. The results of identification at the first stage are taken into account at the next stage, where the values of fractional-differential parameters are obtained by minimizing the expressions that describe the law of creep for rheological models. In order to clarify the identified parameters, the method of coordinate descent is used.

The following regularities are established: regardless of the breed of wood, taking into account its fractal structure, the temperature at the end of the bar increases faster than in the center; due to the heterogeneity of the structure of the capillary-porous material, one can observe the process of deceleration of heating; wood with the effects of "memory" and self-organization with a lower basal density heats up faster and has a more significant effect on the dynamics of temperature and humidity changes,

as opposed to solid wood species; reduction of the parameters  $\alpha, \beta$  of the model of heat and mass transfer leads to an acceleration of the process of moist distribution. Verification and validation of the obtained results are carried out by comparison with experimental data of temperature dynamics and moisture content of wood during drying.

It is established that for wood species with greater elasticity, the memory effect is observed to a greater extent and the share of residual deformations during drying in them is less, in contrast to coniferous species. In addition, the change of only one parameter of the rheological model to non-integer, leads to a decrease in deformation, in particular, it is most pronounced on the rocks of wood with a lower modulus of elasticity. The established regularities are compared with the results obtained by other researchers in partial cases and the known theoretical data, from which one can draw conclusions about the adequacy of models and methods for their implementation.

The results obtained in the work are used to calculate heat and mass exchange and deformation-relaxation processes during convective drying of wood, taking into account its properties of erodicity and self-organization, which allows to improve the quality of dried wood due to prediction of elastic and residual stress values, and the development of composite materials on the basis of wood.

*Keywords:* mathematical model, fractional integro-differential apparatus, fractal structure, deformation processes, heat transfer, memory effect, identification of fractal parameters, drying process.

## **LIST OF PUBLICATIONS BY THE SUBJECTS OF DISSERTATION**

### ***Publications, in which the main scientific results of the dissertation are published***

1. Sokolovskyy Ya., Levkovich M. Two-dimensional mathematical models of visco-elastic deformation using a fractional differentiation apparatus // International Journal of Modern Education and Computer Science. 2018. Vol. 10, No. 4. P. 1-9.
2. Mathematical models of biophysical processes taking into account memory effects and self-similarity / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, Ya. Kaplunskyy //

- Informatics & Data-Driven Medicine. 2018. Vol. 2255. P. 215-228. ISSN: 1613-0073 (SCOPUS).
3. Levkovych M.V. An algorithm for the identification of fractional-exponential nuclei creep according to experimental data // Scientific Bulletin of NLTU of Ukraine. 2016. Vol 26.1. P.382-386.
  4. Sokolovsky Ya. I., Moskvitina M.V. Mathematical modeling deformation-relaxation processes using derivatives of fractional order // Bulletin of the National University "Lviv Polytechnic". Series: Computer Science and Information Technologies: Collection scientific work. 2015. No. 826. P. 175-184.
  5. Sokolovsky Ya. I., Levkovich M.V. Numerical method of research nonisothermal moisture transfer in environments with fractal structure // Bulletin of the National University "Lviv Polytechnic". Series: Computer Science and Information Technologies: Collection scientific work. 2016. № 843. P. 288-296.
  6. Sokolovsky Ya.I., Yarkun V.I., Levkovych M.V. Algorithmic and programmatic support for the study of non-isothermal moisture transfer in environments with fractal structure // Scientific herald of NLTU of Ukraine. 2016. Vol.26.7. P. 308-318.
  7. Sokolovskyy I., Levkovych M., Mokrytska O. Numerical modeling and analysis of physical properties in biomaterials with fractal structure // Informatics & Data-Driven Medicine. 2018. Vol. 2255. P. 180-192. ISSN: 1613-0073 (SCOPUS).
  8. Sokolovsky Ya., Moskvitina M. Numerical method of research of heat exchange on the basis of derivatives of fractional order // Technical reports. 2015. 1(41), 2(42). P. 12-15.

***Publications certifying the approbation of the materials of the dissertation***

9. Sokolovskyy Ya., Shymanskyi V., Levkovych M. Mathematical modeling of non-isothermal moisture transfer and visco-elastic deformation in the materials with fractal structure // Computer Science and Information Technologies 'CSIT 2016' : proc. of the 11th Intern. Sci. and Techn. Conf., 6-10 Sept. 2016. Lviv, 2016. P. 91-95. (SCOPUS)
10. Mathematical and software providing of research of deformation and relaxation processes in environments with fractal structure / Ya. Sokolovskyy, V. Shymanskyi, M. Levkovych, V. Yarkun // Computer Science and Information Technologies 'CSIT

- 2017': proc. of the 12th Intern. Sci. and Techn. Conf., 5-8 Sept. 2017. Lviv, 2017. P. 24-27. (SCOPUS)
11. Numerical simulation and analysis of systems with memory based on integro differentiation of fractional order / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, Ya. Kaplunskyy // Computer Science and Information Technologies 'CSIT 2018': proc. of the 13th Intern. Sci. and Techn. Conf., 11-14 Sept. 2018. Lviv, 2018. P. 102-105. (SCOPUS, WEB of SCIENCE).
  12. Mathematical modeling of two-dimensional deformation-relaxation processes in environments with fractal structure / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, V. Atamanyuk // 2nd International Conference on Data Stream Mining and Processing 'DSMP 2018' : proc., 21-25 Aug., 2018. Lviv, 2018. P. 375-380. (SCOPUS).
  13. Mathematical modeling of heat and moisture transfer and reological behavior in materials with fractal structure using the parallelization of predictor-corrector numerical method / Ya. Sokolovskyy, V. Shymanskyi, M. Levkovich, V. Yarkun // 1st International Conference on Data Stream Mining and Processing : proc., 23-27 Aug., 2016. Lviv, 2016. P. 108-111. (SCOPUS)
  14. Mathematical modeling of visco-elastic state of materials with fractal structure // Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, V. Kryshtapovich // The Experience of Designing and Application of CAD System in Microelectronics 'CADSM 2017' : proc. of 14th Intern. Conf., 21-25 Feb., 2017. Lviv, Polyana, 2017. P. 35-38. (SCOPUS)
  15. Mathematical modeling of anisotropic visco-elastic environments with memory based on integro-differentiation of fractional order / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, V. Atamanyuk // Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering 'TCSET 2018' : proc. of 14th Intern. Conf., 20-24 Feb., 2018. Lviv, Slavske, 2018. P. 816-820. (SCOPUS)
  16. Numerical modeling of two-dimensional heat-mass transfer on the basis of Derivatives of fractional order / Ya.I. Sokolovsky, M.V Levkovich, V.I. Yarkun, Yu.T. Lykтей, R.P. Stelmakh // 18th International Conference on System Analysis and Information Technology, May 30 – June 2. 2016. Kyiv, 2016. P. 158-161.



17. Numerical simulation of heat transfer in environments with fractal the structure using paralleling / Ya.I. Sokolovsky, V.I. Yarkun, M.V. Levkovich, R.P. Stelmakh / 14th International Scientific and Practical Conference. "Mathematical and Simulation Modeling Systems". Kyiv, Zhukin, 2016. P. 75-78.
18. Modeling of nonisothermal moisture transfer and deformation in environments using parallelization algorithms / Ya.I. Sokolovsky, V.M. Shymansky, M.V. Levkovich, V.I. Yarkun // IV Scientific and Technical Conference "Computational Methods and Systems for the Transformation of Information". Lviv: Physics and Mechanics Institute named after H.V. Karpenko of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2016. P.88-92.
19. Numerical simulation of heat transfer in environments with fractal structure / Ya.I. Sokolovsky, M.V. Levkovich, O.P. Gerasimchuk, V.I. Yarkun. // III International Conference of Automatic Control and Information Technologies 'ICACIT-2015', 11-13 December 2015. Kyiv, NTUU KPI, 2015. P. 41-43.
20. Numerical modeling of heat transfer processes using derivatives fractional order / Ya.I. Sokolovsky, M.V. Moskvitina, A.V. Nechepurenko, I.B. Boretska // X International scientific and practical conference "Mathematical and simulation modeling of systems", 22-26 June 2015. Chernigov, 2015. P. 45-49.
21. Mathematical models of deformation-relaxation processes using derivatives of fractional order / Ya. I. Sokolovsky, M.V. Moskvitina, I.B. Boretsky, V.I. Yarkun // Proceedings of the IV International Scientific and Practical Conference "Problems of Informatics and Computer Technology", 26-29.05. 2015. Chernivtsi, 2015. P. 43-45.
22. Sokolovsky Ya.I., Levkovich M.V. Mathematical models of non-equilibrium physical processes taking into account the effect "memory" and self-organization // Modern Problems of Applied Mathematics and Informatics: Materials of the XXIV All-Ukrainian Scientific Conference. Lviv: LNU the name Ivan Franko, 2018. P. 143-147.

## ЗМІСТ

|   |    |
|---|----|
| АНОТАЦІЯ.....   | 2  |
| ЗМІСТ.....  | 18 |
| ВСТУП.....  | 21 |
| РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО АПАРАТУ ТА ЙОГО<br>ВИКОРИСТАННЯ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В'ЯЗКО-ПРУЖНОЇ<br>ДЕФОРМАЦІЇ, ТЕПЛО- ТА ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ .....                   | 28 |
| 1.1. Математичний апарат дробових похідних.....   | 28 |
| 1.2. Аналіз одно- та двовимірних математичних моделей в'язкопружного<br>деформування у середовищах з фрактальною структурою.....  | 34 |
| 1.3. Аналіз дослідження неізотермічного тепло- та вологоперенесення<br>у середовищах з фрактальною структурою.....  | 38 |
| 1.4. Аналіз ідентифікації дробових інтегро-диференціальних параметрів<br>моделей в'язко-пружного деформування.....  | 45 |
| 1.5. Висновки до 1 розділу.....   | 49 |
| РОЗДІЛ 2. ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОМАСО-<br>ПЕРЕНЕСЕННЯ ПІД ЧАС СУШІННЯ КАПЛЯРНО-ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ<br>НА ПІДСТАВІ ДРОБОВОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО АПАРАТУ..... | 50 |
| 2.1. Постановка загальної математичної моделі тепло- та волого-перенесення у<br>середовищах з фрактальною структурою.....   | 50 |
| 2.2. Апроксимація фрактальних операторів.....   | 52 |
| 2.3. Чисельна реалізація математичної моделі неізотермічного волого-<br>перенесення із похідними дробового порядку.....   | 54 |
| 2.4. Алгоритмічна реалізація чисельного методу.....   | 60 |
| 2.5. Умови стійкості та збіжності.....  | 61 |
| 2.6. Висновки до 2 розділу .....  | 65 |
| РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ДЕФОРМАЦІЙНО-<br>РЕЛАКСАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ПІД ЧАС СУШІННЯ ДЕРЕВИНИ З<br>УРАХУВАННЯМ ЇЇ ФРАКТАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ.....                      | 67 |

|   |   |     |
|---|---|-----|
| 3.1.  | Дробово-диференціальна реологічна модель Фойгта.....  | 67  |
| 3.2.  | Дробово-диференціальна реологічна модель Кельвіна.....  | 72  |
| 3.3.  | Дробово-диференціальна реологічна модель Максвелла.....   | 75  |
| 3.4.  | Термодинамічні функції з урахуванням фрактальної структури матеріалу..  | 78  |
| 3.5.  | Висновки до 3 розділу.....  | 80  |
| <b>РОЗДІЛ 4. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ДЕФОРМАЦІЙНО-РЕЛАКСАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У СЕРЕДОВИЩАХ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ ПІД ЧАС СУШІННЯ ДЕРЕВИНИ.....</b>                 |   |     |
| 4.1.  | Загальна двовимірна дробово-диференціальна математична модель в'язко-пружного деформування у процесі сушіння деревини.....                              | 82  |
| 4.2.  | Дробово-диференціальна двовимірна модель Фойгта.....  | 85  |
| 4.3.  | Двовимірна дробово-диференціальна модель Кельвіна.....  | 87  |
| 4.4.  | Двовимірна дробово-диференціальна модель Максвелла.....   | 91  |
| 4.5.  | Чисельний метод розв'язку та алгоритм реалізації двовимірного в'язко-пружного процесу деформування деревини як середовища з фрактальною структурою..... | 93  |
| 4.6.  | Розщеплення двовимірних дробово-диференціальних ядер деревини.....  | 98  |
| 4.7.  | Висновки до 4 розділу.....  | 102 |
| <b>РОЗДІЛ 5. ЗАКОНОМІРНОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОМАСО-ПЕРЕНЕСЕННЯ ТА В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ДЕРЕВИНИ ВРАХОВУЮЧИ ЇЇ ФРАКТАЛЬНУ СТРУКТУРУ У ПРОЦЕСІ СУШІННЯ.....</b> |   |     |
| 5.1.  | Реологічні та теплофізичні характеристики деревини.....   | 103 |
| 5.2.  | Ідентифікація дробово-диференціальних параметрів математичних моделей в'язко-пружного деформування деревини під час сушіння.....                        | 105 |
| 5.2.1.  | Алгоритм ідентифікації з використанням методу Проні.....  | 105 |
| 5.2.2.  | Алгоритм ідентифікації параметрів дробово-диференціальних реологічних моделей ітераційним чисельним методом.....  | 108 |
| 5.2.3.  | Результати ідентифікації фрактальних параметрів реологічних моделей капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння.....                                | 112 |

|   |     |
|---|-----|
| 5.3. Інтерфейс прикладного програмного забезпечення для обчислення температури, вологовмісту та напружено-деформаційного стану деревини з врахуванням ефекту «пам'яті» та самоорганізації у процесі сушіння.....        | 119 |
| 5.4. Закономірності чисельного моделювання процесів тепло- та вологоперенесення у деревині під час сушіння враховуючи ефекти«пам'яті» та самоорганізації.....   | 122 |
| 5.5. Закономірності математичного моделювання деформаційно-релаксаційних процесів капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою під час сушіння.....   | 131 |
| 5.6. Висновки до 5 розділу.....   | 141 |
| ВИСНОВКИ.....   | 142 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....  | 145 |
| ДОДАТОК А. Експериментальні дані повзучості та схеми деформаційних перетворень деревини з врахуванням ефекту «пам'яті». Значення параметрів ідентифікації, коефіцієнта кореляції та оцінки розходження результатів..... | 168 |
| ДОДАТОК Б. Тепломеханічні характеристики деревини.....  | 175 |
| ДОДАТОК В. Лістинг програмного коду чисельної реалізації математичної моделі тепломасоперенесення у середовищах з фрактальною структурою.....   | 182 |
| ДОДАТОК Г. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.....   | 194 |
| ДОДАТОК Д. Акти впровадження результатів дисертаційної роботи.....  | 198 |

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Технологічний процес сушіння капілярно-пористих матеріалів характеризується впливом на матеріал одразу кількох факторів – навантаження, вологості та температури. Зміна хоча б одного з них у капілярно-пористому матеріалі, до якого належить деревина, призводить до утворення деформацій та їх переходу з одного виду у інші, що зумовлює повне чи часткове відновлення початкового фізичного стану. Така здатність матеріалу характеризує наявність ефекту «пам'яті», що є заснований на залишкових деформаціях. Окрім залишкової «пам'яті», деревина як складний природний полімерний матеріал характеризується стохастичною неоднорідністю структури та значною мінливістю реологічних властивостей. Досліджувати вище наведені властивості у капілярно-пористих матеріалах, а також детермінований хаос, складну природу просторових кореляцій та самоорганізацію дозволяє математичний апарат дробових інтегро-диференціальних операторів. Саме на такому підході повинне базуватися розроблення математичних моделей процесів в'язко-пружного деформування та тепло-масоперенесення у середовищах з фрактальною структурою під час сушіння деревини. На сьогодні досить не значна кількість праць присвячена питанням розроблення алгоритмічного та програмного забезпечення для дослідження процесів деформування та неізотермічного волого-перенесення, враховуючи властивості ерідитарності та самоорганізації капілярно-пористих матеріалів, що дає змогу оцінити залишкові та пружні значення напруження під час сушіння.

За цих умов *актуальним є наукове завдання* підвищення ефективності математичного моделювання процесів тепло-масоперенесення та деформування деревини з урахуванням ефекту «пам'яті» та самоорганізації у процесі сушіння для зменшення залишкових напружень у деревині й визначення такого напружено-деформаційного стану, який не перевищує границі міцності матеріалу.

### **Зв'язок роботи із науковими програмами, планами, темами.**

Результати представлених досліджень виконані у межах науково-дослідних робіт Національного лісотехнічного університету України, а саме:

- “Математичне і програмне забезпечення автоматизації розрахунку багатофазних термодинамічних систем”, № держреєстрації 0110U000657, 2011–2012 рр.;
- “Програмно-алгоритмічні засоби та інформаційні технології автоматизації досліджень енерго-ефективних процесів сушіння деревини”, № держреєстрації 0113U001268, 2013–2014 рр.;
- “Математичне моделювання нерівноважних деформаційно-релаксаційних і тепло-масообмінних процесів у середовищах з фрактальною структурою”, № держреєстрації 0115U002316, 2015–2017 рр.

У межах перелічених науково-дослідних робіт автором розроблено математичні моделі деформаційних і тепло-масообмінних процесів у середовищах з фрактальною структурою, адаптовано чисельний метод їх реалізації, розроблено алгоритм ідентифікації та встановлено закономірності процесів теплоперенесення, деформації і напруження деревини під час сушіння.

### **Мета і завдання дослідження.**

Метою роботи є побудова та дослідження математичних моделей деформаційно-релаксаційних, волого- та теплообмінних процесів під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням їхньої фрактальної структури, розроблення скінченно-різницевої схем для апроксимації цих математичних моделей. Для поставленої мети необхідно було розв'язати такі завдання:

- побудувати математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів на підставі дробового інтегро-диференціального апарату в процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів;
- синтезувати двовимірну математичну модель неізотермічного вологоперенесення з урахуванням ефектів «пам'яті» та самоорганізації матеріалу під час сушіння деревини;

- отримати аналітичні розв'язки та розробити алгоритм чисельного методу реалізації математичних моделей в'язко-пружної деформації у процесі сушіння деревини з урахуванням фрактальної структури;

- розробити алгоритмічне та програмне забезпечення для реалізації математичної моделі процесу тепло- та вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою;

- здійснити ідентифікацію дробово-диференціальних параметрів реологічних моделей за експериментальними даними повзучості деревини;

- встановити закономірності процесів тепломасоперенесення і деформування деревини у процесі сушіння, враховуючи ефекти «пам'яті» та самоорганізації.

*Об'єкт дослідження* – процеси деформування та тепло-масоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою під час сушіння.

*Предмет дослідження* – математичні моделі та методи аналізу в'язко-пружних і тепло-масообмінних процесів з урахуванням ефектів пам'яті та структурної неоднорідності капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, під час сушіння.

### **Методи дослідження.**

У дисертаційній роботі використано методи досліджень:

- методи механіки спадкових середовищ, математичної фізики та апарату дробового інтегро-диференціювання для побудови математичних моделей;

- інтегральний метод перетворення Лапласа для відшукування аналітичних розв'язків математичних моделей в'язко-пружної деформації;

- скінченно-різницеві схеми з використанням методу предиктор-коректор для чисельної реалізації математичної моделі неізотермічного вологоперенесення;

- метод умовного задання відомих функцій та метод інтеграла Фур'є для визначення умов стійкості різницевих схем;

- метод Проні, ітераційний метод та покоординатного спуску для ідентифікації фрактальних параметрів моделей.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає у такому:

- вперше побудовано двовимірні математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів під час сушіння капілярно-пористих матеріалів, котрі відрізняються від відомих наявністю дробово-диференціальних параметрів, які дають можливість оцінити залишкові та пружні значення деформацій під час сушіння деревини, а також враховувати ефекти «пам'яті» та самоорганізації, анізотропію реологічних та теплофізичних характеристик матеріалу;
- вперше розроблено двовимірну математичну модель неізотермічного вологоперенесення у процесі сушіння деревини з урахуванням дробового інтегро-диференціального апарату, що дає можливість розширити множину її реалізацій шляхом врахування ефекту «пам'яті» форми та структурної неоднорідності капілярно-пористого матеріалу для періоду сталої та падаючої швидкостей сушіння;
- вперше отримано різницеві схеми для апроксимації двовимірної математичної моделі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння, та для їх реалізації адаптовано метод предиктор-коректор із встановленням умов стійкості, що забезпечує врахування еридитарності та самоорганізації деревини під час сушіння;
- адаптовано метод розщеплення двовимірних ядер повзучості для дробово-диференціальних реологічних моделей під час сушіння капілярно-пористих матеріалів, який дозволив за експериментальними даними для одновимірних моделей визначити функцію швидкості об'ємної та зсувної повзучості, здійснити ідентифікацію фрактальних параметрів, враховуючи пружні та залишкові деформації у процесі сушіння деревини;
- встановлено нові закономірності тепло-масообмінних та деформаційних процесів з урахуванням фрактальної структури деревини під час сушіння, що дають можливість враховувати ефекти «пам'яті» та самоорганізації матеріалу залежно від породи, тепломеханічних характеристик, технологічних параметрів агента сушіння, напряму анізотропії для періоду сталої та падаючої швидкості сушіння.



**Практичне значення одержаних результатів.** Розроблено алгоритм чисельної реалізації моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у двовимірній області на підставі дробового інтегро-диференціального апарату в процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів. Для врахування ефекту «пам'яті» та самоорганізації, а також визначення такого напружено-деформаційного стану, який би не перевищував границі міцності матеріалу та підвищував його якості у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, розроблено алгоритм ідентифікації фрактальних параметрів реологічних моделей. Розроблено програмне забезпечення для скінченно-різницевого розрахунку теплообмінних та деформаційно-релаксаційних процесів, унаслідок чого можливо проаналізувати динаміку зміни температури, вологовмісту та компонент напружено-деформаційного стану деревини під час сушіння враховуючи її фрактальну структуру та технологічні параметри періоду сталої та падаючої швидкості сушіння.

Одержані в роботі результати використано для розрахунку тепло-масообмінних та деформаційно-релаксаційних процесів під час конвективного сушіння деревини з урахуванням її властивостей еридитарності та самоорганізації, що дозволяє підвищити якість висушеної деревини на ВКФ «Ледас-Україна» (м. Хуст, Закарпатська область, акт від 23.08.2018 р.) шляхом прогнозування пружних та залишкових значень напружень, розроблення композитних матеріалів на основі деревини. Результати наукових досліджень використано у навчальному процесі кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України для викладання дисциплін: «Моделювання систем», «Математичне моделювання в інформаційних технологіях», «Чисельні методи», «Автоматизовані системи наукових досліджень», а також під час виконання бакалаврських і магістерських робіт за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» (акт від 17.05.2018 р.).

**Особистий внесок здобувача.** Усі наукові результати дисертаційної роботи належать особисто здобувачу. У роботах, опублікованих у співавторстві, автору

дисертації належать: [69, 70, 75, 77, 78, 185] – побудова двовимірних моделей в'язкопружної деформації в умовах неізотермічного вологоперенесення з урахуванням фрактальної структури капілярно-пористих матеріалів під час сушіння, отримання аналітичних розв'язків представлених моделей та алгоритму чисельної реалізації; [71, 72, 74, 76, 184, 187, 189] – дослідження та розроблення одновимірних моделей деформаційно-релаксаційних процесів під час сушіння деревини на підставі похідних дробового порядку; [57, 72, 74, 180, 191-195, 196] – побудова математичної моделі тепломасоперенесення у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням ефектів «пам'яті» та самоорганізації, розроблення скінченно-різницевої схем для апроксимації та алгоритму чисельної реалізації отриманої моделі; встановлення умов стійкості; [70, 73, 78, 141, 180] – ідентифікація дробових інтегро-диференціальних параметрів реологічних моделей за експериментальними даними повзучості деревини, встановлення закономірностей процесів деформування та тепло-і вологоперенесення під час сушіння деревини.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювалися на:

- 14-th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering ‘TCSET-2018’ (Lviv, 2018);
- XI, XII and XIII International Scientific and Technical Conferences “Computer Science and Information Technologies” ‘CSIT’ (Lviv, 2016, 2017, 2018);
- I-st and II-nd International Conferences “Data Stream Mining & Processing” ‘DSMP’ (Lviv, 2016, 2018);
- 18-th International Conference on System Analysis and Information Technology ‘SAIT-2016’ (Kyiv, 2016);
- 14-th International Conference “The Experience of Designing and Application of CAD System in Microelectronics” ‘CADSM-2017’ (Lviv, 2017);
- IV Міжнародній науково-практичній конференції «Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки» ‘ПІКТ-2015’ (Чернівці, 2015);

- III Міжнародній конференції з автоматичного управління та інформаційних технологій ‘ICASIT-2015’ (Київ, 2015);
- X Міжнародній науково-практичній конференції «Математичне та імітаційне моделювання систем» ‘МДС’ (Чернігів, 2015);
- 14 Міжнародній науково-практичній конференції “Математичне та імітаційне моделювання систем” ‘МОДС’ (Київ, Жукін, 2016);
- XXIV Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» ‘APAMS-2018’ (Львів, 2018);
- 1-st International Workshop on Informatics & Data-Driven Medicine (Львів, 2018);
- Науково-практичних конференціях професорсько-викладацького складу Національного лісотехнічного університету України в період 2015–2018 рр.

**Публікації.** Основні результати досліджень опубліковані у 22 працях, зокрема: 8 статей [57, 69, 78, 141, 180, 187, 195, 196], у тому числі 6 статей у наукових фахових виданнях [69, 78, 141, 180, 187, 195]; 14 публікацій у матеріалах наукових конференцій; праці [57, 69, 70-72, 74-77] включено до наукометричної бази Scopus.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертаційна робота загальним обсягом 202 сторінки складається зі вступу, анотації, п’яťох розділів, висновків, списку використаних джерел із 209 найменувань та п’яťох додатків. Основний текст викладено на 124 сторінках. Робота містить 29 рисунків.

## РОЗДІЛ 1

# АНАЛІЗ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО АПАРАТУ ТА ЙОГО ВИКОРИСТАННЯ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ, ТЕПЛО- ТА ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ

Цей розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню дробового інтегро-диференціального апарату, його розвитку та використання для моделювання, знаходження алітичних та чисельних розв'язків у різних галузях науки, зокрема для моделювання процесів в'язко-пружної деформації та тепломасоперенесення під час сушіння капілярно-пористих матеріалів. Здійснено огляд літератури, у котрій досліджено класичні та з використанням фрактального аналізу процеси деформації та неізотермічного вологоперенесення. Також розглянуто дробово-диференціальний апарат з точки зору оберненої задачі – ідентифікації. Досліджено, що математичний апарат дробових похідних та інтегралів, а також його застосування для моделювання складних систем, дозволяють краще описати моделі реального світу.

### 1.1. Математичний апарат дробових похідних та інтегралів

Поняття нецілочисельного диференціювання та інтегрування виникло із зародженням самого апарату диференціального числення. Історією зафіксовано, що перша спроба використання дробового диференціювання міститься у переписці Г. Лейбніца та Я. Бернуллі [177]. Математики роздумували чи буде мати зміст теорема про диференціювання двох функцій у випадку дробової похідної. Математичний апарат дробового диференціювання та інтегрування на сьогодні є дуже добре розвинений та пов'язаний з іменами Л. Ейлера, П. Лапласа, Ж. Фур'є, Н. Абеля, Ж. Ліувілля, А. Грюнвальда, А. В. Летнікова, Б. Рімана, Г. Вейля, Ж. Адамара, Кобера, Лава, Фішера та іншими вченими минулого та сьогодення. Властивості та визначення дробового інтегро-диференціювання описані та досліджені у працях [59, 108, 109, 177, 201].

Дробові похідні та інтеграли володіють своєю специфікою, яка проявляється, наприклад, у тому, що для них у різних ситуаціях виникають різноманітні їхні модифікації [177]. Взаємозв'язок та відношення між цими модифікаціями є предметом дослідження, які вивчаються та аналізуються. На сьогодні дробовий інтегро-диференціальний апарат добре розвинутий та використовується для пояснення, моделювання складних систем у природі. Розвитком ідеї дробового інтегро-диференційованого апарату до моделювання складних систем у світі займається чимало наукових шкіл, які пов'язані з іменами: F. Mainardi [47], I. Podlubny [59], В. Учайкина [201], А. Нахушева [151], Р. Нигматуллина [153], К. Miller and В. Ross [53], К. Oldham and J. Spanier [58], С. Friedrich [18], Y. Chen and K. Moore [8], В. Ahmad and S. Sivasundaram [1] та інших. Така особлива увага та зацікавленість до використання нецілочисельного інтегро-диференціювання пояснюється тим, що математичний апарат диференціювання та інтегрування дробового порядку дозволяє моделювання різних процесів та систем, для яких характерні ефекти пам'яті, просторової не локальності та самоорганізації. Особливою перевагою моделей дробово-диференціального типу на відміну від цілочисельних є можливість описати та дослідити більш точно моделі реального світу, що володіють вказаними вище характеристиками та ефектами.

Фрактальні інтегро-диференціальні параметри успішно застосовуються у таких галузях як фізика [3, 13, 23, 68, 90], біологія [66, 67, 89], хімія та біохімія [88], гідрологія [5, 36], медицина [15, 22], техніка [45, 46], фінанси [21, 86]. У праці [201] надається неповний перелік задач, де рівняння з дробовими похідними успішно застосовуються та є ефективними, зокрема у самій роботі розглядаються такі задачі у фрактальних середовищах як: механіка, в'язкопружність, дифузія у пористому середовищі, термодинаміка, діалектрики, напівпровідники, електротехніка, турбулентність, плазма, нанофізика та космофізика. Зокрема, у галузі фізики дробові просторові похідні використовуються для моделювання аномальної дифузії або дисперсії [23].

Вважається, що наявність у рівняннях дробової похідної по часі інтерпретується як відображення особливої властивості процесу – пам'яті (еридитарності), а у випадку стохастичного процесу – немарковості [188]. Дробові похідні за просторовими координатами відображають самоподібну неоднорідність структури чи середовища, у якому розвивається процес. Такі структури називаються фракталами [201].

Аналіз наукових джерел свідчить про те, що визначення похідних дробового порядку базується в основному на двох підходах [188]. Перший базується на узагальненні відомої формули Коші, яка дозволяє звести багатократний інтеграл цілого порядку до однократного [10, 177] та інші. Другий підхід розвинутий у працях [107, 141] і узагальнений у [61, 107] щодо визначення дробової похідної через границю скінченно-різницевого відношення. Також відомі ряд узагальнень та модифікацій таких підходів [9, 91]. Властивості дробового інтегродиференціювання у рамках цих підходів досліджені та описані у [40-42, 47, 53, 59, 85, 108, 109, 112, 151, 166, 177, 201].

Основною відмінністю дробових похідних від цілочисельних є їх нелокальність, тобто залежність результатів диференціювання від значень функцій у всіх точках деякого відрізка або числової прямої, а не від значень функцій у точках із малого околу даної точки – як у випадку звичайного диференціювання. Також відомі дослідження щодо узагальнення дробових операторів диференціювання, зокрема у [43, 83] дробовий порядок описується функцією часу, а в [79] випадковою величиною.

Характерною особливістю дробових операторів диференціювання та інтегрування є відсутність явної фізичної та геометричної інтерпретації таких операцій [188]. Існують декілька підходів до вирішення даної проблеми, які умовно можна поділити на три напрямки: ймовірнісний, геометричний та фізичний [59, 112, 151, 201]. Автори останніх двох підходів з використанням класичної фрактальної геометрії будують аналогію у відношенні до операцій диференціювання цілого порядку. Зокрема, робиться спроба обґрунтування змісту

дробових похідних з використанням зв'язку між дробовими операторами і фракталами у термінах операцій, що задаються на фрактальних багатооб'єктах [188]. У [201] визначення фрактала базується на розмірності Хаусдорфа-Безиковича та вважаються такими множинами розмірність котрих не співпадає з їхньою топологічною розмірністю. Термін «фрактал» був введеним американським математиком Бенуа Мандельбротом [50]. Саме геометричний аспект фрактальної концепції став рушійною силою для розповсюдження фрактальних моделей у різних галузях науки. Однією із основних причини такого розвитку та поширення цих ідей є комп'ютер, адже неперервне вдосконалення комп'ютерних технологій породжує все нові технології, до котрих також належить фрактальний аналіз.

Варто також відмітити, що форми фрактальних структур складають враження деякої альтернативної геометрії, оскільки можуть бути подібними то на сніжинки, то на листя клена тощо. Описати такі форми аналітичними засобами не можливо, саме тому фрактальна геометрія є у таких випадках допоміжною та ефективною. Множини Жюліа, Мандельброта, фрактальний пил Фату, фазові портрети хаотичної динаміки [161] – неповний перелік множин алгоритмів генерації фрактальних структур. У роботах [24, 48] використовується фрактальна геометрія як інструмент ідентифікації відбитків пальців. За допомогою фрактальної теорії та теорії ігор хаосу у [24], представлений новий підхід до ідентифікації – метод ідентифікації Fractal Fingerprint System (FFIS).

Ймовірнісний підхід базується на аналізі статистичних розподілів «некласичної» поведінки. Фрактальноподібні системи володіють властивістю веріабельності (тобто зміна від одного екземпляра до іншого), що дає можливість розглядати стохастичні (випадкові) фрактали [201]. Стохастичний фрактал розуміється як нескінченні множини реалізацій із заданою на ній ймовірнісною мірою. У праці [201] також надається таке визначення статистики фракталів, а саме, що це негаусова статистика, в основі якої лежать стійкі розподіли, що є відмінними від нормального.

Фізичний підхід до визначення дробової похідної на сьогодні також як і її геометрична та ймовірнісна інтерпретації є неоднозначними. Зокрема I. Podlubny надає висновок про те, що «повна теорія дробових диференціальних рівнянь, особливо теорія крайових задач дробових диференціальних рівнянь», може бути розроблена лише з використанням як лівих, так і правих похідних. Такий висновок є ключовим для розробки фізичної інтерпретації для дробової просторової похідної. У [54] дробові похідні ідентифікуються як типовий інтеграл суперпозиції по просторовій області процесів дифузії Леві. Така інтерпретація не є очевидним узагальненням для всіх застосувань, вона вказує на пошук принципів суперпозиції при спробі дати фізичний зміст дробової похідної.

Наявність різних підходів до визначення дробових похідних породжують неоднозначність щодо коректності та фізичної осмисленості постановки початкових та граничних умов залежно від типу дробової похідної [188].

Важливим також є те, що дробові похідні та інтеграли, що входять у інтегродиференціальні рівняння та описують певний процес можуть вживатися у сенсі похідних Рімана-Ліувілля, Капуто, Райта, Вейля, Грюнвальда-Летнікова, Маршо.

Похідну Рімана-Ліувілля (додатнього порядку) функції  $f(x)$  можна записати [201]:

$${}_a f^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\nu\})} D_x^{[\nu]+1} \int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\{\nu\}}} d\xi, \quad (1.1)$$

де  $\{\nu\}$  дробова частина числа  $\nu$ ,  $0 \leq \{\nu\} < 1$ , так що  $\nu = [\nu] + \{\nu\}$ . В розгорнутому вигляді вираз для опису дробової похідної Рімана-Ліувілля як для від'ємних так і для додатних порядків записуються таким чином [201]:

$${}_a f^{(\nu)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^x (x-\xi)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi, \nu < 0; \\ \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} D_x \int_a^x (x-\xi)^{-\nu} f(\xi) d\xi, 0 \leq \nu < 1; \\ \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} D_x^2 \int_a^x (x-\xi)^{-\nu+1} f(\xi) d\xi, 1 \leq \nu < 2. \end{cases} \quad (1.2)$$



У вищенаведених означеннях дробової похідної інтегрування проводиться від нижньої границі  $a$  до змінної верхньої  $x$ . Такі похідні називаються лівосторонніми. Нижче наведемо аналог для правосторонніх похідних [201]:

$$f_b^{(\nu)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_x^b (\xi - x)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi, \nu < 0; \\ \frac{1}{\Gamma(1-\{\nu\})} (-D_x)^{[\nu]+1} \int_x^b (\xi - x)^{-\{\nu\}} f(\xi) d\xi, 0 \leq \nu. \end{cases} \quad (1.3)$$

Похідні (інтеграли), що мають вигляд  $- {}_{-\infty}f^{(\nu)}(x)$  називають похідними (інтегралами) Ліувілля, а такого вигляду  $- f_{\infty}^{(\nu)}(x)$  похідними (інтегралами) Вейля.

В дробовій похідній Рімана-Ліувілля першою виконується операція дробового інтегрування, а потім диференціювання, а саме:

$${}_a f^{(\nu)}(x) = D_x^n {}_a I_x^{n-\nu} f(x). \quad (1.4)$$

Похідна у сенсі Капуто виражається у оберненій інтерпретації до Рімана-Ліувілля, а саме: спочатку виконується кратне диференціювання, а потім дробове інтегрування:

$${}^{(\nu)}_a f(x) = {}_a I_x^{n-\nu} D_x^n f(x). \quad (1.5)$$

Дробовою похідною Грюнвальда-Летнікова називатимемо функцію [177]:

$$f_{\pm}^{(\nu)}(x) = \lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{(\Delta_{\pm}^{\nu} f)(x)}{\xi^{\nu}}, \quad \nu > 0. \quad (1.6)$$

Дробові похідні Грюнвальда-Летнікова з нескінченною границею можна записати:

$$f_+^{(\nu)}(x) = \lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{1}{\xi^{\nu}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+1)}{k! \Gamma(\nu-k+1)} f(x-k\xi), \quad (1.7)$$

$$f_-^{(\nu)}(x) = \lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{1}{\xi^{\nu}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+1)}{k! \Gamma(\nu-k+1)} f(x+k\xi). \quad (1.8)$$

У [177] доведено, що похідна Грюнвальда-Летнікова співпадає із похідною Маршо у випадку, коли  $\nu \geq 1$ :

$${}_{\pm} f^{(\nu)}(x) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\nu}{\Gamma(1-\nu)} \int_a^{\infty} \frac{f(x) - f(x \mp \xi)}{\xi^{1+\nu}} df(x+k\xi), \quad 0 < \nu < 1. \quad (1.9)$$

Показано, що дробові похідні Маршо та Грюнвальда-Летнікова мають однакові області визначення, із збіжності співвідношення (1.6) випливає збіжність співвідношення (1.9) та навпаки. Можна відмітити тісний зв'язок між дробовими інтегро-диференціальними операторами, що вживаються у різних сенсах. Так, наприклад у [201] показано зв'язок між операторами Вейля, Ліувілля та Рімана. За результатами проведених досліджень у [121] зроблено висновок про те, що результати дробового інтегро-диференціювання за Ріманом-Ліувіллем та Адамаром асимптотично наближаються до результатів інтегро-диференціювання за Вейбелем та Ліувіллем.

## **1.2. Аналіз одно- та двовимірних математичних моделей в'язкопружного деформування у середовищах з фрактальною структурою**

Одним із особливих позитивів використання дробових диференціальних операторів є те, що їхнє застосування при моделюванні систем дозволяють описати нові властивості таких систем порівняно з тими, у яких використовуються похідні цілого порядку. Так, наприклад, використання диференціальних рівнянь дробового порядку для побудови математичних моделей в'язкопружного деформування дозволяють більш адекватно виходячи з фізичних міркувань узагальнювати експериментальні дані для ідентифікації параметрів моделей. Праці [11, 25, 58, 81, 84, 123, 124, 159] присвячені дослідженню деформаційно-релаксаційних процесів з використанням похідних дробового порядку. Застосування математичного апарату дробового інтегро-диференціювання для деформаційних процесів пояснюється тим, що такий підхід у математичних моделях в'язкопружності дозволяє враховувати ефекти пам'яті, що у свою чергу засновані на залишкових деформаціях. Відомо [142], що врахування ефекту пам'яті для зміни деякої фізичної величини  $F(t)$  залежно від іншої  $f(t)$  визначається залежністю [188]:

$$F(t) = \int_0^t K(t-t')f(t')dt', \quad (1.10)$$

де  $K$  – функція пам'яті,  $t, t'$  – час.

Для моделювання систем у випадку відсутності ефекту пам'яті (марківські процеси) функція  $F(t)$  має вигляд  $K(t-t') = \eta \delta(t-t')$ , де  $\delta(t)$  – дельта-функція Дірака,  $\eta > 0$  – деяка константа. У випадку «повної» пам'яті маємо співвідношення  $K(t-t') = t^{-1} h(t-t')$ , де  $h(t)$  – одинична функція Хевісайда. Проміжний часовий етап розвитку та функціонування систем між двома граничними станами (відсутність пам'яті – наявність «повної» пам'яті), як показано в [85], характеризуються множиною міри Хаусдорфа–Безиковича, а зв'язок між величинами  $F(t)$  і  $f(t)$  описується дробовим інтегралом:

$$F(t) = \Gamma^{-1}(\alpha) \int_0^t (t-t')^{\alpha-1} f(t') dt', \quad (1.11)$$

де  $\Gamma(\alpha)$  – Гамма-функція,  $\alpha$  – фрактальна розмірність системи.

Зміна поведінки таких систем з частковою пам'яттю, зокрема пов'язаних з в'язкопружним деформуванням та дисипацією енергії, описується дробовими похідними:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t) \sim \frac{\partial^\alpha}{t_0 \partial \bar{t}^\alpha} f(\bar{t}) \sim \Gamma^{-1}(1-\alpha) \frac{d}{t_0 d\bar{t}} \int_0^{\bar{t}} \frac{f(t')}{(\xi-t')^\alpha} dt', \quad (1.12)$$

де  $\bar{t} = t_0$  – безрозмірний час,  $t_0$  – характерний час даного процесу.

Очевидно, що шукана функція у визначенні дробової похідної знаходиться під інтегралом за часом, тобто конкретним значенням  $\alpha$  враховується ефект пам'яті, зокрема у наступні моменти часу [188].

Для моделювання самоподібної неоднорідності відповідно просторова похідна має аналогічний дробовий порядок:  $t \rightarrow l_0$ ,  $\bar{t} \rightarrow \xi$ ,  $\xi = x/l_0$ , де  $l_0$  – характерний просторовий масштаб.

Математичне моделювання деформаційно-релаксаційних процесів базується на використанні структурних реологічних моделей. Ними користуються для визначення механічних властивостей полімерів, внутрішнього тертя в твердих тілах та інших властивостей реальних тіл. До традиційних реологічних моделей варто віднести моделі Максвелла, Фойгта, Кельвіна, Джеффріса, Пойтінга-

Томсона тощо, які описують властивості суцільних середовищ. Для опису моделей допускається, що механічні властивості досліджуваного середовища можна з достатньою точністю описати за допомогою трьох елементів: пружного, пластичного та в'язкого [139]. Використовуючи можливі комбінації таких моделей, можна отримати різні схеми в'язкопружного деформування, що описуються різними типами диференціальних рівнянь, які містять звичайні похідні [188]. В свою чергу ці рівняння дозволяють отримати функції вільної енергії, зміни ентропії та розсіювання енергії для кожної найпростішої моделі.

Класичній теорії в'язкопружних середовищ присвячено чимало праць [92, 103, 126, 127, 133, 138, 139, 143, 164, 165, 171-173, 198] та ін. Зокрема, у працях [171-173] побудовано різноманітні реологічні рівняння у диференціальній, інтегральній та інтегро-диференціальній формі, показано різноманітні реологічні моделі у їх класичній інтерпретації. Можна відмітити значний внесок вищенаведених робіт у дослідженнях в'язкопружних середовищ. Саме на цих підходах зроблено новий крок до вдосконалення та опису властивостей суцільних середовищ у фрактальному аспекті. Реологічні моделі простішого типу широко використовуються для описання спадкових властивостей різних середовищ у лінійній області. Будучи простими та наглядними, вони мають один важливий недолік – вони не враховують розмиття релаксаційного спектра, який є властивим для реальних матеріалів, що своєю чергою, враховується саме у фрактальних моделях [187].

Окрім цього, що фрактальність надає можливість кращого описання процесу та його властивостей, нецілочисельний інтегро-диференціальний апарат використовується для аналізу, прийняття рішень та прогнозування систем із складними та багатомаштабними описами [39]. Одним із прикладів таких систем забезпечується людським мозком, який може бути ідеалізований як складна динамічна система, що складається з багатьох взаємодіючих суб'єктів. Фрактальний аналіз також є одним із сучасних інструментів дослідження динаміки та структури часових рядів. У працях [128, 129] запропоновано

комплексний підхід до аналізу самоподібних та мультифрактальних властивостей часових рядів, наведено послідовність проведення фрактального аналізу.

Дослідженню процесів повзучості та одновимірних моделей в'язкопружних тіл на основі апарату дробового інтегро-диференціювання присвячені праці [123-125, 159, 160]. На основі гіпотези В. Вольтерри про спадково пружне деформаційне тверде тіло та методу структурного моделювання побудовано дробові аналоги класичних реологічних моделей шляхом заміни у диференціальних рівняннях звичайної похідної на дробовий порядок похідної. У [156] показано аналітичний метод розв'язку задачі повзучості при постійному напруженні у стадіях навантаження та розвантаження для моделей Максвелла, Кельвіна, Зенера та Фойгта. В інтегро-диференціальному численні дробового порядку важливе місце серед аналітичних методів займають інтегральні перетворення. Важливо, що інтегральні перетворення корисні не лише для аналізу та розв'язку відповідних рівнянь, а й для виведення самих рівнянь [201]. До них можна віднести метод перетворення Лапласа, Мелліна, Фур'є, функції Гріна та інші.

У [125] наведено різницеві схеми для чисельного розв'язку диференціальних рівнянь з похідними дробового порядку, що описують фрактальні моделі Фойгта та Максвелла. Звичайно, що не усі рівняння можна розв'язати аналітичним методом, тому у [123, 124] запропоновано у випадку складності вихідного рівняння шукати розв'язки чисельними методами, наприклад методом половинного ділення.

Як було розглянено вище за допомогою одновимірних реологічних моделей можливо описати чимало процесів в'язко-пружно-пластичного деформування. У [179] досліджено механічну поведінку кусково-однорідного тіла з в'язкопружним проміжним шаром, що описується моделлю Кельвіна-Фойгта і працює на поперечний зсув, в області спряження за дії змінних у часі зсувних навантажень для випадку плоскої деформації або плоского напруженого стану. Постановки проблем сьогодення враховуючи все нові дослідження вимагають моделювання та

побудови математичних моделей, що повніше описували би процеси та системи у просторі чи площині. Так, наприклад, у [132] розроблена механічна модель та складені фізичні рівняння зв'язку напружень зі швидкостями деформацій в просторовій постановці для пружно-в'язкопластичного середовища з застосуванням модифікованого критерія міцності Кулона-Мора. У [144] на основі реологічної моделі Максвелла отримано аналітичний зв'язок між компонентами напружень і швидкостями деформацій для скінченно-елементного моделювання гарячої пластичної деформації у випадку об'ємного напруженого стану. Для вирішення інженерно-геодезичних задач, зокрема при проектному моделюванні функціональних елементів технологічних комплексів, доцільною є побудова реологічної моделі методом суміщень як плоскої контактної задачі з розв'язком інтегрального рівняння чисельним методом [208].

Зв'язок компонентів напружень з компонентами деформацій та їхніх швидкостей для лінійно-в'язкого середовища у випадку об'ємного напруженого стану для різних типів реологічних моделей досліджено у працях [99, 171]. Проте, варто відмітити, що на сьогодні задача дослідження реологічних моделей у плоскому чи об'ємному напруженому стані з врахуванням дробових інтегро-диференціальних операторів залишається відкритою та в даній області ще не достатньо дослідженою. Зокрема, у даній дисертаційній роботі було проведено математичне моделювання двовимірних в'язкопружних деформацій у середовищах з фрактальною структурою у процесі сушіння деревини, а також наведено аналітичні та чисельні методи розв'язку систем рівнянь, що пов'язують напруження і деформації, та їхні швидкості.

### **1.3. Аналіз дослідження неізотермічного тепло- та вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою**

Математичне моделювання процесів тепломасоперенесення в багатокomпонентних системах із складною просторово-часовою структурою, для яких характерні ефекти пам'яті, просторової нелокальності та самоорганізації,

як правило, базуються на застосуванні математичного апарату інтегро-диференціювання дробового порядку. Диференціальні рівняння дробового порядку описують еволюцію фізичних систем із залишковою пам'ятю, які займають проміжне місце між марківськими системами та системами, які характеризуються повною пам'ятю [195]. Зокрема, показник дробовості вказує на долю станів системи, що зберігаються протягом усього процесу її функціонування.

У працях [31, 32, 136, 137] розроблено математичні методи моделювання дифузійних процесів у статистиці Рені, для якої характерні степеневі закони для розподілів у часі, тобто розв'язано актуальну проблему послідовного виведення рівнянь переносу у дробових похідних для дослідження процесів у різних системах, зокрема із фрактальною структурою.

У працях [149, 150] розглянуто поверхні неметалевих включень при пластичній деформації сталі та зміна їх фрактальних характеристик із збільшенням степені деформації. Встановлено, що значення фрактальної розмірності збільшується із збільшенням степені деформації [150]. Для проведення фрактального аналізу розглянуто методи попередньої обробки зображень, а також вплив на фрактальну розмірність зображень поверхонь пористих матеріалів, зокрема газарів [148].

Процеси масоперенесення можна розділити на одно- та двомірні. Математичні моделі у працях, що описують такі процеси повинні враховувати фрактальність середовища, властивості щільності, теплофізичні властивості, просторові та часові кореляції, ефекти пам'яті. Зокрема, праці [96, 97, 98, 100, 146, 147, 202] присвячені вивченню одновимірного процесу теплопровідності у середовищах з фрактальною структурою. Двовимірні процеси теплопровідності з використанням дробових диференціальних операторів досліджені у значно меншій кількості праць [101, 183].

У світі відомі складні процеси та системи, математичне моделювання котрих повинне проводитись на основі їхнього синтезу. Такий підхід дає змогу значно

краще дослідити реальні процеси, надати їм оцінку, порівняти та провести модифікацію останніх. Процеси тепло- та масоперенесення в пористих середовищах належать до фізико-технічних систем, які повинні містити в собі канали, що входять до складу розгалуженої фрактальної структури. Показник дробової похідної за часом відповідає долі каналів (гілок), відкритих для протікання [55, 56]. У праці [197] показано, що аномальна дифузія (дифузія Леві) має фрактальну природу, отримано взаємозв'язок порядку дробової похідної з показником масштабного перетворення часу і Херста. У працях [106, 204-205] запропоновано підходи та методи дослідження гетеродифузійних процесів, які супроводжуються розпадом мігруючих речовин.

Як відомо процес сушіння капілярно-пористих матеріалів, до котрих можна віднести вироби з деревини, кераміки, цементного каменю тощо, супроводжуються низкою нерівноважних фізичних процесів [111]. Враховуючи те, що більшість об'єктів господарської діяльності зі складною внутрішньою структурою, роботи [110, 111] спрямовані на вирішення науково-прикладної проблеми математичного моделювання та розвитку аналітико-числових методів нелінійної термомеханіки процесів конвективного, природного, електроосмотичного та кондуктивного видалення вологи з врахуванням руху границь фазового переходу, а також дослідження формостійкості систем в процесі сушіння.

Дослідженню ізотермічного волого- теплоперенесення у середовищах з фрактальною структурою, а зокрема у процесі сушіння деревини, присвячено невелику кількість праць. Зокрема, у працях [73, 183, 187, 191] побудована математична модель розподілу температурно-вологісних полів у капілярно-пористих матеріалах із фрактальною структурою під час сушіння деревини, що описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних із дробовим порядком за часом.

Варто зауважити, що досить невелика кількість робіт присвячена краєвим задачам дробового порядку із граничними умовами третього роду. Зокрема такі



задачі досліджено у роботах [73, 96-98, 183, 187, 191]. У працях [96-98] для побудови локально-одновимірних схем використано метод сумарної апроксимації.

На сьогодні для розв'язку диференціальних рівнянь дробового порядку використовують як аналітичні [12, 19, 30, 40-42, 62-64, 95, 119, 145-147, 168, 169, 202], так і чисельні методи [2, 14, 16, 17, 26, 29, 73, 87, 96, 97, 98, 100, 101, 183, 187, 191, 199].

У працях [146, 147, 202] знайдено аналітичні розв'язки задач теплопровідності із граничними умовами першого роду, що містять похідні дробового порядку за часом та просторовою змінною. Зокрема, у [146] розглянуті одновимірні випадки задач для нескінченної прямої, півобмеженої прямої та задачі без початкових умов. Релаксаційні процеси на границі розподілу фаз володіють складним характером, який призводить до нелінійних та нелокальних процесів теплообміну. На основі рівняння теплопровідності з похідними дробового порядку досліджено задачу Стефана, яка полягає у знаходженні розподілу температури і закону руху границі розподілення фаз при заданих граничних та початкових умовах, а також умови в області фазового переходу [145].

Дослідженню динаміки та автохвильових розв'язків бістабільних систем реакції – дифузії з часовими дробовими похідними присвячено праці [12, 19, 119]. У [62-64] побудовано фундаментальні розв'язки параболічних рівнянь з дробовою похідною за часом з різними граничними умовами. Роботи [168, 169] присвячені застосуванню спектрального методу до розв'язування диференціальних рівнянь дробового порядку за часом з використанням многочленів Лагерра. У [146, 151] дробова похідна розуміється у сенсі Рімана-Ліувілля та використовується метод перетворення Фур'є.

Проте одним із застосованих аналітичних методів розв'язання дробово-диференціальних рівнянь є метод перетворення Лапласа [30, 59, 201, 202]. Одностороннє перетворення Лапласа можна представити:

$$fx(x) \xrightarrow{L} f(\lambda) = L\{f(x)\}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} f(x) dx. \quad (1.13)$$

Для дробової похідної  ${}_0f^{(\nu)}(x), (\nu > 0)$  Рімана-Ліувілля перетворення Лапласа матиме вигляд [201]:

$${}_0\hat{f}^{(\nu)}(\lambda) = \lambda^\nu \hat{f}(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k {}_0f^{(\nu-k-1)}(0+), \quad (1.14)$$

де  $n$  – цілочисельний порядок похідної,  $n-1 < \nu < n$ .

У працях [30, 201] застосовано метод перетворення Лапласа та знайдено розв'язок диференціальних рівнянь, що містять дробову похідну, яка розглядається у визначенні Капуто. Перетворення Лапласа похідної Капуто можна записати аналогічно до дробової похідної Рімана-Ліувілля [201]:

$$({}_0^{(\nu)}\hat{f})(\lambda) = \lambda^\nu \hat{f}(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{\nu-k-1} {}_0f^{(k)}(0+). \quad (1.15)$$

У працях [40-42] розв'язано задачі Коші та крайові задачі для диференціальних рівнянь із частинними дробовими похідними, зокрема доведені відповідні теореми для зворотних задач до рівнянь дробового порядку за часом з різними невідомими величинами.

При аналітичному розв'язуванні краєвих задач із дробовими похідними дуже часто виникають значні труднощі, а тому більш ефективними та простішими у застосуванні є чисельні методи. Теорія чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь в частинних похідних дробового порядку носить фрагментарний характер і далека від завершення [115]. Саме тому відшукуванню оптимальних чисельних методів присвячена значна кількість праць. У праці [26] зокрема, пропонується чисельний метод розв'язку дробових диференціальних рівнянь в частинних похідних, який базується на методі гомотопічного збурення та перетворенні Лапласа. Розгляду стандартних чисельних методів розв'язання фрактальних диференціальних рівнянь, котрі б давали альтернативний варіант кращого наближення до справжнього розв'язку присвячені праці [16, 17, 29]. У [87] розглядаються дробові диференціальні рівняння в частинних похідних з дробовими похідними простору Рісса, для їх розв'язку запропоновано три

ефективних чисельних методи: метод  $L_1/L_2$  – наближення, стандартний (зміщений) метод Грюнвальда та метод трансформації матриці.

У [2] запропоновано ефективний алгоритм розв'язку фрактальних нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних (дробові похідні описані у сенсі Капуто) за допомогою методу розкладання Сумуду. Досліджено, що наведена методика здатна зменшити обсяг обчислення порівняно із використанням класичних методів, результати отримані за допомогою цього методу добре узгоджуються з результатами отриманими іншими методами.

До актуальних чисельних методів можна віднести також метод скінченного елемента та скінченних різниць. Зокрема, у роботах [122, 174] розроблено математичні моделі та методи обчислення, що базуються на основі поєднання переваг методів скінченних та граничних елементів.

Актуальними ці методи є і для пошуку розв'язків для рівнянь у частинних похідних дробового порядку. У працях [37, 44, 80, 96-98, 100, 101, 113-116, 114, 157-160] використано скінченно-різницевої апроксимації. Априорний аналіз похибки степеневих апроксимацій досліджено у [130, 207]. Для застосування методу скінченних різниць до диференціальних рівнянь дробового порядку важливо правильно записати апроксимації дробової похідної залежно від її типу, а надалі усе зводиться до простоти та універсальності самого методу, результати моделювання за допомогою котрого досягають хорошої збіжності із експериментальними даними. У методі скінченних різниць повинен відбуватися перехід від неперервного середовища до деякої дискретної моделі. Важливо, що при цьому повинні зберігатися усі основні властивості фізичного процесу, а саме – закони збереження тепла, маси, енергії тощо [100]. У [93] для диференціальних рівнянь та різницевої задачі отримано априорні оцінки для знаходження розв'язку дифузійного рівняння дробового, змінного та розподіленого порядків. Праця [162] присвячена вивченню дискретизації задачі Коші для диференціального рівняння дробового порядку, наведено підхід, що базується на понятті загальної апроксимаційної схеми та включає у себе метод

скінченних різниць, метод скінченних елементів та проекційні методи. У працях [100, 101] побудовано чисельний метод з використанням явних і неявних різницевих схем для розв'язання одновимірної та двовимірної задачі теплопровідності із похідними дробового порядку. У працях [73, 183, 187, 191] застосовано явні та неявні схеми методу скінченних різниць для дослідження рівнянь тепломасоперенесення, вологоперенесення та в'язкопружного деформування з похідними дробового порядку за часом та граничними умовами третього роду, розроблені чисельні методи знаходження розв'язку дають змогу отримати числові значення та графічні залежності, які відображають стан процесу в певний момент часу та дають змогу зробити висновки про швидкість протікання певного процесу. У [152] розроблено неявну однорідну схему для крайової задачі переносу загального вигляду з дробовою похідною за часом та граничними умовами першого роду.

При пошуку чисельного розв'язку дуже часто виникають похибки, що пов'язані, наприклад, через округлення результатів. Таким чином фактичний розв'язок задачі буде відрізнятися від точного розв'язку, а тому виникає задача пошуку ефективного методу отримання умов збіжності та стійкості. Різні підходи дослідження стійкості різницевих схем розглянуті у класичних працях [154, 155, 175, 176]. Питанням стійкості та збіжності розроблених різницевих схем для краєвих задач дробового порядку присвячені праці [96-98, 100, 101, 152, 199]. Для отримання апріорних оцінок у [96-98] використано метод енергетичних нерівностей та принцип максимуму. У працях [154, 199] доведення умов сумісності базується також на принципі максимуму. У [101] доведена теорема про те, що неявна схема для двовимірного рівняння теплопровідності з похідними дробового порядку є абсолютно стійкою, а також наведено та доведено співвідношення стійкості для явної різницевої схеми. Широкого застосування набули деякі практичні дослідження стійкості та збіжності різницевих схем. Наприклад, метод так званого замороження коефіцієнтів для різницевих рівнянь із змінними коефіцієнтами, котрий полягає у тому,

що різницеві рівняння із змінними коефіцієнтами заміняють на різницеві схеми із постійними коефіцієнтами та припускається, що якщо при виборі певної точки схема із постійними коефіцієнтами є стійкою, то відповідно буде стійкою і різницева схема із змінними коефіцієнтами. Проте на сьогодні особливої уваги вимагає відсутність загальних методів дослідження стійкості систем нелінійних диференціальних рівнянь, зокрема враховуючи фрактальність середовища. Для визначення умов стійкості системи різницевих рівнянь тепломасоперенесення у праці [155] запропоновано метод умовного задання деяких відомих функцій системи. Такий практичний підхід дозволяє звести стійкість системи рівнянь до дослідження стійкості її окремих рівнянь.

#### **1.4. Аналіз ідентифікації дробових інтегро-диференціальних параметрів моделей в'язко-пружного деформування**

Моделювання складних систем для котрих характерні ефекти пам'яті та самоорганізації зводиться не лише до вирішення прямих задач, а й обернених задач. У зв'язку з цим виникла проблема параметричної та структурної ідентифікації процесів. Враховуючи ряд позитивних переваг, котрими володіють фрактальні параметри, задача ідентифікації дробових параметрів породжує нову задачу – знаходження оптимального та ефективного методу апроксимації. Класичні методи ідентифікації не завжди дають бажаний результат та пов'язані із великими математичними труднощами, а тому при пошуку фрактальних параметрів застосовують різні підходи [117, 123, 156-158, 206].

У праці [94] запропоновано визначення похідних дробового порядку для застосування в задачах структурної ідентифікації, що приводить до природних алгоритмів визначення порядку похідних настроюваної моделі. Розроблення методу структурної ідентифікації у праці [124] проводили на основі результатів експериментальних досліджень і методу параметричної ідентифікації моделі в'язкопружного тіла з використанням оператора дробового диференціювання. Так, наприклад, у [124] для моделі Максвелла, розроблено

методику параметричної ідентифікації, що ґрунтується на асимптотичних властивостях функції Міттаг-Леффлер. Важливо відзначити роль у вирішенні інтегро-диференціальних рівнянь нецілих порядків саме функції Міттаг-Леффлер. Вона входить у вирази, що описують ядра релаксації та повзучості, саме тому при ідентифікації повзучості необхідно враховувати властивості цієї функції. Дослідженню функції Міттаг-Леффлер присвячено чимало праць з врахуванням та без врахування нецілочисельного диференціювання [19, 21, 59, 60, 82, 108]. Трансцедентальна однопараметрична функція Міттаг-Леффлер задається формулою [59]:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (1.16)$$

Двопараметрична функція Міттаг-Леффлер була введена Агарвалем та має вигляд [108]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (1.17)$$

У випадку, коли  $\alpha = \beta = 1$  функція Міттаг-Леффлер перетворюється у звичайну експоненціальну функцію:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (1.18)$$

Оскільки функція Міттаг-Леффлер задається нескінченим рядом, у праці [159] запропоновано для ідентифікації параметрів дробової моделі Фойгта використати лише перших два члени ряду функції Міттаг-Леффлер. Методика ідентифікації фрактальних параметрів полягає у тому, що для отримання початкового наближення застосовується метод найменших квадратів, а подальше уточнення параметрів відбувається за допомогою методу покоординатного спуску.

У [206] запропоновано визначення ядра повзучості та релаксації у вигляді лінійної комбінації дробово-експоненціального оператора Работнова та функцій Міттаг-Леффлера. Шляхом апроксимації експериментальних даних повзучості, визначено степінь фрактальності та встановлено його залежність від температури,

вологовмісту та твердості породи деревини. Оскільки при певних значеннях параметрів функція Міттаг-Леффлер перетворюється у експоненту, а також враховуючи попередні дослідження [206] одним із запропонованих методів на сьогодні являється інтегральний метод апроксимації експериментальних даних експоненціальними функціями [118, 165]. Як вказується у [203], метод мінімальних квадратів визначення параметрів експоненціальної моделі призводить до складної нелінійної задачі оптимізації. Саме тому у праці запропоновано інтегральний метод та модифікований метод Проні, що дозволяє звести вихідну задачу до лінійних рівнянь. У працях [27, 178] теж використано метод Проні у різних його інтерпретаціях для ідентифікації. Зокрема, у [178] запропоновано розширення сфери застосування методу найменших квадратів Проні для ідентифікації перехідних характеристик засобів вимірювальної техніки, що описуються динамічними ланками коливального типу, розглянуті переваги та недоліки цього методу.

У [117] розв'язано задачу визначення параметрів дробово-експоненціальних ядер спадковості нелінійно-в'язкопружних матеріалів. Проаналізовано методи визначення параметрів, що використовуються в кубічній теорії в'язкопружності та в нелінійних теоріях та ґрунтуються на умовах подібності первісних кривих повзучості та ізохронних діаграмах.

Нелінійні системи, до котрих можна віднести диференціальні рівняння з дробовими похідними, як вище зазначено, потребують нестандартного підходу до їх розв'язання. Одним із таких методів є метод Левенберга-Марквардта. Проте недоліками цього методу є необхідність вибору початкового наближення, можливість існування не єдиного розв'язку та погана збіжність цього методу [157]. На противагу методу Левенберга-Марквардта у праці [156-158] запропоновано методи визначення параметрів диференціальних рівнянь з дробовими похідними Рімана-Ліувілля порядку  $\alpha \in (1,2)$  за значеннями ординат процесу на прикладі рівняння Баррета. В основі запропонованих методів лежить побудова для диференціального рівняння дробового порядку лінійно-

параметричної дискретної моделі, коефіцієнти якої деяким чином пов'язані з шуканими параметрами диференціального рівняння з дробовими похідними. Описаний алгоритм методу дозволяє звести розв'язок вихідної задачі параметричної ідентифікації до обчислення середньоквадратичних оцінок коефіцієнтів лінійно-параметричної дискретної моделі.

На основі фрактального аналізу разом із час-частотним та статичним у праці [135] запропонований комплексний метод оцінки та ідентифікації складних нелінійних процесів. Поруч із апроксимацією фрактальних моделей розрізняють також фрактальну інтерполяцію [4, 33, 52, 13]. Періодичні функції інтерполяції фракталів є корисними при моделюванні нерегулярних процесів [52]. У [51] запропоновано ефективний алгоритм гібридного стохастичного фрактального пошуку для ідентифікації параметрів хаотичних систем дробового порядку, чисельна реалізація даного алгоритму та порівняння з існуючими алгоритмами демонструють ефективність запропонованого методу.

Для того, щоб точно визначити параметри фрактального масштабу у [48] аналізуються та порівнюються точності різних методів ідентифікації параметрів, таких як метод спектра потужності, метод функціонування структури та метод дисперсії. На основі методу дискретного спектра потужності та дисперсії, перероблений метод визначення параметра масштабу. Результати показують, що на відміну від інших методів, новий метод може ідентифікувати більш точно фрактальні параметри. Фрактальні моделі описують ієрархічні системи і підходять для моделювання структури ґрунту та гідравлічних властивостей ґрунту. У статті [24] запропоновано підхід до ідентифікації параметрів та визначення гідравлічних параметрів за допомогою зворотного моделювання. Зворотна задача ідентифікації параметрів формулюється як задача оптимізації.

У праці [7] запропоновано універсальну модель дробово-диференційних рівнянь довільного порядку у вигляді гіпернейрона, яку засновано на поданні рішень рівняння методом кінцевих приростів і модифікованої форми Рімана-



Ліувілля. На базі гіпернейрона і модифікованих генетичних алгоритмів реалізовано метод ідентифікації об'єктів з дробово-диференційними моделями.

### 1.5. Висновки до 1 розділу

- Проведений аналіз існуючих досліджень показав, що використання нецілочисельного інтегро-диференціювання для моделювання багатьох процесів, зокрема у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів, дозволяє враховувати такі властивості матеріалу, як – біологічна мінливість реологічних властивостей, структурна неоднорідність, складна природа просторових кореляцій, наявність ефектів «пам'яті», самоорганізації та детермінованого хаосу.
- Встановлено, що математичні моделі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, з урахуванням фрактальної структури під час сушіння дозволяють більш адекватно виходячи з фізичних міркувань узагальнювати експериментальні дані для ідентифікації параметрів моделей. Окрім цього, математичні моделі, які враховують фрактальну структуру середовища дозволяють описати нові властивості реальних матеріалів. Так, наприклад, реологічні моделі дробово-диференціального типу враховують розмиття релаксаційного спектра.
- Досліджено, що математичні моделі процесів тепломасоперенесення капілярно-пористих матеріалів під час сушіння враховують стохастичну неоднорідність структури та залишкову пам'ять, яка займає проміжне місце між марківськими системами та системами, які характеризуються повною пам'яттю.
- Встановлено, що для реалізації математичних моделей деформаційних та теплообмінних процесів у середовищах з фрактальною структурою використовують аналітичні і чисельні методи. Проте зважаючи на ефективність, найбільш застосованими є чисельні методи, а саме – метод скінченних різниць та елементів. Проведено огляд праць, що присвячені пошуку оптимального методу ідентифікації дробово-диференціальних параметрів моделей.

## РОЗДІЛ 2

### ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛО- МАСОПЕРЕНОСЕННЯ ПІД ЧАС СУШІННЯ КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ НА ПІДСТАВІ ДРОБОВОГО ІНТЕГРО- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО АПАРАТУ

У цьому розділі синтезовані двовимірні математичні моделі неізотермічного вологоперенесення з врахуванням ефекту «пам'яті» та просторової кореляції капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння. Наведено чисельний метод розв'язання представленої математичної моделі, що ґрунтується на застосуванні скінченно-різницевого методу предиктор-коректор. Розроблено явні та неявні скінченно-різницеві схеми та встановлені умови стійкості та збіжності для них. Основні результати опубліковані у працях [57, 69, 72, 74, 180, 189, 191-195, 196].

#### 2.1. Постановка загальної математичної моделі тепло- та вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою

Двовимірна математична модель нестационарного процесу тепло- та вологоперенесення під час сушіння капілярно-пористих матеріалів описується взаємозв'язаною системою диференціальних рівнянь у частинних похідних із дробовим порядком за часом  $t$  та просторовими координатами  $x_1$  та  $x_2$ :

$$c\rho \frac{\partial^\alpha T(t, x_1, x_2)}{\partial t^\alpha} = \lambda_1 \frac{\partial^{\beta} T(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^{\beta}} + \lambda_2 \frac{\partial^{\beta} T(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^{\beta}} + \varepsilon\rho_0 r \frac{\partial^\alpha U(t, x_1, x_2)}{\partial t^\alpha}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^\alpha U(t, x_1, x_2)}{\partial t^\alpha} = a_1 \frac{\partial^{\beta} U(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^{\beta}} + a_2 \frac{\partial^{\beta} U(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^{\beta}} + a_1 \delta \frac{\partial^{\beta} T(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^{\beta}} + a_2 \delta \frac{\partial^{\beta} T(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^{\beta}}, \quad (2.2)$$

з такими початковими умовами:

$$T|_{(0, x_1, x_2)} = T_0(x_1, x_2), \quad (2.3)$$

$$U(0, x_1, x_2) = U_0(x_1, x_2) \quad (2.4)$$

та граничними умовами третього роду:

$$\lambda_i \frac{\partial^\gamma T}{\partial x_i^\gamma} \Big|_{x_i=l_i} + \rho_0(1-\varepsilon)\beta_i \left( U|_{x_i=l_i} - U_{pi} \right) = \alpha_i \left( T|_{x_i=l_i} - t_{ci} \right), \quad (2.5)$$

$$a_i \delta \frac{\partial^\gamma T}{\partial x_i^\gamma} \Big|_{x_i=l_i} + a_i \frac{\partial^\gamma U}{\partial x_i^\gamma} \Big|_{x_i=l_i} = \beta_i \left( U_{pi} - U|_{x_i=l_i} \right), \quad (2.6)$$

$$\lambda_i \frac{\partial^\gamma T}{\partial x_i^\gamma} \Big|_{x_i=0} + \rho_0(1-\varepsilon)\beta_i^* \left( U|_{x_i=0} - U_{pi}^* \right) = \alpha_i^* \left( T|_{x_i=0} - t_{ci}^* \right), \quad (2.7)$$

$$a_i \delta \frac{\partial^\gamma T}{\partial x_i^\gamma} \Big|_{x_i=0} + a_i \frac{\partial^\gamma U}{\partial x_i^\gamma} \Big|_{x_i=0} = \beta_i^* \left( U_{pi}^* - U|_{x_i=0} \right), \quad (2.8)$$

де  $(t, x_1, x_2) \in D, D = [0, \tau_{\max}] \times [0, l_1] \times [0, l_2]$ ;  $T, U$  – шукані функції, де  $T$  – температура,  $U$  – вологовміст,  $c(T, U)$  – питома теплоємність,  $\rho(U)$  – густина,  $\rho_0$  – базисна густина,  $\varepsilon$  – коефіцієнт фазового переходу,  $r$  – питома теплота пароутворення,  $\lambda_i(T, U)$  ( $i=1,2$ ) – коефіцієнти теплопровідності,  $a_i(T, U)$  ( $i=1,2$ ) – коефіцієнти вологопровідності,  $\delta(T, U)$  – термоградієнтний коефіцієнт,  $t_{ci}, t_{ci}^*$  ( $i=1,2$ ) – значення температури середовища,  $U_{pi}, U_{pi}^*$  ( $i=1,2$ ) – значення відносної вологості зовнішнього середовища,  $\alpha_i(T, U), \alpha_i^*(T, U)$  ( $i=1,2$ ) – коефіцієнти теплообміну,  $\beta_i, \beta_i^*$  ( $i=1,2$ ) – коефіцієнти вологообміну,  $\alpha$  – дробовий порядок похідної за часом ( $0 < \alpha \leq 1$ ),  $\tilde{\beta}, \gamma$  – дробові показники похідної за просторовими координатами ( $1 < \tilde{\beta} \leq 2$ ), ( $0 < \gamma \leq 1$ ).

Дослідження процесу неізотермічного вологоперенесення відбуватиметься для періоду сталої та падаючої швидкостей сушіння деревини. Враховуючи це, для періоду сталої швидкості сушіння, початкове значення вологовмісту визначатиметься сталою величиною, тобто  $U|_{t=0} = u_0$ , де  $u_0 = const$ . Для періоду падаючої швидкості сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, початкова умова зображена у вигляді квадратичної функції, а саме [120]:

$$U|_{t=0} = U_{II} - \left[ 1 - \left( \frac{x_1 - l_1/2}{l_1/2} \right)^2 \right] \times \left[ 1 - \left( \frac{x_2 - l_2/2}{l_2/2} \right)^2 \right] (U_{II} - U_{II}), \quad (2.4^*)$$

де  $U_{II}$  – вологовміст у центрі капілярно-пористого матеріалу,  $U_{II}$  – вологовміст на поверхні.

Число Фур'є при цьому для падаючої швидкості процесу сушіння рівне –  $F_o \approx 0.1$ , та число Біо –  $Bi \approx 10$ .

## 2.2. Апроксимація фрактальних операторів

Розглянуті взаємозв'язані процеси тепло- та вологоперенесення, що описуються системою диференціальних рівнянь у частинних похідних із дробовим порядком за часом та просторовими координатами (2.1) – (2.2) та граничними умовами третього роду (2.5) – (2.8), потребують застосування ефективного та простого в реалізації чисельного методу. У даній дисертаційній роботі використано метод скінченних різниць, а у якості додаткового методу розщеплення – метод предиктор-коректор. Предиктор реалізований за допомогою неявної різницевої схеми методу скінченних різниць, коректор – явної різницевої схеми.

Одним із основних завдань для реалізації чисельного методу є апроксимація вихідної задачі. Для введення поняття різницевої фрактальної апроксимації введемо в області  $D$  просторово – часову сітку:

$$\begin{aligned} \varpi_{\Delta\tau, h_1, h_2} = \{ & (t^k, x_{1n}, x_{2m}) : x_{1(n)} = (n-1)h_1, x_{2(m)} = (m-1)h_2, t^k = k\Delta\tau, n = 1, \dots, N; h_1 = \frac{l_1}{N-1}; \\ & m = 1, \dots, M; h_2 = \frac{l_2}{M-1}; k = 0, 1, \dots, K; \Delta\tau = \frac{\tau_{\max}}{K} \}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для спрощення вважатимемо, що розбиття по просторі та часі є рівномірним із кроком  $h_1$  по координаті  $x_1$ ,  $h_2$  по координаті  $x_2$  та  $\Delta\tau$  по часі  $t$ .

Для дробової похідної  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) на відрізку  $[t^k, t^{k+1}]$  справедлива формула Рімана – Ліувілля [59]:

$$\left. \frac{\partial^\alpha f(t, x_1, x_2)}{\partial t^\alpha} \right|_{t^k} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{f(t^k, x_1, x_2)}{(t^{k+1} - t^k)^\alpha} + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \frac{f'(\xi, x_1, x_2)}{(t^{k+1} - \xi)^\alpha} d\xi \right). \quad (2.10)$$

Відомо, що апроксимацію похідної  $f'(t, x_1, x_2)$  на відрізку  $[t^k, t^{k+1}]$  можна записати таким чином [175]:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_k \approx \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta \tau}, \quad (\Delta \tau = t^{k+1} - t^k). \quad (2.11)$$

Тоді як, із співвідношення (2.10) отримуємо апроксимацію для дробової похідної порядку  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) на відрізку  $[t^k, t^{k+1}]$  [187]:

$$\left. \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right|_k \approx \frac{u^{k+1} - \alpha u^k}{\Gamma(2-\alpha) \Delta \tau^\alpha}. \quad (2.12)$$

Для дробової похідної  $\tilde{\beta}$  ( $1 < \tilde{\beta} \leq 2$ ) має місце формула Грюнвальда-Летнікова [177]:

$$\frac{\partial^{\tilde{\beta}} f(\tau)}{\partial x_1^{\tilde{\beta}}} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{1}{h_1^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^{\left[ \frac{\tau}{h_1} \right]} (-1)^j \frac{\Gamma(\tilde{\beta}+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\tilde{\beta}-j+1)} f(x_1 - j+1), \quad (2.13)$$

де  $h_1 = x_{1(n+1)} - x_{1(n)}$ ,  $[x_1]$  - ціла частина координати  $x_1$ .

Тоді різницева апроксимація дробової похідної  $\tilde{\beta}$  за просторовою координатою  $x_1$  матиме вигляд [100]:

$$\left. \frac{\partial^{\tilde{\beta}} u}{\partial x_1^{\tilde{\beta}}} \right|_{x_{1(n)}} \approx \frac{1}{h_1^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^n q_j u_{n-j+1}, \quad (2.14)$$

де  $q_0 = 1$ ,  $q_j = (-1)^j \frac{\tilde{\beta}(\tilde{\beta}-1)\dots(\tilde{\beta}-j+1)}{j!}$ .

Аналогічним чином можемо записати різницеву апроксимацію дробової похідної  $\tilde{\beta}$  за просторовою координатою  $x_2$ :

$$\left. \frac{\partial^{\tilde{\beta}} u}{\partial x_2^{\tilde{\beta}}} \right|_{x_{2(m)}} \approx \frac{1}{h_2^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^m q_j u_{m-j+1}. \quad (2.15)$$

Знову використовуючи формулу Рімана – Ліувілля (2.10) для дробової похідної  $\gamma$  ( $0 < \gamma \leq 1$ ) на відрізку  $[x_{1(n)}, x_{1(n+1)}]$  запишемо різницеву апроксимацію таким чином:

$$\left. \frac{\partial^\gamma u}{\partial x_1^\gamma} \right|_{x_{1(n)}} \approx \frac{u_{n+1} - \gamma u_n}{\Gamma(2-\gamma) h_1^\gamma}. \quad (2.16)$$

Отже, використовуючи математичний апарат дробового диференціювання було отримано скінченні різницеві апроксимації для похідної дробового порядку  $\alpha$

( $0 < \alpha \leq 1$ ) за часом та дробових похідних  $\tilde{\beta}, \gamma$  ( $1 < \tilde{\beta} \leq 2$ ), ( $0 < \gamma \leq 1$ ) за просторовими координатами. Отримані різницеві апроксимації відрізняються від апроксимацій для похідних цілочисельного порядку. Проте у достовірності вище наведених апроксимацій для похідних дробового порядку можна не сумніватись, оскільки при  $\alpha = 1$ ,  $\tilde{\beta} = 2$ , та  $\gamma = 1$  отримуємо класичні різницеві апроксимації, що є вірними для цілочисельного диференціювання.

### 2.3. Чисельна реалізація математичної моделі неізотермічного вологоперенесення із похідними дробового порядку

Для реалізації методу скінченних різниць, використаємо співвідношення (2.12), (2.14), (2.15) та (2.16), що описують різницеві апроксимації дробових похідних  $\alpha, \tilde{\beta}, \gamma$ .

Тоді явну різницеву схему для системи диференціальних рівнянь у частинних похідних (3.1), (3.2) можна записати:

$$c\rho \frac{T_{n,m}^{k+1} - \alpha T_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^\alpha} = \frac{\lambda_1}{h_1^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^n q_j T_{n-j+1,m}^k + \frac{\lambda_2}{h_2^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^m q_j T_{n,m-j+1}^k + \varepsilon\rho_0 r \frac{U_{n,m}^{k+1} - \alpha U_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^\alpha}, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{U_{n,m}^{k+1} - \alpha U_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^\alpha} &= \frac{a_1}{h_1^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^n q_j U_{n-j+1,m}^k + \frac{a_2}{h_2^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^m q_j U_{n,m-j+1}^k + \\ &+ \frac{a_1\delta}{h_1^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^n q_j T_{n-j+1,m}^k + \frac{a_2\delta}{h_2^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^m q_j T_{n,m-j+1}^k. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Аналогічним чином запишемо неявну різницеву схему для системи диференціальних рівнянь у частинних дробових похідних (2.1), (2.2):

$$c\rho \frac{T_{n,m}^{k+1} - \alpha T_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^\alpha} = \frac{\lambda_1}{h_1^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^n q_j T_{n-j+1,m}^{k+1} + \frac{\lambda_2}{h_2^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^m q_j T_{n,m-j+1}^{k+1} + \varepsilon\rho_0 r \frac{U_{n,m}^{k+1} - \alpha U_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^\alpha}, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{U_{n,m}^{k+1} - \alpha U_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^\alpha} &= \frac{a_1}{h_1^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^n q_j U_{n-j+1,m}^{k+1} + \frac{a_2}{h_2^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^m q_j U_{n,m-j+1}^{k+1} + \\ &+ \frac{a_1\delta}{h_1^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^n q_j T_{n-j+1,m}^{k+1} + \frac{a_2\delta}{h_2^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^m q_j T_{n,m-j+1}^{k+1}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Початкові умови (2.3), (2.4) та граничні умови третього роду (2.5) – (2.8) запишемо у скінченно різницевому вигляді таким чином:

$$T_{n,m}^0 = T_0(x_{1(n)}, x_{2(m)}), \quad (2.21)$$

$$U_{n,m}^0 = U_0(x_{1(n)}, x_{2(m)}), \quad (2.22)$$

$$\lambda_1 \frac{T_{N,m}^{k+1} - \gamma T_{N-1,m}^{k+1}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} + \rho_0(1-\varepsilon)\beta_1(U_{N,m}^{k+1} - U_{p1}) = \alpha_1(T_{N,m}^{k+1} - t_{c1}), \quad (2.23)$$

$$a_1\delta \frac{T_{N,m}^{k+1} - \gamma T_{N-1,m}^{k+1}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} + a_1 \frac{U_{N,m}^{k+1} - \gamma U_{N-1,m}^{k+1}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} = \beta_1(U_{p1} - U_{N,m}^{k+1}), \quad (2.24)$$

$$\lambda_1 \frac{T_{2,m}^{k+1} - \gamma T_{1,m}^{k+1}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} + \rho_0(1-\varepsilon)\beta_1^*(U_{1,m}^{k+1} - U_{p1}^*) = \alpha_1^*(T_{1,m}^{k+1} - t_{c1}^*), \quad (2.25)$$

$$a_1\delta \frac{T_{2,m}^{k+1} - \gamma T_{1,m}^{k+1}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} + a_1 \frac{U_{2,m}^{k+1} - \gamma U_{1,m}^{k+1}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} = \beta_1^*(U_{p1}^* - U_{1,m}^{k+1}), \quad (2.26)$$

$$\lambda_2 \frac{T_{n,M}^{k+1} - \gamma T_{n,M-1}^{k+1}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} + \rho_0(1-\varepsilon)\beta_2(U_{n,M}^{k+1} - U_{p2}) = \alpha_2(T_{n,M}^{k+1} - t_{c2}), \quad (2.27)$$

$$a_2\delta \frac{T_{n,M}^{k+1} - \gamma T_{n,M-1}^{k+1}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} + a_2 \frac{U_{n,M}^{k+1} - \gamma U_{n,M-1}^{k+1}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} = \beta_2(U_{p2} - U_{n,M}^{k+1}), \quad (2.28)$$

$$\lambda_2 \frac{T_{n,2}^{k+1} - \gamma T_{n,1}^{k+1}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} + \rho_0(1-\varepsilon)\beta_2^*(U_{n,1}^{k+1} - U_{p2}^*) = \alpha_2^*(T_{n,1}^{k+1} - t_{c2}^*), \quad (2.29)$$

$$a_2\delta \frac{T_{n,2}^{k+1} - \gamma T_{n,1}^{k+1}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} + a_2 \frac{U_{n,2}^{k+1} - \gamma U_{n,1}^{k+1}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} = \beta_2^*(U_{p2}^* - U_{n,1}^{k+1}), \quad (2.30)$$

Надалі використовуємо метод розщеплення – схему предиктор-коректор. Реалізація цього методу полягає у розщепленні часового інтервалу на пів інтервали, після чого вихідна задача значно спрощується та поступово дробовими кроками отримуємо сіткові функції різницевого розв'язку.

Застосуємо метод предиктор-коректор для відшукування різницевого розв'язку. У ролі предиктора використаємо метод заснований на неявній різницевій схемі, а у ролі коректора використаємо явну різницеву схему.

Часовий інтервал  $\Delta\tau$  між точками  $t^k$  і  $t^{k+1}$  на різницевій сітці розщепимо навпіл. Відповідно проміжною точкою буде точка  $t^{k+1/2}$ . Інтервал  $\frac{\Delta\tau}{2}$  між точками

$t^k$  і  $t^{k+1/2}$  знову розщепимо навпіл, в результаті чого отримаємо проміжну точку  $t^{k+1/4}$ .

На часовому відрізку  $[t^k, t^{k+1/2}]$  застосуємо метод предиктор, а на відрізку  $[t^{k+1/2}, t^{k+1}]$  - коректор.

На першому пів кроці інтервалу  $\frac{\Delta\tau}{2}$  отримаємо неявну різницеву схему, у якій врахуємо тільки похідну дробового порядку  $\beta$  за просторовою координатою  $x_1$ :

$$c\rho \frac{T_{n,m}^{k+1/4} - \alpha T_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^\alpha} = \frac{\lambda_1}{h_1^\beta} \sum_{j=0}^n q_j T_{n-j+1,m}^{k+1/4} + \varepsilon\rho_0 r \frac{U_{n,m}^{k+1/4} - \alpha U_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^\alpha}, \quad (2.31)$$

$$\frac{U_{n,m}^{k+1/4} - \alpha U_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^\alpha} = \frac{a_1}{h_1^\beta} \sum_{j=0}^n q_j U_{n-j+1,m}^{k+1/4} + \frac{a_1\delta}{h_1^\beta} \sum_{j=0}^n q_j T_{n-j+1,m}^{k+1/4}. \quad (2.32)$$

Рівняння (2.31) для зручності перепишемо у вигляді:

$$U_{n,m}^{k+1/4} = -A_1 q_0 T_{n+1,m}^{k+1/4} + \left( \frac{c\rho}{\varepsilon\rho_0 r} - A_1 q_1 \right) T_{n,m}^{k+1/4} - A_1 \sum_{j=2}^n q_j T_{n-j+1,m}^{k+1/4} + \alpha \left( U_{n,m}^k - \frac{c\rho}{\varepsilon\rho_0 r} T_{n,m}^k \right), \quad (2.33)$$

$$\text{де } A_1 = \frac{\lambda_1 \Gamma(2-\alpha)\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^\alpha}{\varepsilon\rho_0 r h_1^\beta}.$$

Граничні умови відносно просторової координати  $x_1$  (2.23), (2.25), що відповідають рівнянню (2.31) перепишемо у такому вигляді:

$$U_{N,m}^{k+1/4} = \left( \frac{\alpha_1}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_1} - B_1 \right) T_{N,m}^{k+1/4} + B_1 \gamma T_{N-1,m}^{k+1/4} + U_{p1} - \frac{\alpha_1 t_{c1}}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_1}, \quad (2.34)$$

$$U_{1,m}^{k+1/4} = \left( \frac{\alpha_1^*}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_1^*} + B_1^* \gamma \right) T_{1,m}^{k+1/4} - B_1^* T_{2,m}^{k+1/4} + U_{p1}^* - \frac{\alpha_1^* t_{c1}^*}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_1^*}, \quad (2.35)$$

$$\text{де } B_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_1 \Gamma(2-\gamma) h_1^\gamma}, \quad B_1^* = \frac{\lambda_1}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_1^* \Gamma(2-\gamma) h_1^\gamma}.$$

Запишемо у матричному вигляді співвідношення (2.33)-(2.35):

$$U_n^{k+1/4} = A T_n^{k+1/4} + \alpha U_n^k - \frac{\alpha c\rho}{\varepsilon\rho_0 r} T_n^k + \Psi_1, \quad (2.36)$$



$$\text{де } U_n^{k+1/4} = \left[ U_{1,m}^{k+1/4}, U_{2,m}^{k+1/4}, \dots, U_{N-1,m}^{k+1/4}, U_{N,m}^{k+1/4} \right]^T, \quad T_n^{k+1/4} = \left[ T_{1,m}^{k+1/4}, T_{2,m}^{k+1/4}, \dots, T_{N-1,m}^{k+1/4}, T_{N,m}^{k+1/4} \right]^T,$$

$$U_n^k = \left[ 0, U_{2,m}^k, \dots, U_{N-1,m}^k, 0 \right]^T, \quad T_n^k = \left[ 0, T_{2,m}^k, \dots, T_{N-1,m}^k, 0 \right]^T,$$

$$\Psi_1 = \left[ U_{p1}^* - \frac{\alpha_1^* t_{c1}^*}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_1^*}, 0, \dots, 0, U_{p1} - \frac{\alpha_1 t_{c1}}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_1} \right]^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} \left( \frac{\alpha_1^*}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_1^*} + B_1^* \gamma \right) & -B_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -A_1 q_2 & \left( \frac{c\rho}{\varphi_0 r} - A_1 q_1 \right) & -A_1 q_0 & 0 & \dots & 0 \\ -A_1 q_3 & -A_1 q_2 & \left( \frac{c\rho}{\varphi_0 r} - A_1 q_1 \right) & -A_1 q_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -A_1 q_{N-1} & -A_1 q_{N-2} & -A_1 q_{N-3} & \dots & \left( \frac{c\rho}{\varphi_0 r} - A_1 q_1 \right) & -A_1 q_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_1 \gamma & \left( \frac{\alpha_1}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_1} - B_1 \right) \end{pmatrix}.$$

Аналогічно запишемо у матричному вигляді (2.32), (2.24), (2.26), попередньо їх перетворивши:

$$BT_n^{k+1/4} + CU_n^{k+1/4} + \Psi_2 + \alpha U_n^k = 0, \quad (2.37)$$

$$\text{де } Z_1 = \frac{a_1 \Gamma(2-\alpha) \left( \frac{\Delta \tau}{2} \right)^\alpha}{h_1^{\beta}},$$

$$\Psi_2 = \left[ \beta_1^* \Gamma(2-\gamma) h_1^\gamma U_{p1}^*, 0, \dots, 0, \beta_1 \Gamma(2-\gamma) h_1^\gamma U_{p1} \right]^T,$$

$$B = \begin{pmatrix} a_1 \delta \gamma & -a_1 \delta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Z_1 q_2 \delta & Z_1 q_1 \delta & Z_1 q_0 \delta & 0 & \dots & 0 \\ Z_1 q_3 \delta & Z_1 q_2 \delta & Z_1 q_1 \delta & Z_1 q_0 \delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_1 q_{N-1} \delta & Z_1 q_{N-2} \delta & Z_1 q_{N-3} \delta & \dots & Z_1 q_1 \delta & Z_1 q_0 \delta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \delta \gamma & -a_1 \delta \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} (a_1 \gamma - \beta_1^* \Gamma(2-\gamma) h_1^\gamma) & -a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Z_1 q_2 & (Z_1 q_1 - 1) & Z_1 q_0 & 0 & \dots & 0 \\ Z_1 q_3 & Z_1 q_2 & (Z_1 q_1 - 1) & Z_1 q_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_1 q_{N-1} & Z_1 q_{N-2} & Z_1 q_{N-3} & \dots & (Z_1 q_1 - 1) & Z_1 q_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \gamma & -(a_1 + \beta_1 \Gamma(2-\gamma) h_1^\gamma) \end{pmatrix}.$$

Підставляємо (2.36) в (2.37) і отримуємо систему рівнянь, яку розв'язуємо відносно функції  $T(t, x_1, x_2)$ :

$$(B + CA)T_n^{k+1/4} - \frac{\alpha c \rho}{\varepsilon \rho_0 r} CT_n^k + (\alpha C + \alpha)U_n^k + \Psi_1 + \Psi_2 = 0. \quad (2.38)$$

Знайшовши множину розв'язку  $- T_{1,m}^{k+1/4}, T_{2,m}^{k+1/4}, \dots, T_{N-1,m}^{k+1/4}, T_{N,m}^{k+1/4}, (k = 0, 1, \dots, K-1)$  із (2.38), шукаємо множину розв'язку  $- U_{1,m}^{k+1/4}, U_{2,m}^{k+1/4}, \dots, U_{N-1,m}^{k+1/4}, U_{N,m}^{k+1/4}, (k = 0, 1, \dots, K-1)$  із (2.36).

На другому пів кроці інтервалу  $\frac{\Delta \tau}{2}$  запишемо неявну різницеву схему, у якій врахуємо тільки похідну дробового порядку  $\beta$  за просторовою координатою  $x_2$ :

$$c \rho \frac{T_{n,m}^{k+1/2} - \alpha T_{n,m}^{k+1/4}}{\Gamma(2-\alpha)(\Delta \tau/2)^\alpha} = \frac{\lambda_2}{h_2^\beta} \sum_{j=0}^m q_j T_{n,m-j+1}^{k+1/2} + \varepsilon \rho_0 r \frac{U_{n,m}^{k+1/2} - \alpha U_{n,m}^{k+1/4}}{\Gamma(2-\alpha)(\Delta \tau/2)^\alpha}, \quad (2.39)$$

$$\frac{U_{n,m}^{k+1/2} - \alpha U_{n,m}^{k+1/4}}{\Gamma(2-\alpha)(\Delta \tau/2)^\alpha} = \frac{a_2}{h_2^\beta} \sum_{j=0}^m q_j U_{n,m-j+1}^{k+1/2} + \frac{a_2 \delta}{h_2^\beta} \sum_{j=0}^m q_j T_{n,m-j+1}^{k+1/2}. \quad (2.40)$$

Рівняння (2.39) для зручності перепишемо у вигляді:

$$U_{n,m}^{k+1/2} = -A_2 q_0 T_{n,m+1}^{k+1/2} + \left( \frac{c \rho}{\varepsilon \rho_0 r} - A_2 q_1 \right) T_{n,m}^{k+1/2} - A_2 \sum_{j=2}^m q_j T_{n,m-j+1}^{k+1/2} + \alpha \left( U_{n,m}^{k+1/4} - \frac{c \rho}{\varepsilon \rho_0 r} T_{n,m}^{k+1/4} \right), \quad (2.41)$$

$$\text{де } A_2 = \frac{\lambda_2 \Gamma(2-\alpha)(\Delta \tau/2)^\alpha}{\varepsilon \rho_0 r h_2^\beta}.$$

Граничні умови відносно просторової координати  $x_2$  (2.27), (2.29), що відповідають рівнянню (2.39) перепишемо у такому вигляді:

$$U_{n,M}^{k+1/2} = \left( \frac{\alpha_2}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_2} - B_2 \right) T_{n,M}^{k+1/2} + B_2 \gamma T_{n,M-1}^{k+1/2} + U_{p2} - \frac{\alpha_2 t c_2}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_2}, \quad (2.42)$$

$$U_{n,1}^{k+1/2} = \left( \frac{\alpha_2^*}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_2^*} + B_2^* \gamma \right) T_{n,1}^{k+1/2} - B_2^* T_{n,2}^{k+1/4} + U_{p2}^* - \frac{\alpha_2^* t c_2^*}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_2^*}, \quad (2.43)$$

$$\text{де } B_2 = \frac{\lambda_2}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_2 \Gamma(2-\gamma) h_2^\gamma}, \quad B_2^* = \frac{\lambda_2}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_2^* \Gamma(2-\gamma) h_2^\gamma}.$$

Запишемо в матричному вигляді співвідношення (2.41)-(2.43):

$$U_m^{k+1/2} = G T_m^{k+1/2} + \alpha U_m^{k+1/4} - \frac{\alpha c \rho}{\varepsilon \rho_0 r} T_m^{k+1/4} + \Phi_1, \quad (2.44)$$

$$\text{де } U_m^{k+1/2} = \left[ U_{n,1}^{k+1/2}, U_{n,2}^{k+1/2}, \dots, U_{n,M-1}^{k+1/2}, U_{n,M}^{k+1/2} \right]^T, \quad T_m^{k+1/2} = \left[ T_{n,1}^{k+1/2}, T_{n,2}^{k+1/2}, \dots, T_{n,M-1}^{k+1/2}, T_{n,M}^{k+1/2} \right]^T,$$

$$U_m^{k+1/4} = \left[ 0, U_{n,1}^{k+1/4}, \dots, U_{n,M-1}^{k+1/4}, 0 \right]^T, \quad T_m^{k+1/4} = \left[ 0, T_{n,1}^{k+1/4}, \dots, T_{n,M-1}^{k+1/4}, 0 \right]^T,$$

$$\Phi_1 = \left[ U_{p2}^* - \frac{\alpha_2^* t_{c2}^*}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_2^*}, 0, \dots, 0, U_{p2} - \frac{\alpha_2 t_{c2}}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_2} \right]^T,$$

$$G = \begin{pmatrix} \left( \frac{\alpha_2^*}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_2^*} + B_2^* \gamma \right) & -B_2^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -A_2 q_2 & \left( \frac{c\rho}{\varphi_0 r} - A_2 q_1 \right) & -A_2 q_0 & 0 & \dots & 0 \\ -A_2 q_3 & -A_2 q_2 & \left( \frac{c\rho}{\varphi_0 r} - A_2 q_1 \right) & -A_2 q_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -A_2 q_{M-1} & -A_2 q_{M-2} & -A_2 q_{M-3} & \dots & \left( \frac{c\rho}{\varphi_0 r} - A_2 q_1 \right) & -A_2 q_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_2 \gamma & \left( \frac{\alpha_2}{\rho_0(1-\varepsilon)\beta_2} - B_2 \right) \end{pmatrix}.$$

Аналогічно запишемо у матричному вигляді співвідношення (2.40), (2.28), (2.30), попередньо їх перетворивши:

$$WT_m^{k+1/2} + VU_m^{k+1/2} + \Phi_2 + \alpha U_m^{k+1/4} = 0, \quad (2.45)$$

$$W = \begin{pmatrix} a_2 \delta \gamma & -a_2 \delta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Z_2 q_2 \delta & Z_2 q_1 \delta & Z_2 q_0 \delta & 0 & \dots & 0 \\ Z_2 q_3 \delta & Z_2 q_2 \delta & Z_2 q_1 \delta & Z_2 q_0 \delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_2 q_{M-1} \delta & Z_2 q_{M-2} \delta & Z_2 q_{M-3} \delta & \dots & Z_2 q_1 \delta & Z_2 q_0 \delta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 \delta \gamma & -a_2 \delta \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} (a_2 \gamma - \beta_2^* \Gamma(2-\gamma) h_2^\gamma) & -a_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Z_2 q_2 & (Z_2 q_1 - 1) & Z_2 q_0 & 0 & \dots & 0 \\ Z_2 q_3 & Z_2 q_2 & (Z_2 q_1 - 1) & Z_2 q_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_2 q_{M-1} & Z_2 q_{M-2} & Z_2 q_{M-3} & \dots & (Z_2 q_1 - 1) & Z_2 q_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 \gamma & -(a_2 + \beta_2 \Gamma(2-\gamma) h_2^\gamma) \end{pmatrix},$$

$$Z_1 = \frac{a_2 \Gamma(2-\alpha) (\Delta \tau / 2)^\alpha}{h_2^\beta}, \quad \Phi_2 = \left[ \beta_2^* \Gamma(2-\gamma) h_2^\gamma U_{p2}^*, 0, \dots, 0, \beta_2 \Gamma(2-\gamma) h_2^\gamma U_{p2} \right]^T.$$

Підставляємо (2.44) в (2.45) і отримуємо систему рівнянь, яку розв'язуємо відносно функції  $T$ :

$$(W + VG) T_m^{k+1/2} - \frac{\alpha c \rho}{\varphi_0 r} V T_m^{k+1/4} + (\alpha V + \alpha) U_m^{k+1/4} + \Phi_1 + \Phi_2 = 0. \quad (2.46)$$

Аналогічно як і на першому пів кроці, на другому пів кроці отримаємо дві системи, в результаті обчислень яких отримаємо множину розв'язку відносно  $T$  –  $T_{n,1}^{k+1/2}, T_{n,2}^{k+1/2}, \dots, T_{n,M-1}^{k+1/2}, T_{n,M}^{k+1/2}, (k=0,1,\dots,K-1)$  із співвідношення (2.46), а також із співвідношення (2.44) множину розв'язку відносно  $U$  –  $U_{n,1}^{k+1/2}, U_{n,2}^{k+1/2}, \dots, U_{n,M-1}^{k+1/2}, U_{n,M}^{k+1/2}, (k=0,1,\dots,K-1)$ .

Для завершення розв'язку на усьому інтервалі  $\Delta t$  використаємо різницеве співвідношення, що називається коректором, який в свою чергу реалізований на явній різницевій схемі (2.17), (2.18):

$$c\rho \frac{T_{n,m}^{k+1} - \alpha T_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^\alpha} = \frac{\lambda_1}{h_1^\beta} \sum_{j=0}^n q_j T_{n-j+1,m}^{k+1/2} + \frac{\lambda_2}{h_2^\beta} \sum_{j=0}^m q_j T_{n,m-j+1}^{k+1/2} + \varepsilon\rho_0 r \frac{U_{n,m}^{k+1} - \alpha U_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^\alpha}, \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{U_{n,m}^{k+1} - \alpha U_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^\alpha} &= \frac{a_1}{h_1^\beta} \sum_{j=0}^n q_j U_{n-j+1,m}^{k+1/2} + \frac{a_2}{h_2^\beta} \sum_{j=0}^m q_j U_{n,m-j+1}^{k+1/2} + \\ &+ \frac{a_1\delta}{h_1^\beta} \sum_{j=0}^n q_j T_{n-j+1,m}^{k+1/2} + \frac{a_2\delta}{h_2^\beta} \sum_{j=0}^m q_j T_{n,m-j+1}^{k+1/2}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Отже, із (2.48) знаходимо множину розв'язку –  $\{k = \overline{0, K-1}; n = \overline{1, N}; m = \overline{1, M} : U_{n,m}^{k+1}\}$ , а із (2.47) отримаємо множину розв'язку –  $\{k = \overline{0, K-1}; n = \overline{1, N}; m = \overline{1, M} : T_{n,m}^{k+1}\}$ .

Роль предиктора у схемі предиктор-коректор забезпечує абсолютну стійкість співвідношень (2.39), (2.40), (2.31) та (2.32), а роль коректора (2.47), (2.48) – підвищує порядок апроксимації схеми предиктор-коректор за часом  $t$ .

## 2.4. Алгоритмічна реалізація чисельного методу

Для зручності та простоти побудови програмної реалізації для взаємозв'язаної системи диференціальних рівнянь у частинних похідних із дробовим порядком за часом та просторовими координатами (2.1)-(2.2) побудуємо алгоритм розв'язку методу предиктор-коректор.

Алгоритм розв'язку методу предиктор коректор:

1. На часовому кроці  $k=0$  реалізуємо цикл по  $n=1,\dots,N$  та цикл по  $m=1,\dots,M$ , звідки із початкових умов (2.21), (2.22) знайдемо значення функцій  $T_{n,m}^0, U_{n,m}^0$ .
2. При умові, що  $0 \leq k < K$  здійснюємо наступні операції:

## 2.1. РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ПРЕДИКТОР.

2.1.1. При  $n = 1, \dots, N; m = 1, \dots, M$  здійснюємо цикл по  $k = k + \frac{1}{4}$ ;

2.1.2. Знаходимо  $T_{n,m}^{k+\frac{1}{4}}$  із співвідношення (2.38) та  $U_{n,m}^{k+\frac{1}{4}}$  із співвідношення (2.36);

2.1.3. При  $n = 1, \dots, N; m = 1, \dots, M$  здійснюємо цикл по  $k = k + \frac{1}{2}$ ;

2.1.4. Знаходимо  $T_{n,m}^{k+\frac{1}{2}}$  із співвідношення (2.46) та  $U_{n,m}^{k+\frac{1}{2}}$  із співвідношення (2.44);

## 2.2. РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ КОРЕКТОР.

2.2.1. При  $n = 2, \dots, N-1; m = 2, \dots, M-1$  здійснюємо цикл по  $k = k + 1$ ;

2.2.2. Знаходимо  $U_{n,m}^{k+1}$  із співвідношення (2.48) та  $T_{n,m}^{k+1}$  із співвідношення (2.47);

2.2.3. Із граничних умов (2.23), (2.25) знайдемо  $T_{N,m}^{k+1}, T_{1,m}^{k+1}$ ;

2.2.4. Із граничних умов (2.24), (2.26) знайдемо  $U_{N,m}^{k+1}, U_{1,m}^{k+1}$ ;

2.2.5. Із граничних умов (2.27), (2.29) знайдемо  $T_{n,M}^{k+1}, T_{n,1}^{k+1}$ ;

2.2.6. Із граничних умов (2.28), (2.30) знайдемо  $U_{n,M}^{k+1}, U_{n,1}^{k+1}$ .

3. Збільшуємо часовий крок на  $k = k + 1$ .

4. Повертаємося до пункту 2, після виконання умови  $0 \leq k < K$  здійснюємо реалізацію підпунктів 2.1-2.2, тобто методу предиктор-коректор. В протилежному випадку, тобто якщо не виконується умова  $0 \leq k < K$ , закінчуємо реалізацію програми.

## 2.5. Умови стійкості та збіжності

При чисельному рішенні задач неминуче виникають питання похибки, що виникають при округленні результатів. В результаті обчислення задачі (2.1)-(2.8) точний розв'язок буде відрізнятися від різницевого розв'язку на деяку величину, що називатиметься чисельною похибкою. Метою чисельного рішення будь-якої задачі при відшуканні розв'язку врахувати умови стійкості та збіжності.

На сьогодні є багато ефективних методів дослідження умов збіжності та стійкості відносно звичайних диференціальних рівнянь у частинних

похідних. Із виникненням та стрімким розвитком математичного апарату дробового диференціювання виникли нові проблеми щодо дослідження умов стійкості та збіжності для таких задач. У багатьох працях, присвячених чисельним методам розв'язку дробово-диференціальних рівнянь, питання стійкості та збіжності досліджувалось спираючись на класичні методи дослідження із врахуванням властивостей дробового диференціювання, в результаті чого було досягнуто успішних результатів.

Враховуючи праці Н. І. Нікітенко [154, 155], що були присвячені дослідженню умовам стійкості для класичних систем диференціальних рівнянь у частинних похідних, встановимо умови стійкості для математичної моделі неізотермічного вологоперенесення (2.1)-(2.2). Зокрема, для визначення умов стійкості отриманих різницевих рівнянь зв'язаного тепломасоперенесення скористаємся методом умовного задання деяких відомих функцій системи [155].

Оскільки предиктор реалізований на неявній схемі, а вона у свою чергу є абсолютно стійкою, то питання стійкості для розв'язку задачі (2.1)-(2.8) залежить від коректора, що реалізований на явній різницевій схемі.

Визначимо для явної схеми, для співвідношень (2.47), (2.48) умови стійкості.

Запишемо співвідношення (2.48) у такому вигляді:

$$\frac{U_{n,m}^{k+1} - \alpha U_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\Delta\tau^\alpha} = \frac{a_1}{h_1^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^n q_j \left( U_{n-j+1,m}^{k+\frac{1}{2}} + \delta T_{n-j+1,m}^{k+\frac{1}{2}} \right) + \frac{a_2}{h_2^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^m q_j \left( U_{n,m-j+1}^{k+\frac{1}{2}} + \delta T_{n,m-j+1}^{k+\frac{1}{2}} \right), \quad (2.49)$$

Зведемо рівняння (2.49) до такого різницевого співвідношення:

$$W_{(opt)n,m}^{k+1} - \alpha W_{(opt)n,m}^k = \frac{a_1 \Gamma(2-\alpha) \Delta\tau^\alpha}{h_1^{\tilde{\beta}}} (1+\delta) \sum_{j=0}^n q_j W_{(opt)n-j+1,m}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{a_2 \Gamma(2-\alpha) \Delta\tau^\alpha}{h_2^{\tilde{\beta}}} (1+\delta) \sum_{j=0}^m q_j W_{(opt)n,m-j+1}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (2.50)$$

де  $W_{(opt)} = U, T$ .

Для знаходження необхідних умов стійкості рівняння (2.50) використаємо метод інтеграла Фур'є [154]. Розв'язок рівняння (2.50) запишемо у вигляді

добутку двох функцій, одна з яких залежить від часу, а друга – від просторових координат:

$$W_{(opt)n,m}^k = \xi^k \exp \{i\omega_1 n h_1 + i\omega_2 m h_2\}, \quad (2.51)$$

де  $i$  – уявна одиниця,  $\omega_1, \omega_2$  – деякі дійсні числа.

Після підстановки (2.51) в (2.50), отримаємо:

$$\begin{aligned} \sqrt{\xi} - \frac{\alpha}{\sqrt{\xi}} = & -\frac{a_1 \Gamma(2-\alpha) \Delta \tau^\alpha}{h_1^{\tilde{\beta}}} (1+\delta) \left(4 \sin^2 \frac{\omega_1 h_1}{2} + \tilde{\beta} - 2\right) - \\ & -\frac{a_2 \Gamma(2-\alpha) \Delta \tau^\alpha}{h_2^{\tilde{\beta}}} (1+\delta) \left(4 \sin^2 \frac{\omega_2 h_2}{2} + \tilde{\beta} - 2\right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Додамо до обидвох частин виразу (2.52)  $\alpha$ , в результаті чого отримаємо:

$$\begin{aligned} \sqrt{\xi} - \frac{\alpha}{\sqrt{\xi}} + \alpha = & \alpha - \frac{a_1 \Gamma(2-\alpha) \Delta \tau^\alpha}{h_1^{\tilde{\beta}}} (1+\delta) \left(4 \sin^2 \frac{\omega_1 h_1}{2} + \tilde{\beta} - 2\right) - \\ & -\frac{a_2 \Gamma(2-\alpha) \Delta \tau^\alpha}{h_2^{\tilde{\beta}}} (1+\delta) \left(4 \sin^2 \frac{\omega_2 h_2}{2} + \tilde{\beta} - 2\right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Нехай  $\sqrt{\xi} - \frac{\alpha}{\sqrt{\xi}} + \alpha = \lambda$ . Тоді виконується наступне співвідношення  $|\lambda| \leq 1$ , що є необхідною умовою стійкості рівняння (2.50). А ця умова задовольняється, коли:

$$\Delta \tau^\alpha \left( \frac{(1+\delta)a_1}{h_1^{\tilde{\beta}}} + \frac{(1+\delta)a_2}{h_2^{\tilde{\beta}}} \right) \leq \frac{(\alpha+1)}{(2+\tilde{\beta})\Gamma(2-\alpha)}. \quad (2.54)$$

Аналогічно перепишемо рівняння (2.47) у вигляді:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\varepsilon \rho_0 r}{c \rho}\right) (W_{(opt)n,m}^{k+1} - \alpha W_{(opt)n,m}^k) = & \frac{\lambda_1 \Gamma(2-\alpha) \Delta \tau^\alpha}{c \rho h_1^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^n q_j W_{(opt)n-j+1,m}^{k+\frac{1}{2}} + \\ & + \frac{\lambda_2 \Gamma(2-\alpha) \Delta \tau^\alpha}{c \rho h_2^{\tilde{\beta}}} \sum_{j=0}^m q_j W_{(opt)n,m-j+1}^{k+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

де  $W_{(opt)} = U, T$ .

Співвідношення (2.51) описує розв'язок (2.55). А тому, підставляючи (2.51) в (2.55) отримаємо:

$$\begin{aligned} \sqrt{\xi} - \frac{\alpha}{\sqrt{\xi}} + \alpha = & \alpha - \frac{\lambda_1 \Gamma(2-\alpha) \Delta \tau^\alpha}{h_1^{\tilde{\beta}} (c \rho - \varepsilon \rho_0 r)} \left(4 \sin^2 \frac{\omega_1 h_1}{2} + \tilde{\beta} - 2\right) - \\ & - \frac{\lambda_2 \Gamma(2-\alpha) \Delta \tau^\alpha}{h_2^{\tilde{\beta}} (c \rho - \varepsilon \rho_0 r)} \left(4 \sin^2 \frac{\omega_2 h_2}{2} + \tilde{\beta} - 2\right). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Якщо  $\sqrt{\xi} - \frac{\alpha}{\sqrt{\xi}} + \alpha = \lambda$ , тоді виконується наступне співвідношення  $|\lambda| \leq 1$ , що є необхідною умовою стійкості рівняння (2.55). А ця умова задовольняється, коли:

$$\Delta \tau^\alpha \left( \frac{\lambda_1}{(c\rho - \varepsilon\rho_0 r) h_1^{\tilde{\beta}}} + \frac{\lambda_2}{(c\rho - \varepsilon\rho_0 r) h_2^{\tilde{\beta}}} \right) \leq \frac{(\alpha+1)}{(2+\tilde{\beta})\Gamma(2-\alpha)}. \quad (2.57)$$

Загальною умовою стійкості для рівнянь (2.47), (2.48) буде:

$$\Delta \tau^\alpha \left( \frac{C_1}{h_1^{\tilde{\beta}}} + \frac{C_2}{h_2^{\tilde{\beta}}} \right) \leq \frac{(\alpha+1)C_3}{(2+\tilde{\beta})\Gamma(2-\alpha)}, \quad (2.58)$$

де  $C_1 = \lambda_1, a_1; C_2 = \lambda_2, a_2; C_3 = (c\rho - \varepsilon\rho_0 r) \frac{1}{(1+\delta)}$ .

Порівняємо умову стійкості (2.58) із умовою стійкості отриманою у роботі [101]. У вище вказаній статті було розглянуто рівняння такого виду:

$$D_{0t}^\alpha u = C_x D_{0x}^{\tilde{\beta}} u + C_y D_{0y}^{\tilde{\beta}} u + f(t, x, y), \quad (t, x, y) \in \{0 < x < a, 0 < y < b\} \times (0, T], \quad (2.59)$$

де  $u = u(t, x, y)$  – шукана функція,  $f(t, x, y)$  – задана функція,  $0 < \alpha \leq 1, 0 < \tilde{\beta} \leq 2$ ,  $D_{0t}^\alpha, D_{0x}^{\tilde{\beta}}, D_{0y}^{\tilde{\beta}}$  – часткові дробові похідні Рімана-Ліувілля.

Явна різницева схема для рівняння (2.59) буде [101]:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n,m}^{(k+1)} - \alpha u_{n,m}^{(k)}}{\Gamma(2-\alpha)t^\alpha} &= \frac{C_x}{h_x^{\tilde{\beta}}} \left( u_{n+1,m}^{(k)} - \tilde{\beta} u_{n,m}^{(k)} + \sum_{j=2}^{n+1} q_j u_{n-j+1,m}^{(k)} \right) + \\ &+ \frac{C_y}{h_y^{\tilde{\beta}}} \left( u_{n,m+1}^{(k)} - \tilde{\beta} u_{n,m}^{(k)} + \sum_{j=2}^{m+1} q_j u_{n,m-j+1}^{(k)} \right) + f_{n,m}^{(k)}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Згідно теорем 1 із [90], явна різницева схема (2.60) стійка тоді, коли виконується така умова:

$$t^\alpha \left( \frac{C_x}{h_x^{\tilde{\beta}}} + \frac{C_y}{h_y^{\tilde{\beta}}} \right) \leq \frac{(\alpha+1)}{(2+\tilde{\beta})\Gamma(2-\alpha)}. \quad (2.61)$$

Порівнявши співвідношення (2.54), (2.57) та (2.61) можна дійти висновку, що ці умови збігаються між собою, єдиною відмінністю будуть різні значення біля  $\frac{1}{h_x^{\tilde{\beta}}}, \frac{1}{h_x^{\tilde{\beta}}}$ , а це в свою чергу зумовлено тим, що в правій частині вихідних



рівнянь біля дробових похідних порядку  $\beta$  знаходяться різні вирази, що містять коефіцієнти теплопровідності (вологопровідності).

Здійснено порівняння отриманих результатів із дослідженнями, які отримані у працях [154], [155]. Таким чином, у [155] зведено систему з трьох диференціальних рівнянь у частинних похідних до наступного лінійного різницевого рівняння:

$$(1 + \Omega)\delta_t W - \Omega\delta_t W^{n-1} = a_1\delta_{11}W + a_2\delta_{22}W + a_3\delta_{33}W + R, \quad (2.62)$$

де  $W = U_{ж}, U_n, T; R = const; \Omega$  - часовий параметр різницевого рівнянь,

В результаті отримано таку умову стійкості [130]:

$$l \leq \frac{1}{2 \left( \frac{a_1}{(1+2\Omega)h_1^2} + \frac{a_2}{(1+2\Omega)h_2^2} + \frac{a_3}{(1+2\Omega)h_3^2} \right)}. \quad (2.63)$$

Якщо в співвідношеннях (2.54), (2.57) покласти, що  $\alpha = 1, \beta = 2$ , то отримаємо:

$$\Delta\tau \leq \frac{1}{2 \left( \frac{(1+\delta)a_1}{h_1^2} + \frac{(1+\delta)a_2}{h_2^2} \right)}, \quad (2.64)$$

$$\Delta\tau \leq \frac{1}{2 \left( \frac{\lambda_1}{(c\rho - \varepsilon\rho_0r)h_1^2} + \frac{\lambda_2}{(c\rho - \varepsilon\rho_0r)h_2^2} \right)}. \quad (2.65)$$

Отже, при  $\alpha = 1, \beta = 2$ , отримуємо умови стійкості для класичних рівнянь теплопровідності [154]. А звідси випливає, що для явної різницевої схеми коректор знайдено правильно умову стійкості.

## 2.6. Висновки до 2 розділу

- Побудовано двовимірну математичну модель тепломасообмінних процесів капілярно-пористих матеріалів під час сушіння, що дає можливість враховувати еридитарність та самоорганізацію матеріалу.
- На основі математичного апарату дробового інтегро-диференціювання отримано скінченно-різницевої схеми для апроксимації математичної моделі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною

структурою у процесі сушіння, що дає змогу провести реалізацію чисельного методу.

- Розроблено алгоритм чисельної реалізації двовимірної математичної моделі теплообмінних процесів капілярно-пористих матеріалів з урахуванням ефектів «пам'яті» та самоорганізації під час сушіння, що базується на використанні методу предиктор-коректор та скінченних різниць. Застосування алгоритму дозволить обчислити динаміку температури та вологовмісту деревини у процесі сушіння.
- Встановлено умови стійкості та збіжності явної різницевої схеми математичної моделі тепло- та вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів під час сушіння, які шляхом порівняння узгоджуються із результатами інших досліджень.

## РОЗДІЛ 3

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ДЕФОРМАЦІЙНО-РЕЛАКСАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ПІД ЧАС СУШІННЯ ДЕРЕВИНИ З УРАХУВАННЯМ ЇЇ ФРАКТАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ

У цьому розділі побудовано одновимірні реологічні моделі Фойгта, Кельвіна та Максвелла, які описують деформаційно-релаксаційні процеси з врахуванням ефекту «пам'яті» та самоорганізації деревини під час сушіння. Представлені моделі у диференціальній формі враховуючи використання аналітичного методу перетворення Лапласа та означення, властивості дробових похідних та інтегралів, дали можливість отримати вирази у інтегральній формі, що описують напружено-деформаційний стан капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння. Отримано аналітичні вирази для термодинамічних функцій, а саме ентропію, вільну енергію та функцію розсіювання, які дозволяють враховувати фрактальність матеріалу. Результати третього розділу опубліковані у [71, 72, 74, 76, 184, 187, 189].

#### 3.1. Дробово-диференціальна реологічна модель Фойгта

Моделювання деформаційно-релаксаційних процесів та систем базується на механічних властивостях досліджуваного середовища, котрі можна з достатньою точністю описати на основі комбінації трьох основних властивостей: пружності, в'язкості та пластичності. В основі пружного елемента як правило лежить закон Гука, а в'язкого – закон Ньютона.

Лінійне співвідношення між напруженням  $\sigma$  та деформацією  $\varepsilon$  можна подати у такому вигляді [201]:

$$\sigma(t) = \frac{\kappa_\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{\dot{\varepsilon}(t-\xi)}{\xi^\alpha} d\xi = \kappa_\alpha D_t^\alpha \varepsilon(t), \quad (3.1)$$

де  $t$  – час,  $\kappa_\alpha$  – стала, що залежить від властивостей речовини ( $\kappa_\alpha > 0$ ),  $\alpha$  – фрактальна розмірність системи ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ),  $\Gamma(\zeta)$  – Гамма-функція, що визначається

визначається формулою –  $\Gamma(\zeta) = \int_0^{\infty} x^{\zeta-1} e^{-x} dx$ ,  $D_t^\alpha$  – дробова похідна по часу  $t$  з порядком  $\alpha$ .

Дробова похідна порядку  $\alpha$  від функції  $f(t)$  визначається формулою [59]:

$$D_t^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(t')}{(t-t')^{\alpha-n+1}} dt', \quad 0 \leq n-1 < \alpha < n \quad (n=1,2,\dots). \quad (3.2)$$

Таким чином в'язко-пружне середовище займає проміжне положення між в'язкою непружною та абсолютно пружною нев'язкою матеріями, а співвідношення (3.1) розглядається як можливий спосіб інтерполяції між ними [201]. При  $\alpha=0$  отримаємо закон Гука, а при  $\alpha=1$  закон Ньютона. Стала  $\kappa_\alpha$  для закону Гука прийме вигляд –  $E$ , (де  $E$  – модуль пружності); для закону Ньютона  $\kappa_\alpha$  буде мати вигляд –  $\eta = E\tau^\alpha$ , (де  $\eta$  – в'язкість,  $\tau$  – час релаксації ( $\tau > 0$ )).

Фрактальна модель Фойгта характеризується паралельним з'єднанням пружного  $H$  та в'язкого  $N$  елемента, зображена на рис.3.1. Таке розташування компонент моделі зумовлює те, що деформації  $\varepsilon$  в кожного із компонентів однакові, а напруження  $\sigma$  відповідно різні.

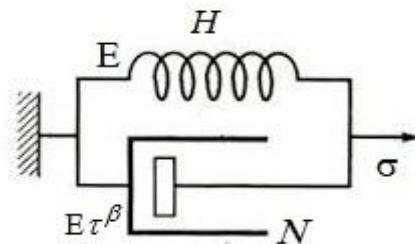


Рисунок 3.1 – Фрактальна модель Фойгта

В реологічному тілі Фойгта загальне зусилля складається з суми зусиль пружного елемента  $H$  та в'язкого елемента  $N$  [173]. Враховуючи фрактальність середовища напруження для пружного  $\sigma_H(t)$  та в'язкого  $\sigma_N(t)$  елемента можна записати таким чином:

$$\sigma_H(t) = E\tau^\alpha D_t^\alpha \varepsilon(t), \quad (3.3)$$

$$\sigma_N(t) = \eta D_t^\beta \varepsilon(t) = E\tau^\beta D_t^\beta \varepsilon(t). \quad (3.4)$$

Якщо у співвідношеннях (3.3) та (3.4) фрактальні параметри  $\alpha$ ,  $\beta$  приймуть відповідні значення такі, що  $\alpha=0$ ,  $\beta=1$ , то співвідношення (3.3) перетвориться у класичний закон Гука для пружного елемента, а співвідношення (3.4) у закон Ньютона для в'язкого елемента відповідно.

Враховуючи вище наведені твердження рівняння дробово-диференціального типу, що описуватиме фрактальну модель Фойгта матиме вигляд:

$$\sigma(t) = E \left( \tau^\alpha D_t^\alpha \varepsilon(t) + \tau^\beta D_t^\beta \varepsilon(t) \right), \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq 1. \quad (3.5)$$

Класичну реологічну модель Фойгта можна отримати із виразу (3.5) аналогічно якщо припустити, що дробово-диференціальні параметри приймуть значення  $\alpha=0$ ,  $\beta=1$ .

У застосуванні лінійної теорії в'язко-пружності використовуються математичні моделі зв'язку між напруженнями і деформаціями в інтегральній формі з використанням ядер повзучості і релаксації [43]. Враховуючи необхідність таких аналітичних співвідношень для визначення напруження та деформації дробово-диференціальної стандартної реологічної моделі Фойгта використаємо метод перетворення Лапласа, а також означення та властивості дробових похідних.

Знайдемо розв'язок відносно деформації  $\varepsilon(t)$  для моделі Фойгта. Для цього виконаємо перетворення Лапласа. В частковому випадку перетворення Лапласа дробової похідної  $\nu$ , (де  $0 < \nu < 1$ ) функції  $f^{(\nu)}(x)$  набуде такого вигляду [201]:

$$\hat{f}^{(\nu)}(\lambda) = \lambda^\nu \hat{f}(\lambda) - f^{(\nu-1)}(0+), \quad (3.6)$$

$$\text{де } f^{(\nu-1)}(0+) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^\nu} d\xi.$$

Зауважимо, що для достатньо хороших функцій  $f^{(\nu-1)}(0+)=0$  [201]. Звідси вираз (3.6) значно спрощується та відповідно отримаємо:

$$\hat{f}^{(\nu)}(\lambda) = \lambda^\nu \hat{f}(\lambda), \quad 0 < \nu < 1. \quad (3.7)$$

Застосувавши співвідношення (3.6) та виконавши перетворення Лапласа щодо рівняння (3.5) отримаємо:

$$(\lambda^\beta + \tau^{\alpha-\beta} \lambda^\alpha) \hat{\varepsilon}(\lambda) = \hat{h}_F(\lambda) + c_F, \quad (3.8)$$

де  $\hat{h}_F(\lambda) = \hat{\sigma}(\lambda) / E\tau^\beta$  – лапласовий образ перетворення функції  $h_F(t)$  для моделі,  $c_F = \varepsilon^{(\beta-1)}(0+) + \tau^{\alpha-\beta} \varepsilon^{(\alpha-1)}(0+)$  – деякий коефіцієнт для моделі Фойгта.

Рівняння (3.8) для зручності перепишемо:

$$\hat{\varepsilon}(\lambda) = \frac{\hat{h}_F(\lambda)}{\lambda^\beta + \tau^{\alpha-\beta} \lambda^\alpha} + \frac{c_F}{\lambda^\beta + \tau^{\alpha-\beta} \lambda^\alpha}. \quad (3.9)$$

Для здійснення оберненого перетворення Лапласа зручно подати вираз:

$$\frac{1}{\lambda^\beta + \tau^{\alpha-\beta} \lambda^\alpha} = \frac{\lambda^{-\beta}}{1 + \tau^{\alpha-\beta} \lambda^{\alpha-\beta}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-\tau^{\alpha-\beta})^j \lambda^{(\alpha-\beta)j-\beta}. \quad (3.10)$$

Тоді

$$L^{-1} \left\{ \frac{\lambda^{-\beta}}{1 + \tau^{\alpha-\beta} \lambda^{\alpha-\beta}} \right\} (t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-\tau^{\alpha-\beta})^j L^{-1} \left\{ \lambda^{(\alpha-\beta)j-\beta} \right\} (t), \quad (3.11)$$

де  $L^{-1}$  – оператор оберненого перетворення Лапласа.

Використовуючи співвідношення  $L^{-1} \left\{ \lambda^{-\gamma} \right\} (x) = \frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}$  [201], для даного випадку

отримаємо:

$$L^{-1} \left\{ \frac{\lambda^{-\beta}}{1 + \tau^{\alpha-\beta} \lambda^{\alpha-\beta}} \right\} (t) = t^{\beta-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\tau^{\alpha-\beta} t^{\beta-\alpha})^j}{\Gamma((\beta-\alpha)j + \beta)}. \quad (3.12)$$

Для подальших перетворень скористаємось двопараметричною функцією Міттаг – Леффлера (1.17). Тоді (3.12) зможемо переписати у вигляді:

$$L^{-1} \left\{ \frac{\lambda^{-\beta}}{1 + \tau^{\alpha-\beta} \lambda^{\alpha-\beta}} \right\} (t) = t^{\beta-1} E_{\beta-\alpha, \beta} \left( -\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\beta-\alpha} \right). \quad (3.13)$$

Найважливішою властивістю інтегрального перетворення вважається наявність спеціальної операції – згортки. Теорема про згортку двох функцій сформулюється наступним чином [201]:

$$L\{f * g(x)\}(\lambda) = L\{f(x)\}(\lambda) \cdot L\{g(x)\}(\lambda) = \hat{f}(\lambda) \hat{g}(\lambda). \quad (3.14)$$

У випадку перетворення Лапласа згортка двох функцій  $f(x)$  та  $g(x)$  визначається формулою [201]:

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-\xi) g(\xi) d\xi. \quad (3.15)$$

Враховуючи співвідношення (3.14) та (3.15) отримаємо наступний результат:

$$\varepsilon_F(t) = c_F t^{\beta-1} E_{\beta-\alpha, \beta} \left( - \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\beta-\alpha} \right) + \frac{1}{E \tau^\beta} \int_0^t (t-\xi)^{\beta-1} E_{\beta-\alpha, \beta} \left( - \left( \frac{t-\xi}{\tau} \right)^{\beta-\alpha} \right) \sigma(\xi) d\xi, \quad (3.16)$$

де  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ .

Вираз (3.16) описує деформацію для фрактальної моделі Фойгта та представлений у інтегральній формі.

Для аналітичного представлення в інтегральній формі напруження  $\sigma(t)$  для дробово-диференціальної моделі Фойгта скористаємося співвідношенням (3.2). В частковому випадку, коли порядок фрактальної похідної  $\nu$  знаходиться у межах таких, що  $0 \leq \nu < 1$ ; похідну фрактального порядку  $\nu$  функції  $f(x)$  можна записати таким чином [201]:

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} D_x \int_0^x (x-\xi)^{-\nu} f(\xi) d\xi. \quad (3.17)$$

де  $D_t$  – цілочисельна похідна по змінній  $x$ .

Враховуючи вище наведені співвідношення (3.2), (3.17) та застосувавши їх до рівняння (3.5) отримаємо наступний вираз, що описуватиме напруження для фрактальної моделі Фойгта :

$$\sigma_F(t) = E D_t \int_0^t \left( \frac{\tau^\alpha (t-\xi)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\tau^\beta (t-\xi)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \right) \varepsilon(\xi) d\xi, \quad (3.18)$$

де дробово-диференціальні значення  $\alpha, \beta \in [0, 1)$ .

Із наведених вище виразів для напруження  $\sigma(t)$  та деформації  $\varepsilon(t)$  наведемо для дробово-диференціальної моделі Фойгта ядра повзучості  $\Pi(t-z)$  та релаксації  $R(t-z)$ , які входять в інтегральні рівняння моделі:

$$\Pi_F(t-z) = \frac{1}{E \tau^\beta} (t-z)^{\beta-1} E_{\beta-\alpha, \beta} \left( - \frac{(t-z)^{\beta-\alpha}}{\tau^{\beta-\alpha}} \right), \quad (3.19)$$

$$R_F(t-z) = E \left( \frac{\tau^\alpha (t-z)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\tau^\beta (t-z)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \right). \quad (3.20)$$

### 3.2. Дробово-диференціальна реологічна модель Кельвіна

Реологічна модель Кельвіна складається із послідовного з'єднання тіла Фойгта  $F$  та пружного елемента  $H$ . Оскільки елементи з'єднані послідовно, то деформації цих елементів різні, а напруження відповідно однакові.

Для побудови фрактального рівняння, що описуватиме модель Кельвіна, зображену на рис. 3.2, скористаємося вище наведеними міркуваннями та законами Гука і Ньютана для класичного випадку. Використаємо наступний підхід: побудуємо класичну модель Кельвіна та враховуючи відповідні співвідношення переходу побудуємо дробово-диференціальну модель.

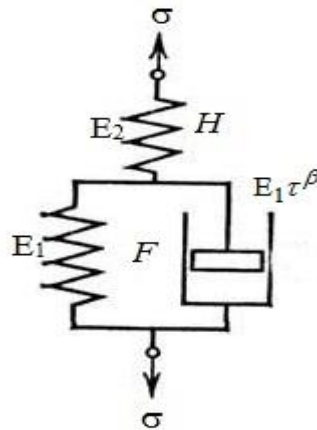


Рисунок 3.2 – Фрактальна модель Кельвіна

Таким чином, пружний елемент  $H$  можна описати використовуючи класичний закон Гука:

$$\varepsilon_H(t) = \frac{\sigma(t)}{E_2}. \quad (3.21)$$

Із співвідношення (3.5) при  $\alpha=0$  та  $\beta=1$ , отримаємо класичне диференціальне рівняння, що описує реологічну модель Фойгта:

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon_F(t) + E_1 \tau D_t \varepsilon_F(t). \quad (3.22)$$

Виразимо із виразу (3.22)  $D_t \varepsilon_F(t)$  та отримаємо:

$$D_t \varepsilon_F(t) = \frac{\sigma(t)}{E_1 \tau} - \frac{1}{\tau} \varepsilon_F(t). \quad (3.23)$$

Оскільки загальна деформація дорівнює сумі деформацій пружного елемента та тіла Фойгта, можна записати, що:



$$\varepsilon(t) = \varepsilon_F(t) + \varepsilon_H(t), \quad (3.24)$$

та похідна від суми деформацій:

$$D_t \varepsilon(t) = D_t \varepsilon_F(t) + D_t \varepsilon_H(t). \quad (3.25)$$

Із виразу (3.24) отримаємо:

$$\varepsilon_F(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_H(t) = \varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E_2}, \quad (3.26)$$

та підставимо замість  $\varepsilon_F(t)$  у співвідношення (3.23):

$$D_t \varepsilon_F(t) = \frac{\sigma(t)}{E_1 \tau} - \frac{1}{\tau} \left( \varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E_2} \right). \quad (3.27)$$

Враховуючи формули (3.21), (3.25), (3.27) та після елементарних математичних перетворень можна записати:

$$(E_1 + E_2)\sigma(t) + E_1 \tau D_t \sigma(t) = E_1 E_2 (\varepsilon(t) + \tau D_t \varepsilon(t)). \quad (3.28)$$

Співвідношення (3.28) описує класичну реологічну модель Кельвіна. Для отримання моделі дробово-диференціального типу введемо наступну заміну:

$$\tau D_t \sigma(t) \Rightarrow \tau^\alpha D_t^\alpha \sigma(t), \quad \tau D_t \varepsilon(t) \Rightarrow \tau^\beta D_t^\beta \varepsilon(t), \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \quad (3.29)$$

Отже, фрактальну модель Кельвіна описуватиме диференціальне рівняння такого виду:

$$E_1 \tau^\alpha D_t^\alpha \sigma(t) + (E_1 + E_2)\sigma(t) = E_1 E_2 (\varepsilon(t) + \tau^\beta D_t^\beta \varepsilon(t)), \quad (3.30)$$

де дробово-диференціальні параметри знаходяться у межах  $0 < \alpha, \beta < 1$ .

Для інтегрального представлення дробово-диференціальної моделі, а також визначення ядер повзучості та релаксації застосуємо до рівняння (3.30) метод перетворення Лапласа.

Для цього запишемо загальне рівняння, з котрого можна знайти розв'язок відносно напруження та деформації :

$$D_t^{\alpha, \beta} f(t) + a_{\alpha, \beta} f(t) = h_{\alpha, \beta}(t), \quad (3.31)$$

де  $f(t)$  – функція напруження  $\sigma(t)$  або деформації  $\varepsilon(t)$ ,  $D_t^\alpha$  – дробова похідна по часу  $t$  для напруження з порядком  $\alpha$ ,  $D_t^\beta$  – дробова похідна по часу  $t$  для деформації з порядком відповідно  $\beta$ ,  $a_\alpha, a_\beta$  – коефіцієнти, що знаходяться біля

напруження  $\sigma(t)$  або деформації  $\varepsilon(t)$  відповідно,  $(a_\alpha = \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha}, a_\beta = \frac{1}{\tau^\beta}), h_M(t), h_K(t)$  – функції від часу, що характерні у випадку рівняння відносно напруження та деформації відповідно,  $(h_\alpha(t) = \frac{E_2}{\tau^\alpha} (\varepsilon(t) + \tau^\beta D_t^\beta \varepsilon(t)), h_\beta(t) = \frac{\tau^{\alpha-\beta}}{E_2} D_t^\alpha \sigma(t) + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 E_2 \tau^\beta} \sigma(t))$ .

Алгебраїчне рівняння для трансформанти матиме вигляд:

$$\lambda^{\alpha(\beta)} \hat{f}(\lambda) + a_{\alpha,\beta} \hat{f}(\lambda) = \hat{h}_{\alpha,\beta}(\lambda) + c_{\alpha,\beta}, \quad (3.32)$$

де  $\hat{h}_\alpha(\lambda) = \frac{E_2}{\tau^\alpha} (\hat{\varepsilon}(\lambda) + (\tau\lambda)^\beta D_t^\beta \hat{\varepsilon}(\lambda))$  – лапласовий образ перетворення функції  $h_\alpha(t)$ ,

$\hat{h}_\beta(\lambda) = \frac{\tau^{\alpha-\beta}}{E_2} \lambda^\alpha \hat{\sigma}(\lambda) + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 E_2 \tau^\beta} \hat{\sigma}(\lambda)$  – лапласовий образ перетворення функції  $h_\beta(t)$ ,

$c_\alpha = \sigma^{(\alpha-1)}(0+) - E_2 \tau^{\beta-\alpha} \varepsilon^{(\beta-1)}(0+)$ ,  $c_\beta = \varepsilon^{(\beta-1)}(0+) - \frac{\tau^{\alpha-\beta}}{E_2} \sigma^{(\alpha-1)}(0+)$  – деякі коефіцієнти,

що впливають із властивостей перетворення Лапласа, зокрема формули (3.6).

З рівняння (3.32) отримаємо:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\hat{h}_{\alpha,\beta}(\lambda)}{\lambda^{\alpha(\beta)} + a_{\alpha,\beta}} + \frac{c_{\alpha,\beta}}{\lambda^{\alpha(\beta)} + a_{\alpha,\beta}}. \quad (3.33)$$

Перетворивши вираз  $\frac{1}{\lambda^{\alpha(\beta)} + a_{\alpha,\beta}}$ :

$$\frac{1}{\lambda^{\alpha(\beta)} + a_{\alpha,\beta}} = \lambda^{\alpha(\beta)} \frac{1}{1 + a_{\alpha,\beta} \lambda^{-\alpha(\beta)}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-a_{\alpha,\beta})^j \lambda^{-\alpha(\beta)j - \alpha(\beta)}. \quad (3.34)$$

Здійснення оберненого перетворення Лапласа буде мати наступний вигляд:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{\lambda^{\alpha(\beta)} + a_{\alpha,\beta}} \right\} (t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-a_{\alpha,\beta})^j L^{-1} \left\{ \lambda^{-\alpha(\beta)j - \alpha(\beta)} \right\} (t). \quad (3.35)$$

Враховуючи відоме співвідношення  $L^{-1} \{ \lambda^{-\gamma} \} (x) = \frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}$  та двопараметричну

функцію Міттаг-Леффлер (1.17) отримаємо:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{\lambda^{\alpha(\beta)} + a_{\alpha,\beta}} \right\} (t) = t^{\alpha(\beta)-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-a_{\alpha,\beta} t^{\alpha(\beta)})^j}{\Gamma(\alpha(\beta)j + \alpha(\beta))} = t^{\alpha(\beta)-1} E_{\alpha(\beta), \alpha(\beta)}(-a_{\alpha,\beta} t^{\alpha(\beta)}) \quad (3.36)$$

Використовуючи теорему про згортку двох функцій [201] та підставляючи відповідні значення  $a_{\alpha,\beta}$  та  $h_{\alpha,\beta}(t)$ , отримаємо розв'язок рівняння (3.30) відносно

напруження  $\sigma(t)$  та деформації  $\varepsilon(t)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_K(t) = & c_\alpha t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(E_1 + E_2)t^\alpha}{E_1 \tau^\alpha} \right) + \frac{E_2}{\tau^\alpha} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(E_1 + E_2)(t-\xi)^\alpha}{E_1 \tau^\alpha} \right) \varepsilon(\xi) d\xi + \\ & + \frac{\tau^\beta E_2}{\tau^\alpha} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(E_1 + E_2)(t-\xi)^\alpha}{E_1 \tau^\alpha} \right) D_\xi^\beta \varepsilon(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.37)$$

де  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ ,

$$\varepsilon_K(t) = c_\beta t^{\beta-1} E_{\beta,\beta} \left( -\frac{t^\beta}{\tau^\beta} \right) + \frac{1}{E_2 \tau^\beta} \int_0^t (t-z)^{\beta-1} E_{\beta,\beta} \left( -\frac{(t-z)^\beta}{\tau^\beta} \right) \left[ \tau^\alpha D_\xi^\alpha \sigma(\xi) + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1} \sigma(\xi) \right] d\xi, \quad (3.38)$$

де  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $0 < \beta \leq 1$ .

Інтегральні рівняння (3.37) та (3.38) дають змогу отримати формули для опису ядер повзучості  $\Pi(t-z)$  та релаксації  $R(t-z)$  для дробово-диференціальної моделі Кельвіна:

$$\Pi_K(t-z) = \frac{1}{E_2 \tau^\beta} (t-z)^{\beta-1} E_{\beta,\beta} \left( -\frac{(t-z)^\beta}{\tau^\beta} \right), \quad (3.39)$$

$$R_K(t-z) = E_2 \tau^{-\alpha} (t-z)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(E_1 + E_2)(t-z)^\alpha}{E_1 \tau^\alpha} \right). \quad (3.40)$$

### 3.3. Дробово-диференціальна реологічна модель Максвелла

Модель Максвелла на відміну від моделі Фойгта характеризується послідовним з'єднанням пружного  $H$  та в'язкого  $N$  елемента. Іншим способом модель Максвелла можна отримати із моделі Кельвіна забравши пружний елемент із моделі Фойгта. Механічну схему моделі Максвелла зображено на рис. 3.3.

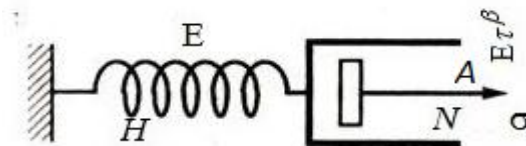


Рисунок 3.3 – Фрактальна модель Максвелла

Дробово-диференціальне рівняння, що описуватиме модель Максвелла можна отримати двома способами: *1 спосіб* - побудувати класичне рівняння виходячи із структурних властивостей елементів та провівши заміну

цілочисельної похідної на дробову; 2 спосіб - покладаючи у реологічному рівнянні (3.28)  $E_1 = 0$  та зробивши відповідну заміну цілочисельного показника на фрактальний.

*Перший спосіб.*

З розгляду схеми бачимо, що в пружному та в'язкому елементах напруження будуть однаковими (елементи деформуються під дією тієї самої сили):  $\sigma_H = \sigma_N = \sigma$  [172]. Оскільки деформації в елементах відповідно різні, то можемо записати:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_H(t) + \varepsilon_N(t). \quad (3.41)$$

Для пружного елемента використаємо вже вище згаданий закон Гука та співвідношення (3.21), а для в'язкого елемента класичний закон Ньютона:

$$\sigma(t) = E \tau D_t \varepsilon_N(t). \quad (3.42)$$

Аналогічно як і для моделі Кельвіна, запишемо похідну виразу (3.41) та підставимо закони Гука та Ньютона відповідно виразивши з них деформації:

$$D_t \varepsilon(t) = D_t \varepsilon_H(t) + D_t \varepsilon_N(t) = D_t \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{E \tau}. \quad (3.43)$$

Співвідношення (3.43) за допомогою елементарних математичних операцій можна звести до класичного реологічного рівняння, що описує модель Максвелла:

$$\sigma(t) + \tau D_t \sigma(t) = E \tau D_t \varepsilon(t). \quad (3.44)$$

Рівняння (3.44) як відносно функції  $\varepsilon(t)$ , так і відносно функції  $\sigma(t)$  є звичайним диференціальним рівнянням першого порядку із сталими коефіцієнтами. Щоб отримати дробово-диференціальне рівняння, що описувало б фрактальну модель Максвелла скористаємося вже відомою заміною (3.29) та отримаємо:

$$\sigma(t) + \tau^\alpha D_t^\alpha \sigma(t) = E \tau^\beta D_t^\beta \varepsilon(t), \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \quad (3.45)$$

*Другий спосіб.*

Проводячи аналогічні міркування як у праці [171], отримати рівняння Максвелла можна із рівняння Кельвіна покладаючи, що модуль пружності  $E_1 = 0$ .

Таким чином перепишемо рівняння (3.30) у такому вигляді:

$$(E_1 + E_2)\sigma(t) + \eta_1 D_t \sigma(t) = E_1 E_2 \varepsilon(t) + E_2 \eta_1 D_t \varepsilon(t). \quad (3.46)$$

Із рівняння (3.46) очевидно випливає, що при  $E_1 = 0$  отримуємо рівняння (3.44), тобто формулу, що описує тіло Максвелла. Аналогічним чином проводячи заміну цілочисельної похідної на дробову, отримуємо фрактальне диференціальне рівняння (3.45).

Для інтегрального представлення рівняння (3.45) скористаємося властивостями дробових похідних та відомим методом перетворення Лапласа.

Зокрема, щоб виразити деформацію  $\varepsilon(t)$  та подати її в інтегральній інтерпретації скористаємося такими властивостями диференціалів нецілого порядку.

Вираз для дробової похідної від'ємного порядку запишеться наступним чином [201]:

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} D_x \int_0^x (x-\xi)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi, \quad \nu < 0. \quad (3.47)$$

Формула складання порядків дробової похідної [108]:

$$D_t^\alpha D_t^{-\beta} f(x) = D_t^{\alpha-\beta} f(x), \quad \beta \geq \alpha. \quad (3.48)$$

При  $\nu > 0$  справедлива наступна властивість обернених операторів:

$$D_t^\nu D_t^{-\nu} f(x) = f(x). \quad (3.49)$$

Використовуючи співвідношення (3.47)-(3.49) вираз для деформації фрактальної моделі Максвелла можна подати у такому вигляді:

$$\varepsilon_M(t) = \frac{1}{E\tau^\beta} \int_0^t \left( \frac{\tau^\alpha (t-\xi)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)} + \frac{(t-\xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \right) \sigma(\xi) d\xi, \quad (3.50)$$

де  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ .

Напруження  $\sigma(t)$  виразимо через деформацію  $\varepsilon(t)$  використовуючи метод перетворення Лапласа. Аналогічно як і для попередніх моделей, знайдемо трансформанту розв'язку. Для цього запишемо:

$$\lambda^\alpha \hat{\sigma}(\lambda) + \frac{1}{\tau^\alpha} \hat{\sigma}(\lambda) = E\tau^{\beta-\alpha} \lambda^\beta \hat{\varepsilon}(\lambda) + c_M, \quad (3.51)$$

де  $c_M = \sigma^{(\alpha-1)}(0+) - E\tau^{\beta-\alpha} \varepsilon^{(\beta-1)}(0+)$  – відповідний коефіцієнт для моделі, що впливає із властивостей перетворення Лапласа.

Трансформанта розв'язку має вигляд:

$$\hat{\sigma}(\lambda) = \frac{E\tau^{\beta-\alpha}\lambda^\beta\hat{\varepsilon}(\lambda)}{\lambda^\alpha + \tau^{-\alpha}} + \frac{c_M}{\lambda^\alpha + \tau^{-\alpha}}. \quad (3.52)$$

Враховуючи вираз

$$\hat{\sigma}(\lambda) = \left[ c_M + E\tau^{\beta-\alpha}\lambda^\beta\hat{\varepsilon}(\lambda) \right] \sum_{j=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{\tau^\alpha} \right)^j \lambda^{-\alpha j - \alpha}, \quad (3.53)$$

що представляє лапласовий образ перетворення степеневі функції  $t^{\alpha-1}$  і двопараметричної функції Міттаг – Леффлера (1.17), отримаємо:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{\lambda^\alpha + \tau^{-\alpha}} \right\} (t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\tau^{-\alpha} t^\alpha \right) \quad (3.54)$$

Знову використовуючи теорему про згортку [201], отримуємо вираз для напруження у випадку фрактальної моделі Максвелла:

$$\sigma_M(t) = c_M t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{t^\alpha}{\tau^\alpha} \right) + E\tau^{\beta-\alpha} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(t-\xi)^\alpha}{\tau^\alpha} \right) D_\xi^\beta \varepsilon(\xi) d\xi, \quad (3.55)$$

де дробово-диференціальні параметри  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ .

Ядра повзучості  $\Pi(t-z)$  та релаксації  $R(t-z)$ , які входять в інтегральні рівняння фрактальної моделі Максвелла (3.50) та (3.55) можна записати у такому вигляді:

$$\Pi_M(t-z) = \frac{1}{E\tau^\beta} \left( \frac{\tau^\alpha (t-z)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)} + \frac{(t-z)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \right), \quad (3.56)$$

$$R_M(t-z) = E\tau^{\beta-\alpha} (t-z)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(t-z)^\alpha}{\tau^\alpha} \right). \quad (3.57)$$

### 3.4. Термодинамічні функції з урахуванням фрактальної структури матеріалу

Важливим для дослідження в'язкопружних середовищ в умовах взаємодії з тепломасоперенесенням у процесі сушіння деревини є термодинамічні функції. Лише для трьох класичних моделей відомі у явному вигляді термодинамічні параметри стану [165]. Для визначення термодинамічних функцій дробово-диференціальних моделей Максвелла, Фойгта та Кельвіна як і у випадку

звичайних моделей, енергію  $u$ , ентропію  $S$  та вільну енергію  $\Psi$  можна розглядати як функції температури  $\vartheta$  та пружної деформації  $\varepsilon_1$ , а функцію розсіювання енергії  $W^*$  як функцію в'язкої деформації  $\varepsilon_2$ .

Вирази, які описують термодинамічні функції мають наступний вигляд [126]:

$$\Psi = -\frac{c_\rho}{2T_0} \vartheta^2 + \frac{E}{2} (\varepsilon_1^T)^2, \quad (3.58)$$

$$S = \frac{c_\rho}{T_0} \vartheta + \alpha^* E \varepsilon_1^T, \quad (3.59)$$

$$W^* = \mu (D_t \varepsilon_2)^2. \quad (3.60)$$

де  $\varepsilon_1^T = \varepsilon_1 - \alpha^* \vartheta$  – пружна складова деформації  $\varepsilon_1$  елементу з врахуванням лінійного розширення,  $\vartheta = T - T_0$ ,  $T$  – температура,  $T_0$  – початкова температура,  $c_\rho$  – початкова об'ємна теплоємність,  $E$  – модуль пружності,  $\alpha^*$  – коефіцієнт теплового (лінійного) розширення,  $\mu$  – в'язкість.

Використовуючи формули складання порядків та властивості обернених операторів для дробових похідних [201], знайдемо  $\varepsilon_1^T$  із рівняння (3.5), (3.30) та (3.45). Зауважимо, що модель Кельвіна складається із двох пружних елементів, тому  $\varepsilon_1^T = \varepsilon_1^{T'} + \varepsilon_2^{T'}$ , де  $\varepsilon_1^{T'}$ ,  $\varepsilon_2^{T'}$  – пружні складові повної деформації елементу Фойгта та пружного елементу відповідно. Враховуючи структурні та фізичні відношення [85] для моделей Максвелла, Кельвіна і Фойгта отримаємо:

$$\varepsilon_1^T(M) = \frac{1}{(1 + \omega^\alpha D_t^{-\alpha})} \left( \omega^{\alpha-\beta} D_t^{\beta-\alpha} \varepsilon^T(t) + \alpha^* \vartheta \frac{(\omega t)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(1+\alpha-\beta)} \right), \quad 0 < \beta < \alpha \leq 1, \quad (3.61)$$

$$\varepsilon_1^T(K) = \frac{1}{A} \left( \omega^{\alpha-\beta} D_t^{\beta-\alpha} \varepsilon^T(t) + \omega^\alpha D_t^{-\alpha} \varepsilon^T(t) + \alpha^* \vartheta B \right) + C, \quad 0 < \beta < \alpha \leq 1, \quad (3.62)$$

$$\varepsilon_1^T(F) = \frac{D_t^\alpha \varepsilon(t)}{\omega^\alpha} + \frac{D_t^\beta \varepsilon(t)}{\omega^\beta} - \frac{D_t \varepsilon(t)}{\omega}, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \quad (3.63)$$

де  $D_t^{-\alpha}$  – обернений для  $D_t^\alpha$  оператор,  $\varepsilon^T(t) = \varepsilon(t) - \alpha^* \vartheta$ ,  $A = 1 + \omega^\alpha \frac{E_1 + E_2}{E_1} D_t^{-\alpha}$ ,

$B = \frac{(\omega t)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(1+\alpha-\beta)} + \frac{(\omega t)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ ,  $C = \int_0^t h(t-t') d\varepsilon^T(t')$ ,  $h(t)$  – функція Хевісайда (дискретна форма

запису –  $h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$ ,  $\omega = \frac{E a_T}{\mu}$ ,  $a_T$  – функція температурного зміщення.

Для дробово-диференціальної моделі Максвелла з врахуванням співвідношень  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon^T - \varepsilon_1^T$  отримаємо деформацію в'язкого елементу

$$\varepsilon_{2(M)} = \frac{1}{(1 + \omega^\alpha D_t^{-\alpha})} \left( \varepsilon^T(t) + \omega^\alpha D_t^{-\alpha} \varepsilon^T(t) - \omega^{\alpha-\beta} D_t^{\beta-\alpha} \varepsilon^T(t) - \alpha^* \mathcal{G} \frac{(\omega t)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(1+\alpha-\beta)} \right). \quad (3.64)$$

Таким чином, враховуючи (3.58)-(3.60) та вище отримані вирази для деформацій (3.61)-(3.64), для дробово-диференціальних моделей Максвелла, Кельвіна та Фойгта отримано наступні термодинамічні функції :

$$\Psi_M = -\frac{c_\rho}{2T_0} \mathcal{G}^2 + \frac{E}{2} \frac{1}{(1 + \omega^\alpha D_t^{-\alpha})^2} \left( \omega^{\alpha-\beta} D_t^{\beta-\alpha} \varepsilon^T(t) + \alpha^* \mathcal{G} \frac{(\omega t)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(1+\alpha-\beta)} \right)^2, \quad (3.65)$$

$$S_M = \frac{c_\rho}{T_0} \mathcal{G} + \alpha^* E \frac{1}{(1 + \omega^\alpha D_t^{-\alpha})} \left( \omega^{\alpha-\beta} D_t^{\beta-\alpha} \varepsilon^T(t) + \alpha^* \mathcal{G} \frac{(\omega t)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(1+\alpha-\beta)} \right), \quad (3.66)$$

$$W^*_M = \frac{Ea_T}{\omega} \left( D_t \left( \frac{1}{(1 + \omega^\alpha D_t^{-\alpha})} \left( \varepsilon^T(t) + \omega^\alpha D_t^{-\alpha} \varepsilon^T(t) - \omega^{\alpha-\beta} D_t^{\beta-\alpha} \varepsilon^T(t) - \alpha^* \mathcal{G} \frac{(\omega t)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(1+\alpha-\beta)} \right) \right) \right)^2, \quad (3.67)$$

$$\Psi_K = -\frac{c_\rho}{2T_0} \mathcal{G}^2 + \frac{E_2}{2} \left( \frac{1}{A} \left( \omega^{\alpha-\beta} D_t^{\beta-\alpha} \varepsilon^T(t) + \omega^\alpha D_t^{-\alpha} \varepsilon^T(t) + \alpha^* \mathcal{G} B \right) + C \right)^2, \quad (3.68)$$

$$S_K = \frac{c_\rho}{T_0} \mathcal{G} + \alpha^* E_2 \frac{1}{A} \left( \omega^{\alpha-\beta} D_t^{\beta-\alpha} \varepsilon^T(t) + \omega^\alpha D_t^{-\alpha} \varepsilon^T(t) + \alpha^* \mathcal{G} B \right) + C, \quad (3.69)$$

$$W^*_K = \frac{E_2 a_T}{\omega} (D_t \varepsilon(t))^2, \quad (3.70)$$

$$\Psi_F = -\frac{c_\rho}{2T_0} \mathcal{G}^2 + \frac{E}{2} \left( \frac{D_t^\alpha \varepsilon(t)}{\omega^\alpha} + \frac{D_t^\beta \varepsilon(t)}{\omega^\beta} - \frac{D_t \varepsilon(t)}{\omega} \right)^2, \quad (3.71)$$

$$S_F = \frac{c_\rho}{T_0} \mathcal{G} + \alpha^* E \left( \frac{D_t^\alpha \varepsilon(t)}{\omega^\alpha} + \frac{D_t^\beta \varepsilon(t)}{\omega^\beta} - \frac{D_t \varepsilon(t)}{\omega} \right), \quad (3.72)$$

$$W^*_F = \frac{Ea_T}{\omega} (D_t \varepsilon(t))^2. \quad (3.73)$$

### 3.5. Висновки до 3 розділу

- Наведено та досліджено одновимірні дробово-диференціальні математичні моделі Максвелла та Фойгта. Враховуючи методи механіки спадкових середовищ та нецілочисельний інтегро-диференціальний апарат побудовано реологічну



модель Кельвіна, яка враховує ефекти «пам'яті» та самоорганізації капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, у процесі сушіння.

- Для інтегрального представлення реологічних моделей дробово-диференціального типу за допомогою методу Лапласа знайдено напруження та деформацію відносно часу. Отримані аналітичні вирази дають можливість встановити динаміку напружено-деформаційного стану деревини у процесі сушіння з урахуванням фрактальної структури матеріалу.
- Отримано ядра релаксації та повзучості, які дозволяють ідентифікувати дробово-диференціальні параметри та врахувати залишкову «пам'ять» матеріалу.
- Отримано термодинамічні функції дробово-диференціальних моделей Максвелла, Кельвіна та Фойгта, які дають можливість врахувати еридитарність, самоорганізацію та детермінований хаос капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, під час сушіння.

## РОЗДІЛ 4 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ДЕФОРМАЦІЙНО-РЕЛАКСАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У СЕРЕДОВИЩАХ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ ПІД ЧАС СУШІННЯ ДЕРЕВИНИ

У цьому розділі побудовано загальну двовимірну модель в'язко-пружної деформації у середовищах з фрактальною структурою у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів, що дає можливість розширити застосування моделі враховуючи анізотропію тепломеханічних характеристик деревини, ефекти «пам'яті», просторову нелокальність, біологічну мінливість реологічних властивостей матеріалу. Побудовано фрактальні двовимірні деформаційно-релаксаційні моделі для реологічних тіл Фойгта, Максвелла та Кельвіна під час сушіння деревини враховуючи механіку кожної з моделей. Розроблено чисельний метод розв'язку двовимірних деформаційно-релаксаційних моделей у середовищах, яким властиві вище наведені характеристики. Адаптовано метод розчеплення двовимірних ядер для дробово-диференціальних реологічних моделей. Основні результати цього розділу опубліковано у працях [69, 70, 75, 77, 78, 185].

### 4.1. Загальна двовимірна дробово-диференціальна математична модель в'язко-пружного деформування у процесі сушіння деревини

Відповідно до теорії лінійних в'язко-пружних середовищ для ортотропних матеріалів, до котрих відноситься деревина зокрема, які перебувають в умовах плоско-напруженого стану та на середовище котрих діють не лише механічні, а й температурні поля та вологість, зв'язок між компонентами напружень  $\sigma^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$  та деформацій  $\varepsilon^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})$  мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(t, x_1, x_2) = & C_{11}(\varepsilon_{11}(t, x_1, x_2) - \varepsilon_{T1}(t, x_1, x_2)) - C_{11} \int_0^t R_{11}(t-z, T, U) (\varepsilon_{11}(t, x_1, x_2) - \varepsilon_{T1}(t, x_1, x_2)) dz + \\ & + C_{12}(\varepsilon_{22}(t, x_1, x_2) - \varepsilon_{T2}(t, x_1, x_2)) - C_{12} \int_0^t R_{12}(t-z, T, U) (\varepsilon_{22}(t, x_1, x_2) - \varepsilon_{T2}(t, x_1, x_2)) dz; \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(t, x_1, x_2) = & C_{21}(\varepsilon_{11}(t, x_1, x_2) - \varepsilon_{T1}(t, x_1, x_2)) - C_{21} \int_0^t R_{21}(t-z, T, U) (\varepsilon_{11}(t, x_1, x_2) - \varepsilon_{T1}(t, x_1, x_2)) dz + \\ & + C_{22}(\varepsilon_{22}(t, x_1, x_2) - \varepsilon_{T2}(t, x_1, x_2)) - C_{22} \int_0^t R_{22}(t-z, T, U) (\varepsilon_{22}(t, x_1, x_2) - \varepsilon_{T2}(t, x_1, x_2)) dz; \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(t, x_1, x_2) = & 2C_{33}(\varepsilon_{12}(t, x_1, x_2) - \varepsilon_{T3}(t, x_1, x_2)) - \\ & - 2C_{33} \int_0^t R_{33}(t-z, T, U) (\varepsilon_{12}(t, x_1, x_2) - \varepsilon_{T3}(t, x_1, x_2)) dz. \end{aligned} \quad (4.3)$$

де  $(t, x_1, x_2) \in D, D = [0, \tilde{T}] \times [0, l_1] \times [0, l_2]$ ,  $\varepsilon_T = (\varepsilon_{T1}, \varepsilon_{T2}, \varepsilon_{T3})^T$  – вектор деформацій, компоненти якого зумовлені зміною температури  $\Delta T$  та вмісту вологи  $\Delta U$ :

$$\varepsilon_{T1} = \alpha_{11}\Delta T + \beta_{11}\Delta U, \quad \varepsilon_{T2} = \alpha_{22}\Delta T + \beta_{22}\Delta U, \quad \varepsilon_{T3} = 0, \quad (4.4)$$

$\alpha_{11}, \alpha_{22}, \beta_{11}, \beta_{22}$  – коефіцієнти температурного розширення та вологісного всихання;  $C_{ij}$  – компоненти тензора пружності ортотропного тіла:

$$C_{11} = \frac{E_{11}}{(1-\nu_1\nu_2)}, \quad C_{12} = \frac{\nu_2 E_{11}}{(1-\nu_1\nu_2)}, \quad C_{21} = \frac{\nu_1 E_{22}}{(1-\nu_1\nu_2)}, \quad C_{22} = \frac{E_{22}}{(1-\nu_1\nu_2)}, \quad 2C_{33} = \mu, \quad (4.5)$$

де  $\mu(T, U)$  – модуль зсуву в площині  $\left(\mu = \frac{E_{12}}{2(1-\nu_{12})}\right)$ ,  $E_{11}(T, U), E_{22}(T, U), E_{12}(T, U)$  – модулі Юнга,  $\nu_1(T, U), \nu_2(T, U)$  – коефіцієнти Пуассона.

Рівняння рівноваги з врахуванням фрактальної структури середовища можна подати у такому вигляді:

$$\frac{\partial^\gamma \sigma_{11}}{\partial x_1^\gamma} + \frac{\partial^\gamma \sigma_{12}}{\partial x_2^\gamma} = 0, \quad \frac{\partial^\gamma \sigma_{22}}{\partial x_2^\gamma} + \frac{\partial^\gamma \sigma_{12}}{\partial x_1^\gamma} = 0, \quad (4.6)$$

де  $\gamma$  – дробовий порядок похідної за просторовими координатами ( $0 < \gamma \leq 1$ ).

Враховуючи (4.1)-(4.3) та (4.6) отримаємо такий зв'язок між напруженнями та деформаціями у дробово-диференціальному аспекті:

$$\begin{aligned} C_{11} \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{11}}{\partial x_1^\gamma} - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T1}}{\partial x_1^\gamma} \right) - C_{11} \int_0^t R_{11}(t-z, T, U) \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{11}}{\partial x_1^\gamma} - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T1}}{\partial x_1^\gamma} \right) dz + C_{12} \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{22}}{\partial x_1^\gamma} - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T2}}{\partial x_1^\gamma} \right) - \\ - C_{12} \int_0^t R_{12}(t-z, T, U) \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{22}}{\partial x_1^\gamma} - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T2}}{\partial x_1^\gamma} \right) dz + 2C_{33} \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{12}}{\partial x_2^\gamma} - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T3}}{\partial x_2^\gamma} \right) - \\ - 2C_{33} \int_0^t R_{33}(t-z, T, U) \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{12}}{\partial x_2^\gamma} - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T3}}{\partial x_2^\gamma} \right) dz = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
& C_{21} \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{11}}{\partial x_2^\gamma} - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T1}}{\partial x_2^\gamma} \right) - C_{21} \int_0^t R_{21}(t-z, T, U) \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{11}}{\partial x_2^\gamma} - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T1}}{\partial x_2^\gamma} \right) dz + C_{22} \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{22}}{\partial x_2^\gamma} - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T2}}{\partial x_2^\gamma} \right) - \\
& - C_{22} \int_0^t R_{22}(t-z, T, U) \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{22}}{\partial x_2^\gamma} - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T2}}{\partial x_2^\gamma} \right) dz + 2C_{33} \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{12}}{\partial x_1^\gamma} - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T3}}{\partial x_1^\gamma} \right) - \\
& - 2C_{33} \int_0^t R_{33}(t-z, T, U) \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{12}}{\partial x_1^\gamma} - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T3}}{\partial x_1^\gamma} \right) dz = 0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Перепишемо співвідношення (4.7) та (4.8) ввівши необхідні позначення та сформулюємо наступним чином постановку загальної задачі.

Математична модель двовимірного в'язко-пружного деформування під час сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, з урахуванням її фрактальної структури описується за допомогою рівнянь рівноваги з дробовим порядком  $\gamma$  ( $0 < \gamma \leq 1$ ) за просторовими координатами  $x_1$  та  $x_2$ :

$$\begin{aligned}
& C_{11} \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{11}}{\partial x_1^\gamma} (1 - \bar{R}_{11}) - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T1}}{\partial x_1^\gamma} + \tilde{R}_{11} \right) + C_{12} \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{22}}{\partial x_1^\gamma} (1 - \bar{R}_{12}) - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T2}}{\partial x_1^\gamma} + \tilde{R}_{12} \right) + \\
& + 2C_{33} \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{12}}{\partial x_2^\gamma} (1 - \bar{R}_{33}^2) - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T3}}{\partial x_2^\gamma} + \tilde{R}_{33}^2 \right) = 0,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
& C_{21} \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{11}}{\partial x_2^\gamma} (1 - \bar{R}_{21}) - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T1}}{\partial x_2^\gamma} + \tilde{R}_{21} \right) + C_{22} \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{22}}{\partial x_2^\gamma} (1 - \bar{R}_{22}) - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T2}}{\partial x_2^\gamma} + \tilde{R}_{22} \right) + \\
& + 2C_{33} \left( \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{12}}{\partial x_1^\gamma} (1 - \bar{R}_{33}^1) - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T3}}{\partial x_1^\gamma} + \tilde{R}_{33}^1 \right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

де  $\bar{R}_{ij}$ ,  $\tilde{R}_{ij}$  – відповідні значення інтегралів:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t R_{ij}(t-z, T, U) dz = \bar{R}_{ij}, \quad \int_0^t R_{ij}(t-z, T, U) \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T1, T2}}{\partial x_k^\gamma} dz = \tilde{R}_{ij}, \quad (k=1,2), \\
& \int_0^t R_{ij}(t-z, T, U) \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T3}}{\partial x_2^\gamma} dz = \tilde{R}_{33}^2,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$R_{ij}$  – ядра релаксації дробово-диференціальних моделей, що залежні від часу  $t$ , температури  $T$  та вологовмісту  $U$ .

Покладемо такі граничні умови:

$$\varepsilon_{ij} \Big|_{x_j=0} = 0, \quad \varepsilon_{ij} \Big|_{x_j=l_j} = 0, \quad (j=1,2) \tag{4.12}$$

та початкові умови відповідно:

$$\varepsilon_{ij} \Big|_{t=0} = 0. \tag{4.13}$$

## 4.2. Дробово-диференціальна двовимірна модель Фойгта

Нагадаємо, що в розділі 3 даної дисертаційної роботи для опису одновимірних в'язко-пружних реологічних дробово-диференціальних моделей використовувалися закон Гука (3.3) та Ньютона (3.4) у їх фрактальному аспекті. Переходячи до двовимірного випадку та узагальнюючи теорію лінійної в'язко-пружності, нижче наведемо закон Гука для пружнього елемента та закон Ньютона для в'язкого елемента для плоско-напруженого стану у класичній інтерпретації.

З [103] відомо, що для ортотропного матеріалу, як наприклад деревина, пружній елемент описується законом Гука відносно деформацій у такому вигляді:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E_{11}} \sigma_{11} - \frac{\nu_2}{E_{22}} \sigma_{22}, \\ \varepsilon_{22} = \frac{-\nu_1}{E_{11}} \sigma_{11} + \frac{1}{E_{22}} \sigma_{22}, \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{\mu} \sigma_{12}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Після елементарних математичних перетворень співвідношення (4.14), відносно напруження отримаємо такий вираз:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E_{11}}{(1-\nu_1\nu_2)} \varepsilon_{11} + \frac{\nu_2 E_{11}}{(1-\nu_1\nu_2)} \varepsilon_{22}, \\ \sigma_{22} = \frac{\nu_1 E_{22}}{(1-\nu_1\nu_2)} \varepsilon_{11} + \frac{E_{22}}{(1-\nu_1\nu_2)} \varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} = \mu \varepsilon_{12}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Об'ємна деформація ньютонівської в'язкості запишеться [99]:

$$\begin{cases} (\sigma_{11} - \sigma_{cp}) = 2\eta (D_t \varepsilon_{11} - D_t \varepsilon_{cp}), \\ (\sigma_{22} - \sigma_{cp}) = 2\eta (D_t \varepsilon_{22} - D_t \varepsilon_{cp}), \\ (\sigma_{33} - \sigma_{cp}) = 2\eta (D_t \varepsilon_{33} - D_t \varepsilon_{cp}), \\ \sigma_{12} = \eta D_t \varepsilon_{12}, \\ \sigma_{23} = \eta D_t \varepsilon_{23}, \\ \sigma_{31} = \eta D_t \varepsilon_{31}, \end{cases} \quad (4.16)$$

де  $D_t$  - цілочисельна похідна за часом першого порядку,  $\sigma_{cp}, \varepsilon_{cp}$  - середнє значення напружень та деформацій відповідно ( $\sigma_{cp} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ ,  $\varepsilon_{cp} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$ ).

Для двовимірного випадку в'язкого елемента закон Ньютона можемо виразити через наступні співвідношення:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2\eta(D_t \varepsilon_{11} + D_t \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{22} = 2\eta(D_t \varepsilon_{11} + D_t \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{12} = \eta D_t \varepsilon_{12}. \end{cases} \quad (4.17)$$

Використовуючи співвідношення (4.15), (4.17) та враховуючи аналогічні міркування стосовно структури моделювання як це було описано у розділі 3 для одновимірного випадку побудуємо двовимірну реологічну модель Фойгта.

Класична двовимірна модель Фойгта з врахуванням ортотропії матиме вигляд:

$$\sigma_{11} = \frac{E_{11}}{(1-\nu_1\nu_2)}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \frac{\nu_2 E_{11}}{(1-\nu_1\nu_2)}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}) + 2E\tau(D_t(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + D_t(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2})), \quad (4.18)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\nu_1 E_2}{(1-\nu_1\nu_2)}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \frac{E_{22}}{(1-\nu_1\nu_2)}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}) + 2E\tau(D_t(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + D_t(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2})), \quad (4.19)$$

$$\sigma_{12} = \mu(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{T3}) + E\tau D_t(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{T3}), \quad (4.20)$$

де  $E$  – модуль пружності пружного елемента тіла Фойгта.

Для представлення цієї моделі на дробово-диференціальний тип введемо необхідну заміну:

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{Ti}) \Rightarrow D_t^\alpha (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{Ti}), \quad \tau D_t(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{Ti}) \Rightarrow \tau^\beta D_t^\beta (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{Ti}), \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq 1. \quad (4.21)$$

Отже, двовимірна математична модель Фойгта у фрактальних середовищах описуються відповідними рівняннями дробово-диференціального типу:

$$\sigma_{11} = \frac{E_{11}}{(1-\nu_1\nu_2)} D_t^\alpha (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \frac{\nu_2 E_{11}}{(1-\nu_1\nu_2)} D_t^\alpha (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}) + 2E\tau^\beta (D_t^\beta (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + D_t^\beta (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2})), \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & \frac{\nu_1 E_2}{(1-\nu_1\nu_2)} D_t^\alpha (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \frac{E_{22}}{(1-\nu_1\nu_2)} D_t^\alpha (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}) + \\ & + 2E\tau^\beta (D_t^\beta (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + D_t^\beta (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2})), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\sigma_{12} = \mu D_t^\alpha (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{T3}) + E\tau^\beta D_t^\beta (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{T3}). \quad (4.24)$$

Для інтегрального представлення співвідношень (4.22)-(4.24) та визначення відповідно ядер релаксації, враховуючи властивості дробових похідних [201], а також визначення дробової похідної  $\mathcal{D}$ , де  $(0 \leq \mathcal{D} < 1)$  використаємо співвідношення (3.17). В результаті відповідних математичних перетворень отримаємо аналітичні співвідношення для напружень в інтегральній формі:

$$\sigma_{11} = \frac{E_{11}}{(1-\nu_1\nu_2)\Gamma(1-\alpha)} \left( D_t \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} [(\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi)) + \nu_2(\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi))] d\xi \right) + \frac{2E\tau^\beta}{\Gamma(1-\beta)} \left( D_t \int_0^t (t-\xi)^{-\beta} [(\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi)) + (\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi))] d\xi \right), \quad (4.25)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E_{22}}{(1-\nu_1\nu_2)\Gamma(1-\alpha)} \left( D_t \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} [\nu_1(\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi)) + (\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi))] d\xi \right) + \frac{2E\tau^\beta}{\Gamma(1-\beta)} \left( D_t \int_0^t (t-\xi)^{-\beta} [(\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi)) + (\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi))] d\xi \right), \quad (4.26)$$

$$\sigma_{33} = \frac{\mu}{\Gamma(1-\alpha)} \left( D_t \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} (\varepsilon_{12}(\xi) - \varepsilon_{T3}(\xi)) d\xi \right) + \frac{E\tau^\beta}{\Gamma(1-\beta)} \left( D_t \int_0^t (t-\xi)^{-\beta} (\varepsilon_{12}(\xi) - \varepsilon_{T3}(\xi)) d\xi \right), \quad (4.27)$$

де  $\alpha, \beta$  – дробові похідні та  $0 \leq \alpha < \beta < 1$ .

Аналітичне представлення ядер релаксації для фрактальної моделі Фойгта можна подати у такому вигляді:

$$R_{11}(t-\xi) = \frac{E_{11}}{(1-\nu_1\nu_2)\Gamma(1-\alpha)} D_t (t-\xi)^{-\alpha} + \frac{2E\tau^\beta}{\Gamma(1-\beta)} D_t (t-\xi)^{-\beta}, \quad (4.28)$$

$$R_{12} = \frac{\nu_2 E_{11}}{(1-\nu_1\nu_2)\Gamma(1-\alpha)} D_t (t-\xi)^{-\alpha} + \frac{2E\tau^\beta}{\Gamma(1-\beta)} D_t (t-\xi)^{-\beta}, \quad (4.29)$$

$$R_{21} = \frac{\nu_1 E_{22}}{(1-\nu_1\nu_2)\Gamma(1-\alpha)} D_t (t-\xi)^{-\alpha} + \frac{2E\tau^\beta}{\Gamma(1-\beta)} D_t (t-\xi)^{-\beta}, \quad (4.30)$$

$$R_{22} = \frac{E_{22}}{(1-\nu_1\nu_2)\Gamma(1-\alpha)} D_t (t-\xi)^{-\alpha} + \frac{2E\tau^\beta}{\Gamma(1-\beta)} D_t (t-\xi)^{-\beta}, \quad (4.31)$$

$$R_{33} = \frac{\mu}{\Gamma(1-\alpha)} D_t (t-\xi)^{-\alpha} + \frac{E\tau^\beta}{\Gamma(1-\beta)} D_t (t-\xi)^{-\beta}. \quad (4.32)$$

### 4.3. Двовимірна дробово-диференціальна модель Кельвіна

Для моделювання двовимірної моделі Кельвіна у випадку ортотропії, прийmemo до уваги структурні властивості моделі (те, що тіло Кельвіна складається із послідовного з'єднання тіла Фойгта та пружного елемента), а також

об'ємний напружений стан моделі Кельвіна як це зроблено у праці [171]. Приймаючи, що компоненти тензора напруження  $\sigma_{33}$  та деформації  $\varepsilon_{33}$  рівні нулю та використовуючи закон Гука для ортотропного матеріалу (4.14), а також співвідношення (4.17), зв'язок між компонентами напруження та деформацій для двовимірного випадку моделі Кельвіна матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \frac{E_1\tau}{(E_1 + E_2)} D_t \sigma_{11} &= \frac{E_{11}}{(1 - \nu_1\nu_2)} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \frac{\nu_2 E_{11}}{(1 - \nu_1\nu_2)} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}) + \\ &+ \frac{2E_1 E_2 \tau}{(E_1 + E_2)} (D_t (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + D_t (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2})), \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} + \frac{E_1\tau}{(E_1 + E_2)} D_t \sigma_{22} &= \frac{\nu_1 E_{22}}{(1 - \nu_1\nu_2)} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \frac{E_{22}}{(1 - \nu_1\nu_2)} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}) + \\ &+ \frac{2E_1 E_2 \tau}{(E_1 + E_2)} (D_t (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + D_t (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2})), \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\sigma_{12} + \frac{E_1\tau}{(E_1 + E_2)} D_t \sigma_{12} = \mu(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{T3}) + \frac{E_1 E_2 \tau}{(E_1 + E_2)} D_t (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{T3}), \quad (4.35)$$

де  $E_1$  – модуль пружності пружного елемента в тілі Фойгта,  $E_2$  – модуль пружності пружного елемента.

Надалі прийmemo, що:

$$\mathcal{D}_t \sigma_{ij} \Rightarrow \tau^\alpha D_t^\alpha \sigma_{ij}, \quad \mathcal{D}_t (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{Ti}) \Rightarrow \tau^\beta D_t^\beta (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{Ti}), \quad 0 < \alpha, \beta < 1. \quad (4.36)$$

Враховуючи (4.36) двовимірна модель Кельвіна дробово-диференціального типу матиме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \frac{E_1\tau^\alpha}{(E_1 + E_2)} D_t^\alpha \sigma_{11} &= \frac{E_{11}}{(1 - \nu_1\nu_2)} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \frac{\nu_2 E_{11}}{(1 - \nu_1\nu_2)} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}) + \\ &+ \frac{2E_1 E_2 \tau^\beta}{(E_1 + E_2)} (D_t^\beta (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + D_t^\beta (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2})), \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} + \frac{E_1\tau^\alpha}{(E_1 + E_2)} D_t^\alpha \sigma_{22} &= \frac{\nu_1 E_{22}}{(1 - \nu_1\nu_2)} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \frac{E_{22}}{(1 - \nu_1\nu_2)} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}) + \\ &+ \frac{2E_1 E_2 \tau^\beta}{(E_1 + E_2)} (D_t^\beta (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + D_t^\beta (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2})), \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\sigma_{12} + \frac{E_1\tau^\alpha}{(E_1 + E_2)} D_t^\alpha \sigma_{12} = \mu(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{T3}) + \frac{E_1 E_2 \tau^\beta}{(E_1 + E_2)} D_t^\beta (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{T3}), \quad (4.39)$$

$\alpha, \beta$  – дробові похідні та  $0 < \alpha, \beta < 1$ .

Інтегральне представлення цієї моделі можемо знайти використовуючи метод перетворення Лапласа для кожного із співвідношень (4.37)-(4.39).



Таким чином, здійснимо перетворення Лапласа співвідношень (4.37)-(4.39):

$$\lambda^\alpha \hat{\sigma}_{11}(\lambda) + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \hat{\sigma}_{11}(\lambda) = \hat{f}_1(\lambda) + C_1, \quad (4.40)$$

$$\lambda^\alpha \hat{\sigma}_{22}(\lambda) + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \hat{\sigma}_{22}(\lambda) = \hat{f}_2(\lambda) + C_2, \quad (4.41)$$

$$\lambda^\alpha \hat{\sigma}_{12}(\lambda) + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \hat{\sigma}_{12}(\lambda) = \hat{f}_3(\lambda) + C_3, \quad (4.42)$$

де  $\hat{f}_1(\lambda), \hat{f}_2(\lambda), \hat{f}_3(\lambda)$  – лапласовий образ перетворення функцій  $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$  відповідно, що мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(\lambda) = & \frac{E_{11}(E_1 + E_2)}{(1 - \nu_1 \nu_2) E_1 \tau^\alpha} (\hat{\varepsilon}_{11}(\lambda) - \hat{\varepsilon}_{T1}(\lambda)) + \frac{\nu_2 E_{11}(E_1 + E_2)}{(1 - \nu_1 \nu_2) E_1 \tau^\alpha} (\hat{\varepsilon}_{22}(\lambda) - \hat{\varepsilon}_{T2}(\lambda)) + \\ & + 2E_2 \tau^{\beta - \alpha} \lambda^\beta ((\hat{\varepsilon}_{11}(\lambda) - \hat{\varepsilon}_{T1}(\lambda)) + (\hat{\varepsilon}_{22}(\lambda) - \hat{\varepsilon}_{T2}(\lambda))), \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_2(\lambda) = & \frac{\nu_2 E_{22}(E_1 + E_2)}{(1 - \nu_1 \nu_2) E_1 \tau^\alpha} (\hat{\varepsilon}_{11}(\lambda) - \hat{\varepsilon}_{T1}(\lambda)) + \frac{E_{22}(E_1 + E_2)}{(1 - \nu_1 \nu_2) E_1 \tau^\alpha} (\hat{\varepsilon}_{22}(\lambda) - \hat{\varepsilon}_{T2}(\lambda)) + \\ & + 2E_2 \tau^{\beta - \alpha} \lambda^\beta ((\hat{\varepsilon}_{11}(\lambda) - \hat{\varepsilon}_{T1}(\lambda)) + (\hat{\varepsilon}_{22}(\lambda) - \hat{\varepsilon}_{T2}(\lambda))), \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\hat{f}_3(\lambda) = \frac{\mu(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} (\hat{\varepsilon}_{12}(\lambda) - \hat{\varepsilon}_{T3}(\lambda)) + E_2 \tau^{\beta - \alpha} \lambda^\beta (\hat{\varepsilon}_{12}(\lambda) - \hat{\varepsilon}_{T3}(\lambda)). \quad (4.45)$$

$C_1, C_2, C_3$  – деякі коефіцієнти, які можна представити наступним чином:

$$C_1 = C_2 = \sigma^{(\alpha-1)}(0+) - 2E_2 \tau^{\beta - \alpha} \left( \left( \varepsilon_{11}^{(\beta-1)}(0+) - \varepsilon_{T1}^{(\beta-1)}(0+) \right) + \left( \varepsilon_{22}^{(\beta-1)}(0+) - \varepsilon_{T2}^{(\beta-1)}(0+) \right) \right), \quad (4.46)$$

$$C_3 = \sigma^{(\alpha-1)}(0+) - E_2 \tau^{\beta - \alpha} \left( \varepsilon_{12}^{(\beta-1)}(0+) - \varepsilon_{T3}^{(\beta-1)}(0+) \right)$$

Знайдемо трансформанту розв'язку:

$$\hat{\sigma}_{11}(\lambda) = \frac{\hat{f}_1(\lambda)}{\left( \lambda^\alpha + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \right)} + \frac{C_1}{\left( \lambda^\alpha + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \right)}, \quad (4.47)$$

$$\hat{\sigma}_{22}(\lambda) = \frac{\hat{f}_2(\lambda)}{\left( \lambda^\alpha + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \right)} + \frac{C_2}{\left( \lambda^\alpha + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \right)}, \quad (4.78)$$

$$\hat{\sigma}_{12}(\lambda) = \frac{\hat{f}_3(\lambda)}{\left( \lambda^\alpha + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \right)} + \frac{C_3}{\left( \lambda^\alpha + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \right)}. \quad (4.49)$$

Для здійснення оберненого перетворення Лапласа зручно подати вираз:

$$\frac{1}{\lambda^\alpha + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha}} = \lambda^{-\alpha} \frac{1}{1 + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \lambda^{-\alpha}} = \sum_{j=0}^{\infty} \left( -\frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \right)^j \lambda^{-\alpha j - \alpha}. \quad (4.50)$$

Тоді:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{\lambda^\alpha + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha}} \right\} (t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left( -\frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \right)^j L^{-1} \{ \lambda^{-\alpha j - \alpha} \} (t), \quad (4.51)$$

де  $L^{-1}$  – оператор оберненого перетворення Лапласа.

Використовуючи співвідношення  $L^{-1} \{ \lambda^{-\gamma} \} (x) = \frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}$  [201], для нашого випадку

отримаємо:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{\lambda^\alpha + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha}} \right\} (t) = t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left( -\frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} t^\alpha \right)^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha)}. \quad (4.52)$$

Для подальших перетворень скористаємось двовимірною функцією Міттаг – Леффлера (1.17). Тоді (4.32) зможемо переписати у такому вигляді:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{\lambda^\alpha + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha}} \right\} (t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left( -\frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} t^\alpha \right). \quad (4.53)$$

Використовуючи теорему про згортку двох функцій [201] та підставляючи відповідні значення  $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$  та  $C_1, C_2, C_3$ , отримаємо розв'язок співвідношень

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & C_1 G(t) + A \int_0^t G(t-\xi) \left[ C_{11} (\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi)) + \frac{2E_1 E_2 \tau^\beta}{(E_1 + E_2)} D_t^\beta (\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi)) \right] d\xi + \\ & + A \int_0^t G(t-\xi) \left[ C_{12} (\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi)) + \frac{2E_1 E_2 \tau^\beta}{(E_1 + E_2)} D_t^\beta (\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi)) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & C_2 G(t) + A \int_0^t G(t-\xi) \left[ C_{21} (\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi)) + \frac{2E_1 E_2 \tau^\beta}{(E_1 + E_2)} D_t^\beta (\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi)) \right] d\xi + \\ & + A \int_0^t G(t-\xi) \left[ C_{22} (\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi)) + \frac{2E_1 E_2 \tau^\beta}{(E_1 + E_2)} D_t^\beta (\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi)) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\sigma_{12} = C_3 G(t) + A \int_0^t G(t-\xi) \left[ 2C_{33}(\varepsilon_{12}(\xi) - \varepsilon_{T3}(\xi)) + \frac{E_1 E_2 \tau^\beta}{(E_1 + E_2)} D_t^\beta (\varepsilon_{12}(\xi) - \varepsilon_{T3}(\xi)) \right] d\xi, \quad (4.56)$$

де  $G(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-At^\alpha)$ ,  $A = \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha}$ ,  $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, C_{33}$  – компоненти тензора пружності для ортотропного тіла, що виражаються через формули (4.5).

В розгорнутому вигляді ядра релаксації для дробово-диференціальної моделі Кельвіна мають вигляд:

$$R_{11}(t-\xi) = \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \frac{E_{11}}{(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} (t-\xi)^\alpha \right), \quad (4.57)$$

$$R_{12}(t-\xi) = \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \frac{\nu_2 E_{11}}{(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} (t-\xi)^\alpha \right), \quad (4.58)$$

$$R_{21}(t-\xi) = \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \frac{\nu_1 E_{22}}{(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} (t-\xi)^\alpha \right), \quad (4.59)$$

$$R_{22}(t-\xi) = \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} \frac{E_{22}}{(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} (t-\xi)^\alpha \right), \quad (4.60)$$

$$R_{33}(t-\xi) = \frac{\mu(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha} (t-\xi)^\alpha \right). \quad (4.61)$$

#### 4.4. Двовимірна дробово-диференціальна модель Максвелла

У розділі 3 даної дисертаційної роботи розглянуто одновимірну модель Максвелла, що складається із пружного та в'язкого елемента з'єднаних послідовно. Відповідно до структурних властивостей впливає, що напруження при послідовному з'єднанні однакове, а деформації відповідно різні. Беручи до уваги міркування, що описані у розділі 3 маємо змогу перенести та побудувати відповідно по аналогії із одновимірної двовимірну модель. Також застосуємо до побудови моделі та знаходження аналітичних її розв'язків міркування із праць [171-173]. Звідси впливає, що модель Максвелла можемо отримати із моделі Кельвіна забравши пружний елемент тіла Фойгта. Нехай у попередній моделі Кельвіна в'язкість задається співвідношенням  $\eta = E_2 \tau$ , де  $E_2$  – модель пружності

пружного елемента,  $E_1$  – модуль пружності пружного елемента тіла Фойгта. Приймавши, що  $E_1 = 0$  зв'язок між напруженнями та деформаціями для моделі Максвелла можна записати:

$$\sigma_{11} + \mathcal{D}_t \sigma_{11} = \frac{E_{11}}{(1 - \nu_1 \nu_2)} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \frac{\nu_2 E_{11}}{(1 - \nu_1 \nu_2)} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}) + 2E_2 \tau (D_t (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + D_t (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2})), \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} + \mathcal{D}_t \sigma_{22} &= \frac{\nu_1 E_2}{(1 - \nu_1 \nu_2)} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \frac{E_{22}}{(1 - \nu_1 \nu_2)} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}) + \\ &+ 2E_2 \tau (D_t (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + D_t (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2})), \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\sigma_{12} + \mathcal{D}_t \sigma_{12} = \mu (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{T3}) + E_2 \mathcal{D}_t (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{T3}), \quad (4.64)$$

де  $E_2$  – модуль пружності пружного елемента для моделі Максвелла.

Аналогічно проводячи заміну як і для моделі Кельвіна, отримаємо дробово-диференціальні співвідношення для моделі Максвелла:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \tau^\alpha D_t^\alpha \sigma_{11} &= \frac{E_{11}}{(1 - \nu_1 \nu_2)} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \frac{\nu_2 E_{11}}{(1 - \nu_1 \nu_2)} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}) + \\ &+ 2E_2 \tau^\beta (D_t^\beta (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + D_t^\beta (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2})), \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} + \tau^\alpha D_t^\alpha \sigma_{22} &= \frac{\nu_1 E_2}{(1 - \nu_1 \nu_2)} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \frac{E_{22}}{(1 - \nu_1 \nu_2)} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}) + \\ &+ 2E_2 \tau^\beta (D_t^\beta (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + D_t^\beta (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2})), \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\sigma_{12} + \tau^\alpha D_t^\alpha \sigma_{12} = \mu (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{T3}) + E_2 \tau^\beta D_t^\beta (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{T3}). \quad (4.67)$$

Інтегральну форму можна отримати знову ж таки за допомогою методу перетворення Лапласа, або ж використовуючи знайдені аналітичні співвідношення для моделі Кельвіна припустивши, що  $E_1 = 0$ .

Отже, зв'язок між напруженнями та деформаціями для дробово-диференціальної моделі Максвелла в інтегральній формі можна подати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_1 F(t) + \frac{1}{\tau^\alpha} \int_0^t F(t - \xi) [C_{11} (\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi)) + 2E_2 \tau^\beta D_t^\beta (\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi))] d\xi + \\ &+ \frac{1}{\tau^\alpha} \int_0^t F(t - \xi) [C_{12} (\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi)) + 2E_2 \tau^\beta D_t^\beta (\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi))] d\xi, \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= C_2 F(t) + \frac{1}{\tau^\alpha} \int_0^t F(t - \xi) [C_{21} (\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi)) + 2E_2 \tau^\beta D_t^\beta (\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi))] d\xi + \\ &+ \frac{1}{\tau^\alpha} \int_0^t F(t - \xi) [C_{22} (\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi)) + 2E_2 \tau^\beta D_t^\beta (\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi))] d\xi, \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\sigma_{12} = C_3 F(t) + \frac{1}{\tau^\alpha} \int_0^t F(t-\xi) \left[ 2C_{33}(\varepsilon_{12}(\xi) - \varepsilon_{T3}(\xi)) + E_2 \tau^\beta D_t^\beta (\varepsilon_{12}(\xi) - \varepsilon_{T3}(\xi)) \right] d\xi, \quad (4.70)$$

$$\text{де } F(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{t^\alpha}{\tau^\alpha} \right).$$

Аналітичні вирази, що описують ядра релаксації для моделі Максвелла дробово-диференціального типу приймуть такий вигляд:

$$R_{11}(t-\xi) = \frac{1}{\tau^\alpha} \frac{E_{11}}{(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(t-\xi)^\alpha}{\tau^\alpha} \right), \quad (4.71)$$

$$R_{12}(t-\xi) = \frac{1}{\tau^\alpha} \frac{\nu_2 E_{11}}{(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(t-\xi)^\alpha}{\tau^\alpha} \right), \quad (4.72)$$

$$R_{21}(t-\xi) = \frac{1}{\tau^\alpha} \frac{\nu_1 E_{22}}{(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(t-\xi)^\alpha}{\tau^\alpha} \right), \quad (4.73)$$

$$R_{22}(t-\xi) = \frac{1}{\tau^\alpha} \frac{E_{22}}{(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(t-\xi)^\alpha}{\tau^\alpha} \right), \quad (4.74)$$

$$R_{33}(t-\xi) = \frac{\mu}{\tau^\alpha} (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{(t-\xi)^\alpha}{\tau^\alpha} \right). \quad (4.75)$$

#### 4.5. Чисельний метод розв'язку та алгоритм реалізації двовимірного в'язко-пружного процесу деформування деревини як середовища з фрактальною структурою

Як і у розділі 2 даної дисертаційної роботи для реалізації чисельного методу введемо в області  $D$  просторово-часову сітку:

$$\begin{aligned} \varpi_{\Delta t, h_1, h_2} = \{ (t^k, x_{1(n)}, x_{2(m)}) : x_{1(n)} = (n-1)h_1, x_{2(m)} = (m-1)h_2, t^k = k\Delta t, n=1, \dots, N; \\ h_1 = \frac{l_1}{N-1}; m=1, \dots, M; h_2 = \frac{l_2}{M-1}; k=0, 1, \dots, K; \Delta \tau = \frac{\tilde{T}}{K} \}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Враховуючи формулу Рімана-Ліувілля (2.10), різницеву апроксимацію дробової похідної  $\gamma$  ( $0 < \gamma \leq 1$ ) за координатами  $x_1, x_2$  можна записати таким чином:

$$\left. \frac{\partial^\gamma u}{\partial x_i^\gamma} \right|_{x_{i(n)}} \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{\Gamma(2-\gamma) h_i^\gamma}, \quad h_i = x_{i(n+1)} - x_{i(n)}, \quad i=1, 2. \quad (4.77)$$

Враховуючи (4.77) різницєва апроксимація системи рівнянь (4.9)-(4.10) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
& \frac{C_{11}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \left[ (1-\bar{R}_{11}) \left( \varepsilon_{11(n+1,m)}^k - \gamma \varepsilon_{11(n,m)}^k \right) - \left( \varepsilon_{T1(n+1,m)}^k - \gamma \varepsilon_{T1(n,m)}^k \right) \right] + C_{11} \tilde{R}_{11} + \\
& + \frac{C_{12}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \left[ (1-\bar{R}_{12}) \left( \varepsilon_{22(n+1,m)}^k - \gamma \varepsilon_{22(n,m)}^k \right) - \left( \varepsilon_{T2(n+1,m)}^k - \gamma \varepsilon_{T2(n,m)}^k \right) \right] + C_{12} \tilde{R}_{12} + \\
& + \frac{2C_{33}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} \left[ (1-\bar{R}_{33}^2) \left( \varepsilon_{12(n,m+1)}^k - \gamma \varepsilon_{12(n,m)}^k \right) - \left( \varepsilon_{T3(n,m+1)}^k - \gamma \varepsilon_{T3(n,m)}^k \right) \right] + 2C_{33} \tilde{R}_{33}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{C_{21}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} \left[ (1-\bar{R}_{21}) \left( \varepsilon_{11(n,m+1)}^k - \gamma \varepsilon_{11(n,m)}^k \right) - \left( \varepsilon_{T1(n,m+1)}^k - \gamma \varepsilon_{T1(n,m)}^k \right) \right] + C_{21} \tilde{R}_{21} + \\
& \frac{C_{22}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} \left[ (1-\bar{R}_{22}) \left( \varepsilon_{22(n,m+1)}^k - \gamma \varepsilon_{22(n,m)}^k \right) - \left( \varepsilon_{T2(n,m+1)}^k - \gamma \varepsilon_{T2(n,m)}^k \right) \right] + C_{22} \tilde{R}_{22} + \\
& + \frac{2C_{33}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \left[ (1-\bar{R}_{33}^1) \left( \varepsilon_{12(n+1,m)}^k - \gamma \varepsilon_{12(n,m)}^k \right) - \left( \varepsilon_{T3(n+1,m)}^k - \gamma \varepsilon_{T3(n,m)}^k \right) \right] + 2C_{33} \tilde{R}_{33}^1 = 0.
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Граничні та початкові умови (4.12), (4.13) у скінченно-різницевому вигляді:

$$\varepsilon_{11,22,12(1,m)}^k = 0, \quad \varepsilon_{11,22,12(N,m)}^k = 0, \tag{4.80}$$

$$\varepsilon_{11,22,12(n,1)}^k = 0, \quad \varepsilon_{11,22,12(n,M)}^k = 0, \tag{4.81}$$

$$\varepsilon_{11,22,12(n,m)}^0 = 0. \tag{4.82}$$

Для конкретно заданих дробово-диференціальних моделей Фойгта, Кельвіна та Максвелла, що описують в'язко-пружний стан деревини у процесі сушіння та задаються співвідношеннями (4.25)-(4.27), (4.54)-(4.56), (4.68)-(4.70) відповідно запишемо загальні рівняння, що описуватимуть дані вирази:

$$C_{11} \left( \bar{R}_{11} \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{11}}{\partial x_1^\gamma} - \tilde{R}_{11} \right) + C_{12} \left( \bar{R}_{12} \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{22}}{\partial x_1^\gamma} - \tilde{R}_{12} \right) + 2C_{33} \left( \bar{R}_{33}^2 \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{12}}{\partial x_2^\gamma} - \tilde{R}_{33}^2 \right) = 0, \tag{4.83}$$

$$C_{21} \left( \bar{R}_{21} \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{11}}{\partial x_2^\gamma} - \tilde{R}_{21} \right) + C_{22} \left( \bar{R}_{22} \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{22}}{\partial x_2^\gamma} - \tilde{R}_{22} \right) + 2C_{33} \left( \bar{R}_{33}^1 \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{12}}{\partial x_1^\gamma} - \tilde{R}_{33}^1 \right) = 0. \tag{4.84}$$

Відповідно рівнянням (4.83), (4.84) будуть відповідати такі різницеві схеми:

$$\begin{aligned}
& \frac{C_{11}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \bar{R}_{11} \left( \varepsilon_{11(n+1,m)}^k - \gamma \varepsilon_{11(n,m)}^k \right) - C_{11} \tilde{R}_{11} + \frac{C_{12}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \bar{R}_{12} \left( \varepsilon_{22(n+1,m)}^k - \gamma \varepsilon_{22(n,m)}^k \right) - C_{12} \tilde{R}_{12} + \\
& + \frac{2C_{33}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} \bar{R}_{33}^2 \left( \varepsilon_{12(n,m+1)}^k - \gamma \varepsilon_{12(n,m)}^k \right) - 2C_{33} \tilde{R}_{33}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{4.85}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{C_{21}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} \bar{R}_{21} \left( \varepsilon_{11(n,m+1)}^k - \gamma \varepsilon_{11(n,m)}^k \right) - C_{21} \tilde{R}_{21} + \frac{C_{22}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} \bar{R}_{22} \left( \varepsilon_{22(n,m+1)}^k - \gamma \varepsilon_{22(n,m)}^k \right) - C_{22} \tilde{R}_{22} + \\
& + \frac{2C_{33}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \bar{R}_{33}^1 \left( \varepsilon_{12(n+1,m)}^k - \gamma \varepsilon_{12(n,m)}^k \right) - 2C_{33} \tilde{R}_{33}^1 = 0.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Із різницевих рівнянь (4.78) та (4.79) необхідно знайти вектор деформацій  $\varepsilon^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})$  на кожному просторово-часовому проміжку. Вважаємо, що вектор деформацій  $\varepsilon_T = (\varepsilon_{T1}, \varepsilon_{T2}, \varepsilon_{T3})^T$ , компоненти якого зумовлені зміною температури  $\Delta T$  та вмісту вологи  $\Delta U$  на кожному часовому кроці відомі. Оскільки рівнянь два, а кількість невідомих – три, розглянемо детально алгоритм відшукування компонентів вектора деформації, що базується на різницевих схемах рівнянь (4.78) та (4.79).

*Алгоритм реалізації чисельного скінченно-різницевого методу:*

1. Із початкових умов (4.82) для  $n, m$ , де  $(1 \leq n \leq N, 1 \leq m \leq M)$  знайдемо:

$$\varepsilon_{11n,m}^0, \varepsilon_{22n,m}^0, \varepsilon_{12n,m}^0.$$

2. Для будь-якого часового проміжку  $k$ , де  $(0 < k \leq K)$  значення компонентів деформації знайдемо таким чином:

2.1. Із граничних умов (4.80)-(4.81) знайдемо:

$$\varepsilon_{11(1,m)}^k, \varepsilon_{22(1,m)}^k, \varepsilon_{12(1,m)}^k, \varepsilon_{11(N,m)}^k, \varepsilon_{22(N,m)}^k, \varepsilon_{12(N,m)}^k \text{ для } m, \text{ де } (1 \leq m \leq M);$$

$$\varepsilon_{11(n,1)}^k, \varepsilon_{22(n,1)}^k, \varepsilon_{12(n,1)}^k, \varepsilon_{11(n,M)}^k, \varepsilon_{22(n,M)}^k, \varepsilon_{12(n,M)}^k \text{ для } n, \text{ де } (1 \leq n \leq N).$$

2.2. Приймаючи, що  $n=1$ , а  $m \in (1, M)$  із співвідношення (4.78) отримаємо:

$$-C_{21}\varepsilon_{T1} + C_{21}\tilde{R}_{21} - C_{22}\varepsilon_{T2} + C_{22}\tilde{R}_{22} - 2C_{33}\varepsilon_{T3} + \frac{2C_{33}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} (1 - \bar{R}_{33}^1) \varepsilon_{12(2,m)}^k + 2C_{33}\tilde{R}_{33}^1 = 0. \quad (4.87)$$

В результаті елементарних математичних перетворень знайдемо  $\varepsilon_{12(2,m)}^k$ .

2.3. Аналогічно до пункту 2.2. прийнявши, що  $n \in [2, N)$ , а  $m \in (1, M)$  знайдемо  $\varepsilon_{12(n,m)}^k$  із співвідношення:

$$\varepsilon_{12(n,m)}^k = \frac{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma}{2C_{33}(1 - \bar{R}_{33}^1)} (C_{21}\varepsilon_{T1} - C_{21}\tilde{R}_{21} + C_{22}\varepsilon_{T2} - C_{22}\tilde{R}_{22} + 2C_{33}\varepsilon_{T3} - 2C_{33}\tilde{R}_{33}^1) \quad (4.88)$$

2.4. Враховуючи пункти 2.2. та 2.3. значення компоненти деформації  $\varepsilon_{12}$  знайдені на усьому просторово-часовому проміжку. Надалі враховуючи попередні результати, компонент деформацій  $\varepsilon_{11}$  та  $\varepsilon_{22}$  шукаємо наступним чином. Покладемо у співвідношенні (4.78), що  $n=1$ ,  $m=2$  та отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}(1-\bar{R}_{11})}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \varepsilon_{11(2,2)}^k - C_{11}\varepsilon_{T1} + C_{11}\tilde{R}_{11} + \frac{C_{12}(1-\bar{R}_{12})}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \varepsilon_{22(2,2)}^k - C_{12}\varepsilon_{T2} + C_{12}\tilde{R}_{12} + \\ & - 2C_{33}\varepsilon_{T1} + 2C_{33}\tilde{R}_{33}^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.89)$$

У співвідношенні (4.79) покладемо, що  $n=2$ ,  $m=1$ , звідки вираз (4.79) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{21}(1-\bar{R}_{21})}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} \varepsilon_{11(2,2)}^k - C_{21}\varepsilon_{T1} + C_{21}\tilde{R}_{21} + \frac{C_{22}(1-\bar{R}_{22})}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} \varepsilon_{22(2,2)}^k - C_{22}\varepsilon_{T2} + C_{22}\tilde{R}_{22} + \\ & - 2C_{33}\varepsilon_{T3} + 2C_{33}\tilde{R}_{33}^1 = 0. \end{aligned} \quad (4.90)$$

В результаті отримали два рівняння стосовно двох невідомих -  $\varepsilon_{11(2,2)}^k$ ,  $\varepsilon_{22(2,2)}^k$ , результати яких знайти просто за допомогою елементарних математичних перетворень.

2.5. Враховуючи попередні пункти та підпункти покладемо у виразі (4.78)  $n=2$ ,  $m=2$  та отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} (1-\bar{R}_{11}) \left( \varepsilon_{11(3,2)}^k - \gamma \varepsilon_{11(2,2)}^k \right) - C_{11}\varepsilon_{T1} + C_{11}\tilde{R}_{11} + \\ & + \frac{C_{12}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} (1-\bar{R}_{12}) \left( \varepsilon_{22(3,2)}^k - \gamma \varepsilon_{22(2,2)}^k \right) - C_{12}\varepsilon_{T2} + C_{12}\tilde{R}_{12} + \\ & + \frac{2C_{33}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} (1-\bar{R}_{33}^2) \left( \varepsilon_{12(2,3)}^k - \gamma \varepsilon_{12(2,2)}^k \right) - 2C_{33}\varepsilon_{T3} + 2C_{33}\tilde{R}_{33}^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.91)$$

У співвідношенні (4.79) для  $n=3$ ,  $m=1$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{21}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} (1-\bar{R}_{21}) \left( \varepsilon_{11(3,2)}^k - \gamma \varepsilon_{11(3,1)}^k \right) - C_{21}\varepsilon_{T1} + C_{21}\tilde{R}_{21} + \\ & \frac{C_{22}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} (1-\bar{R}_{22}) \left( \varepsilon_{22(3,2)}^k - \gamma \varepsilon_{22(3,1)}^k \right) - C_{22}\varepsilon_{T2} + C_{22}\tilde{R}_{22} + \\ & + \frac{2C_{33}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \left[ (1-\bar{R}_{33}^1) \left( \varepsilon_{12(4,1)}^k - \gamma \varepsilon_{12(3,1)}^k \right) - \left( \varepsilon_{T3(4,1)}^k - \gamma \varepsilon_{T3(3,1)}^k \right) \right] + 2C_{33}\tilde{R}_{33}^1 = 0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

В результаті отримали два рівняння стосовно двох не відомих -  $\varepsilon_{11(3,2)}^k$ ,  $\varepsilon_{22(3,2)}^k$ .

2.6. Аналогічно до підпунктів 2.5 та 2.4 покладаючи у виразі (4.78) для  $n=3, \dots, N-2$ , та  $m=2$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}(1-\bar{R}_{11})}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \left( \varepsilon_{11(n+1,2)}^k - \gamma \varepsilon_{11(n,2)}^k \right) - C_{11}\varepsilon_{T1} + C_{11}\tilde{R}_{11} + \frac{C_{12}(1-\bar{R}_{12})}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \left( \varepsilon_{22(n+1,2)}^k - \gamma \varepsilon_{22(n,2)}^k \right) \\ & - C_{12}\varepsilon_{T2} + C_{12}\tilde{R}_{12} + \frac{2C_{33}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} (1-\bar{R}_{33}^2) \left( \varepsilon_{12(n,3)}^k - \gamma \varepsilon_{12(n,2)}^k \right) - 2C_{33}\varepsilon_{T3} + 2C_{33}\tilde{R}_{33}^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.93)$$

У співвідношенні (4.79) для  $n=4, \dots, N-1$ ,  $m=1$ , отримаємо:



$$\begin{aligned} & \frac{C_{21}(1-\bar{R}_{21})}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} (\varepsilon_{11(n,2)}^k - \gamma\varepsilon_{11(n,1)}^k) - C_{21}\varepsilon_{T1} + C_{21}\tilde{R}_{21} + \frac{C_{22}(1-\bar{R}_{22})}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} (\varepsilon_{22(n,2)}^k - \gamma\varepsilon_{22(n,1)}^k) - C_{22}\varepsilon_{T2} + \\ & + C_{22}\tilde{R}_{22} + \frac{2C_{33}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} (1-\bar{R}_{33}^1) (\varepsilon_{12(n+1,1)}^k - \gamma\varepsilon_{12(n,1)}^k) - 2C_{33}\varepsilon_{T3} + 2C_{33}\tilde{R}_{33}^1 = 0. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Отже, в результаті отримаємо на кожному кроці по  $n$ , систему з двома рівняннями та двома невідомими, розв'язок якої знайти математично просто.

Враховуючи вище написане, отримаємо наступні розв'язки  $-\varepsilon_{11(n,2)}^k, \varepsilon_{22(n,2)}^k$  для будь-якого  $n$ , де  $n \in (1, N)$ .

2.7. Знайдемо розв'язки  $\varepsilon_{11(n,3)}^k, \varepsilon_{22(n,3)}^k$  для будь-якого  $n$ , де  $n \in (1, N)$ . Для цього покладемо у співвідношенні (4.78), що  $n=1, m=3$  та отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}(1-\bar{R}_{11})}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \varepsilon_{11(2,3)}^k - C_{11}\varepsilon_{T1} + C_{11}\tilde{R}_{11} + \frac{C_{12}(1-\bar{R}_{12})}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \varepsilon_{22(2,3)}^k - C_{12}\varepsilon_{T2} + C_{12}\tilde{R}_{12} + \\ & - 2C_{33}\varepsilon_{T1} + 2C_{33}\tilde{R}_{33}^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.95)$$

У співвідношенні (4.79) покладемо, що  $n=2, m=2$ , звідки вираз (4.79) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{21}(1-\bar{R}_{21})}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} \varepsilon_{11(2,3)}^k - C_{21}\varepsilon_{T1} + C_{21}\tilde{R}_{21} + \frac{C_{22}(1-\bar{R}_{22})}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} \varepsilon_{22(2,3)}^k - C_{22}\varepsilon_{T2} + C_{22}\tilde{R}_{22} + \\ & - 2C_{33}\varepsilon_{T3} + 2C_{33}\tilde{R}_{33}^1 = 0. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Отримаємо розв'язки  $-\varepsilon_{11(2,3)}^k, \varepsilon_{22(2,3)}^k$ . Для знаходження  $\varepsilon_{11(3,3)}^k, \varepsilon_{22(3,3)}^k$  покладемо у виразі (4.78)  $n=2, m=3$  та отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} (1-\bar{R}_{11}) (\varepsilon_{11(3,3)}^k - \gamma\varepsilon_{11(2,3)}^k) - C_{11}\varepsilon_{T1} + C_{11}\tilde{R}_{11} + \\ & + \frac{C_{12}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} (1-\bar{R}_{12}) (\varepsilon_{22(3,3)}^k - \gamma\varepsilon_{22(2,3)}^k) - C_{12}\varepsilon_{T2} + C_{12}\tilde{R}_{12} + \\ & + \frac{2C_{33}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} (1-\bar{R}_{33}^2) (\varepsilon_{12(2,4)}^k - \gamma\varepsilon_{12(2,3)}^k) - 2C_{33}\varepsilon_{T3} + 2C_{33}\tilde{R}_{33}^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.97)$$

У співвідношенні (4.79) для  $n=3, m=2$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{21}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} (1-\bar{R}_{21}) (\varepsilon_{11(3,3)}^k - \gamma\varepsilon_{11(3,2)}^k) - C_{21}\varepsilon_{T1} + C_{21}\tilde{R}_{21} + \\ & \frac{C_{22}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} (1-\bar{R}_{22}) (\varepsilon_{22(3,3)}^k - \gamma\varepsilon_{22(3,2)}^k) - C_{22}\varepsilon_{T2} + C_{22}\tilde{R}_{22} + \\ & + \frac{2C_{33}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \left[ (1-\bar{R}_{33}^1) (\varepsilon_{12(4,2)}^k - \gamma\varepsilon_{12(3,2)}^k) - (\varepsilon_{T3(4,2)}^k - \gamma\varepsilon_{T3(3,2)}^k) \right] + 2C_{33}\tilde{R}_{33}^1 = 0. \end{aligned} \quad (4.98)$$

В результаті отримали два рівняння стосовно двох не відомих –  $\varepsilon_{11(3,3)}^k, \varepsilon_{22(3,3)}^k$

2.8. Міркуючи аналогічно як і у пунктах 2.4. - 2.7. знайдемо усі значення  $\varepsilon_{11(n,m)}^k, \varepsilon_{22(n,m)}^k$  для  $m$ , де  $m \in (4, M-1)$ . Для цього у співвідношенні (4.78)  $m$  є таким, що  $m \in (4, M-1)$ , а у співвідношенні (4.79)  $m$  є таким, що  $m \in (3, M-2)$ .

Отже, побудований алгоритм розв'язання чисельного методу базується на різницевих схемах та зводить задачу пошуку компонентів деформації  $\varepsilon^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})$  на просторово-часовій сітці до елементарних систем двох рівнянь із двома невідомими, що дає змогу швидко та не складно отримати результати. Для реалізації конкретно заданих дробово-диференціальних моделей Фойгта, Кельвіна та Максвелла використовуємо вище наведений побудований алгоритм для загальної задачі двовимірного в'язко-пружного деформування з врахуванням дробових похідних роблячи заміну співвідношень (4.78), (4.79) на співвідношення (4.85), (4.86) відповідно.

#### 4.6. Розщеплення двовимірних дробово-диференціальних ядер повзучості

Нехай на дерев'яний взірець діє сила вздовж осі  $OX$ . Тоді із компонентів тензора напружень  $\sigma_{11} \neq 0$ , а  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ .

Оскільки відомо, що середнє напруження задається формулою [164]:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad (4.99)$$

то в даному випадку  $\tilde{\sigma} = \frac{1}{3}\sigma_{11}$ . Девіатор тензора напружень тоді прийме вигляд:

$$s_{ij}(t) = \sigma_{ij} - \tilde{\sigma}\delta_{ij} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{2}{3}\sigma_{11} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_{11} \end{array} \right\|, \quad (4.100)$$

де  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Девіатор тензора деформацій матиме вигляд:

$$e_{ij}(t) = \varepsilon_{ij} - \tilde{\varepsilon}\delta_{ij} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{2}{3}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \end{array} \right\|, \quad (4.101)$$

де  $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{3}\theta = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$ .

Нагадаємо, що рівняння для зсувів має вигляд [164]:

$$e_{ij}(t) = \frac{S_{ij}(t)}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} \int_0^t \Pi_{3c}(t-\xi) S_{ij}(\xi) d\xi, \quad (4.102)$$

де  $\Pi_{3c}(t-\xi)$  – ядро зсувної повзучості,  $\mu$  – модуль зсуву. Рівняння об'ємного деформування запишеться відповідно:

$$\theta(t) = \frac{\tilde{\sigma}(t)}{B} + \frac{1}{B} \int_0^t \Pi_{o\delta}(t-\xi) \tilde{\sigma}(\xi) d\xi, \quad (4.103)$$

де  $\Pi_{o\delta}(t-\xi)$  – ядро об'ємної повзучості,  $B$  – об'ємний модуль пружності зв'язаний із повздовжнім модулем пружності  $E_{11}$  та пружним коефіцієнтом Пуассона  $\nu_0$  формулою  $B = \frac{E_{11}}{3(1-2\nu_0)}$ .

Із даних повзучості розтягнутих чи стиснутих взірців по вимірних величинах повздовжніх  $\varepsilon_{11}(t)$  та поперечних деформацій  $\varepsilon_{22}(t)$  можна побудувати функції повздовжньої  $\Pi_{11}(t)$  та поперечної  $\Pi_{22}(t)$  повзучості.

Запишемо рівняння процесів повздовжнього та поперечного деформування дерев'яного взірця, що розтягнутий напруженням  $\sigma_{11}(t)$ :

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{1}{E_{11}} \left[ \sigma_{11}(t) + \int_0^t \Pi_{11}(t-\xi) \sigma_{11}(\xi) d\xi \right], \quad (4.104)$$

$$\varepsilon_{22}(t) = -\frac{\nu_0}{E_{11}} \left[ \sigma_{11}(t) + \int_0^t \Pi_{12}(t-\xi) \sigma_{11}(\xi) d\xi \right], \quad (4.105)$$

Для дробово-диференціальних моделей Максвелла, Кельвіна та Фойгта функції повздовжньої та поперечної повзучості мають вигляд:

$$\Pi_{11(F)}(t-\xi) = \frac{1}{2E\tau^\beta} (t-\xi)^{\beta-1} E_{\beta-\alpha,\beta} \left( -\frac{E_{11}}{2E\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^{\beta-\alpha} \right), \quad (4.106)$$

$$\Pi_{12(F)}(t-\xi) = \frac{1}{2E\tau^\beta} (t-\xi)^{\beta-1} E_{\beta-\alpha,\beta} \left( -\frac{E_{11}\nu_2}{2E\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^{\beta-\alpha} \right), \quad (4.107)$$

$$\Pi_{11(K)}(t-\xi) = \frac{(E_1 + E_2)}{2E_1E_2\tau^\beta} (t-\xi)^{\beta-1} E_{\beta,\beta} \left( -\frac{E_{11}(E_1 + E_2)}{2E_1E_2\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^\beta \right), \quad (4.108)$$

$$\Pi_{12(K)}(t-\xi) = \frac{(E_1 + E_2)}{2E_1E_2\tau^\beta} (t-\xi)^{\beta-1} E_{\beta,\beta} \left( -\frac{\nu_2E_{11}(E_1 + E_2)}{2E_1E_2\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^\beta \right), \quad (4.109)$$

$$\Pi_{11(M)}(t-\xi) = \frac{1}{2E_2\tau^\beta} (t-\xi)^{\beta-1} E_{\beta,\beta} \left( -\frac{E_{11}}{2E_2\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^\beta \right), \quad (4.110)$$

$$\Pi_{12(M)}(t-\xi) = \frac{1}{2E_2\tau^\beta} (t-\xi)^{\beta-1} E_{\beta,\beta} \left( -\frac{\nu_2 E_{11}}{2E_2\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^\beta \right). \quad (4.111)$$

Для компоненти  $e_{11}$  із (4.101) маємо:

$$\begin{aligned} e_{11}(t) &= \frac{2}{3}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) = \frac{2}{3} \frac{1}{E_{11}} \left[ \sigma_{11}(t) + \int_0^t \Pi_{11}(t-\xi) \sigma_{11}(\xi) d\xi \right] + \frac{2}{3} \frac{\nu_0}{E_{11}} \left[ \sigma_{11}(t) + \int_0^t \Pi_{12}(t-\xi) \sigma_{11}(\xi) d\xi \right] = \\ &= \frac{2(1+\nu_0)}{3E_{11}} \sigma_{11}(t) + \frac{2}{3E_{11}} \int_0^t (\Pi_{11}(t-\xi) + \nu_0 \Pi_{12}(t-\xi)) \sigma_{11}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Із (4.100) відомо, що  $s_{11} = \frac{2}{3} \sigma_{11}$ . Тоді  $\sigma_{11} = \frac{3}{2} s_{11}$  та отримаємо:

$$\begin{aligned} e_{11}(t) &= \frac{1+\nu_0}{E_{11}} \left[ s_{11}(t) + \int_0^t \frac{\Pi_{11}(t-\xi) + \nu_0 \Pi_{12}(t-\xi)}{1+\nu_0} s_{11}(\xi) d\xi \right] = \\ &= \frac{1+\nu_0}{E_{11}} \left[ s_{11}(t) + \int_0^t \Pi_{3c}(t-\xi) s_{11}(\xi) d\xi \right], \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$\text{де } \Pi_{3c}(t-\xi) = \frac{\Pi_{11}(t-\xi) + \nu_0 \Pi_{12}(t-\xi)}{1+\nu_0}.$$

Для дробово-диференціальних моделей ядра зсувної повзучості можна записати наступним чином:

для моделі Фойгта

$$\begin{aligned} \Pi_{3c(F)}(t-\xi) &= \frac{(t-\xi)^{\beta-1}}{2E\tau^\beta(1+\nu_0)} (E_{\beta-\alpha,\beta} \left( -\frac{E_{11}}{2E\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^{\beta-\alpha} \right) + \\ &+ \nu_0 E_{\beta-\alpha,\beta} \left( -\frac{E_{11}\nu_2}{2E\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^{\beta-\alpha} \right)), \end{aligned} \quad (4.114)$$

для моделі Кельвіна

$$\begin{aligned} \Pi_{3c(K)}(t-\xi) &= \frac{(E_1 + E_2)}{2E_1 E_2 \tau^\beta (1 + \nu_0)} (t-\xi)^{\beta-1} (E_{\beta,\beta} \left( -\frac{E_{11}(E_1 + E_2)}{2E_1 E_2 \tau^\beta (1 - \nu_1 \nu_2)} (t-\xi)^\beta \right) + \\ &+ \nu_0 E_{\beta,\beta} \left( -\frac{\nu_2 E_{11}(E_1 + E_2)}{2E_1 E_2 \tau^\beta (1 - \nu_1 \nu_2)} (t-\xi)^\beta \right)), \end{aligned} \quad (4.115)$$

для моделі Максвелла

$$\begin{aligned} \Pi_{3c(M)}(t-\xi) &= \frac{1}{2E_2\tau^\beta(1+\nu_0)} (t-\xi)^{\beta-1} (E_{\beta,\beta} \left( -\frac{E_{11}}{2E_2\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^\beta \right) + \\ &+ \nu_0 E_{\beta,\beta} \left( -\frac{\nu_2 E_{11}}{2E_2\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^\beta \right)). \end{aligned} \quad (4.116)$$

Рівняння повзучості у випадку розтягу набуде вигляду:

$$\theta = \frac{1}{E_{11}} \left[ \sigma_{11}(t) + \int_0^t \Pi_{11}(t-\xi) \sigma_{11}(\xi) d\xi \right] - \frac{2\nu_0}{E_{11}} \left[ \sigma_{11}(t) + \int_0^t \Pi_{12}(t-\xi) \sigma_{11}(\xi) d\xi \right]. \quad (4.117)$$

Оскільки  $\sigma_{11} = 3\tilde{\sigma}$ , то

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1-2\nu_0}{E_{11}} 3\tilde{\sigma}(t) + \int_0^t \left[ \frac{1}{E_{11}} \Pi_{11}(t-\xi) - \frac{2\nu_0}{E_{11}} \Pi_{12}(t-\xi) \right] 3\tilde{\sigma}(t) d\xi = \\ &= \frac{3(1-2\nu_0)}{E_{11}} \left( \tilde{\sigma}(t) + \int_0^t \frac{\Pi_{11}(t-\xi) - 2\nu_0 \Pi_{12}(t-\xi)}{1-2\nu_0} \tilde{\sigma}(t) d\xi \right) = \\ &= \frac{3(1-2\nu_0)}{E_{11}} \left( \tilde{\sigma}(t) + \int_0^t \Pi_{o\bar{o}}(t-\xi) \tilde{\sigma}(t) d\xi \right), \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$\text{де } \Pi_{o\bar{o}} = \frac{\Pi_{11}(t-\xi) - 2\nu_0 \Pi_{12}(t-\xi)}{1-2\nu_0}.$$

Для дробово-диференціальних реологічних моделей функція швидкості об'ємної повзучості матиме вигляд:

для моделі Фойгта

$$\begin{aligned} \Pi_{o\bar{o}(F)}(t-\xi) &= \frac{(t-\xi)^{\beta-1}}{2E\tau^\beta(1-2\nu_0)} \left( E_{\beta-\alpha,\beta} \left( -\frac{E_{11}}{2E\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^{\beta-\alpha} \right) - \right. \\ &\left. -2\nu_0 E_{\beta-\alpha,\beta} \left( -\frac{E_{11}\nu_2}{2E\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^{\beta-\alpha} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.119)$$

для моделі Кельвіна

$$\begin{aligned} \Pi_{o\bar{o}(K)}(t-\xi) &= \frac{(E_1 + E_2)}{2E_1E_2\tau^\beta(1-2\nu_0)} (t-\xi)^{\beta-1} \left( E_{\beta,\beta} \left( -\frac{E_{11}(E_1 + E_2)}{2E_1E_2\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^\beta \right) - \right. \\ &\left. -2\nu_0 E_{\beta,\beta} \left( -\frac{\nu_2 E_{11}(E_1 + E_2)}{2E_1E_2\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^\beta \right) \right), \end{aligned} \quad (4.120)$$

для моделі Максвелла

$$\begin{aligned} \Pi_{o\bar{o}(M)}(t-\xi) &= \frac{1}{2E_2\tau^\beta(1-2\nu_0)} (t-\xi)^{\beta-1} \left( E_{\beta,\beta} \left( -\frac{E_{11}}{2E_2\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^\beta \right) - \right. \\ &\left. -2\nu_0 E_{\beta,\beta} \left( -\frac{\nu_2 E_{11}}{2E_2\tau^\beta(1-\nu_1\nu_2)} (t-\xi)^\beta \right) \right). \end{aligned} \quad (4.121)$$

#### 4.7. Висновки до 4 розділу

- На основі законів Гука та Ньютона, математичного апарату дробових інтегралів та похідних побудовано двовимірні математичні реологічні моделі капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння, які дають можливість врахувати фрактальну структуру матеріалу у різних напрямках анізотропії, початкові значення температури та вологовмісту, тепломеханічні характеристики деревини.
- Розроблено алгоритм чисельної реалізації двовимірних математичних моделей деформаційних процесів капілярно-пористих матеріалів під час сушіння, який дозволяє обчислити компоненти напружено-деформаційного стану деревини з урахуванням ефектів «пам'яті» та самоорганізації. Для цього узагальнено та отримано скінченно-різницеvu апроксимацію математичної моделі, що описує реологічні тіла Максвелла, Фойгта та Кельвіна у двовимірній області.
- Отримано аналітичні співвідношення для напружень у інтегральній формі для двовимірних реологічних дробово-диференціальних моделей, які дали можливість визначити ядра релаксації капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у різних напрямках анізотропії.
- Адаптовано метод розщеплення дробово-диференціальних ядер повзучості деревини, згідно котрого отримано ядра зсувної та функції швидкості об'ємної повзучості для фрактальних моделей Кельвіна, Максвелла та Фойгта. Отримані результати розщеплення дозволяють врахувати значення пружних та залишкових напружень у деревині під час сушіння та можуть бути використані у задачах параметричної ідентифікації математичних моделей в'язкопружних середовищах з фрактальною структурою.

## **РОЗДІЛ 5**

### **ЗАКОНОМІРНОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ ТА В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ДЕРЕВИНИ ВРАХОВУЮЧИ ЇЇ ФРАКТАЛЬНУ СТРУКТУРУ У ПРОЦЕСІ СУШІННЯ**

Цей розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню реологічних та теплофізичних характеристик деревини; побудові алгоритму ідентифікації фрактальних параметрів для розглянутих вище реологічних тіл Фойгта, Максвелла та Кельвіна; розробленню інтерфейсу прикладного програмного забезпечення для обчислення вологовмісту, температури, компонент напружено-деформаційного стану деревини під час сушіння; встановленню закономірностей розроблених математичних моделей процесів для періоду сталої та падаючої швидкості сушіння капілярно-пористих матеріалів, враховуючи різні породи деревини та її неоднорідність структури, ефекти «пам'яті» та самоорганізації, анізотропію та тепломеханічні характеристики. Основні результати опубліковані у працях [70, 73, 78, 141, 180].

#### **5.1. Реологічні та теплофізичні характеристики деревини**

У попередніх розділах даної дисертаційної роботи для опису процесів неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування було використано ряд різноманітні теплофізичних та реологічних характеристик деревини. Враховуючи, що деревина є складним, анізотропним, гідрофобним, неоднорідним, капілярно-пористим матеріалом, що володіє властивостями пам'яті та самоорганізації, у даному підрозділі ставиться за мету дослідити тепломеханічні характеристики деревини для різних порід залежно від вмісту вологості та температури. Таким чином, вибрано такі породи деревини як - сосна, береза та дуб, що відповідно належать до хвойної, м'якої листяної та твердої листяної порід.

Враховуючи експериментальні дані [105] отримано функціональні залежності модуля пружності при статичному згинанні від вологості  $w$

для деревини сосни, берези та дуба при середній густині відповідної породи деревини:

$$E_p(W) = -0.016W + 1.1869, \quad (5.1)$$

$$E_b(W) = -0.0102W + 1.1189, \quad (5.2)$$

$$E_o(W) = -0.0092W + 1.1071. \quad (5.3)$$

Залежність зміни миттєвого модуля пружності для сосни у тангентальному напрямі деформування від вологості  $W$  та температури  $T$  можна записати [167]:

$$E_{22(m)}(W, T) = 20 + 4(25 - W) + T + 0.44(25 - W)T. \quad (5.4)$$

Тривалий модуль пружності у тангентальному напрямі анізотропії для деревини сосни відповідно матиме вигляд [129]:

$$E_{22(t)}(W, T) = 11.6 + 2.32(25 - W) + 0.58T + 0.2552(25 - W)T. \quad (5.5)$$

Співвідношення між модулями пружності та коефіцієнтами Пуассона задаються наступним чином [6]:

$$\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}}. \quad (5.6)$$

Враховуючи вирази (5.4), (5.5) та (5.6) отримано тривалий та миттєвий модулі пружності для сосни у радіальному напрямі деформування при вологості  $W = 5...15\%$ :

$$E_{11(t)}(W, T) = 5.58 + 1.116(25 - W) + 0.279T + 0.123(25 - W)T, \quad (5.7)$$

$$E_{11(m)}(W, T) = 9.62 + 1.924(25 - W) + 0.48T + 0.212(25 - W)T. \quad (5.8)$$

Для характеристики деревини використовують декілька понять густини. Наприклад, базисна (умовна) густина  $\rho_0$  – відношення маси абсолютно сухого взірця до його об'єму при вологості, що рівна чи більша границі наповнення клітинних стінок [105]. У [170] наведено такі значення густини та базисної густини для деревини сосни, берези та дуба:  $\rho(p) = 500 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_0(p) = 400 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho(b) = 650 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_0(b) = 500 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho(o) = 700 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_0(o) = 560 \text{ кг/м}^3$ .

Із [209] відомо такі залежності густини від базисної густини та вологовмісту:

$$\rho(U) = \rho_0(1 + U), \quad U > 0.3 \quad (5.9)$$



$$\rho(U) = \rho_0 \frac{(1+U)(100 - K_p 30)}{(100 + K_p 100U)}, \quad U \leq 0.3 \quad (5.10)$$

де  $K_p$  – коефіцієнт об'ємного розбухання [209], який для деревини сосни, берези та дуба відповідно рівні [105] –  $K_{p(p)} = 0.87$ ,  $K_{p(b)} = 1.05$ ,  $K_{p(o)} = 1.11$ .

## 5.2. Ідентифікація дробово-диференціальних параметрів математичних моделей в'язко-пружного деформування деревини під час сушіння

Враховуючи важливість деформаційних процесів при сушінні деревини у цьому підрозділі ставиться за мету задача відшукування фрактальних параметрів повзучості за експериментальними даними. Розглянемо два методи ідентифікації – метод Проні та ітераційний метод, що базується на застосуванні методу найменших квадратів та покоординатного спуску.

Загальний вигляд ядра повзучості для дробово-диференціальних реологічних моделей капілярно-пористих матеріалів під час сушіння матиме вигляд:

$$\Pi(t) = \frac{1}{E\tau^\beta} t^{\beta-1} E_{\psi_1, \psi_2}(\varphi), \quad (5.11)$$

де  $E$  – модуль пружності,  $t$  – час,  $\tau = \eta/E$  (де  $\eta$  – в'язкість),  $E_{\psi_1, \psi_2}(\varphi)$  – функція Міттаг-Леффлера, ( $\psi_1 = \psi_1(\alpha, \beta)$ ,  $\psi_2 = \psi_2(\alpha, \beta)$ ,  $\varphi = \varphi(t, \alpha, \beta)$ ).

### 5.2.1. Алгоритм ідентифікації з використанням методу Проні

Для ідентифікації параметрів моделей в'язко-пружної деформації деревини у процесі сушіння використаємо метод апроксимації Проні, який справедливий для лінійної комбінації експоненціальних функцій [203]. Враховуючи двопараметричну функцію Міттаг-Леффлера, яка задається формулою (1.17) та відповідні заміни, вигляд ядра повзучості (5.11) перепишемо таким чином:

$$\Pi(s) = \sum_{i=0}^n A_i e^{-\lambda_i s}, \quad (5.12)$$

де  $A_i = A_i(\alpha, \beta)$ ,  $\lambda_i = \lambda_i(\alpha, \beta)$  – амплітуди та показники, що залежні від дробових параметрів  $\alpha, \beta$ ,  $s = \ln t$ , ( $t = e^s$ ).

В [140] вказується на те, що для функцій такого вигляду як  $\Pi(s)$  існує деяка визначена лінійна залежність між її  $(n+1)$  рівновіддаленими значеннями:

$$\sum_{i=0}^n c_i \Pi(s + ih) = 0, \quad (5.13)$$

де  $c_i$  – шукані постійні числа ( $c_n = 1$ ),  $h$  – інтервал часу більше, ніж між двома послідовними значеннями.

Оскільки (5.12) є розв'язком рівняння (5.13), то показники  $\lambda_i$  можуть бути знайдені за допомогою методу Проні [203]. Нехай  $e^{-\lambda_i h} = \xi_i$ , тоді для визначення кожної величини  $\xi_i$  слід розв'язати алгебраїчне рівняння:

$$c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \xi_i = 0. \quad (5.14)$$

Для визначення  $c_i$  необхідно розв'язати наступну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \Pi_1^* c_0 + \Pi_2^* c_1 + \dots + \Pi_n^* c_{n-1} + \Pi_{n+1}^* = 0, \\ \Pi_2^* c_0 + \Pi_3^* c_1 + \dots + \Pi_{n+1}^* c_{n-1} + \Pi_{n+2}^* = 0, \\ \dots \\ \Pi_n^* c_0 + \Pi_{n+1}^* c_1 + \dots + \Pi_{2n-1}^* c_{n-1} + \Pi_{2n}^* = 0, \end{cases} \quad (5.15)$$

де  $\Pi_1^*, \Pi_2^*, \dots, \Pi_{2n}^*$  – ординати.

Знайшовши із (5.14)  $n$  розв'язків  $\xi = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , можемо знайти показники  $\lambda_i$ :

$$\lambda_i = -\frac{\ln \xi_i}{h}. \quad (5.16)$$

Для визначення амплітуд  $A_i$  необхідно визначити  $n$  ординат –  $\Pi_1^*, \Pi_2^*, \dots, \Pi_n^*$ , а також знайти розв'язок наступної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A'_1 + A'_2 + \dots + A'_m = \Pi_1^*, \\ A'_1 p_1 + A'_2 p_2 + \dots + A'_m p_m = \Pi_2^*, \\ \dots \\ A'_1 p_1^{n-1} + A'_2 p_2^{n-1} + \dots + A'_m p_m^{n-1} = \Pi_n^*, \end{cases} \quad (5.17)$$

де  $p_i = e^{-\lambda_i h}$ ,  $A'_i = \frac{A_i e^{-\lambda_i s_0}}{\lambda_i}$ , ( $i = \overline{1, n}$ ),  $s_0$  – початковий момент часу.

Проведемо реалізацію алгоритму за експериментальними даними повзучості деревини [38]. Ідентифікація дробово–експоненціальних ядер повзучості відбуватиметься за наступними погрупованими даними, що наведені в табл. А.5.

Для визначення параметрів  $\alpha$  та  $\beta$  достатньо для кожної реологічної моделі капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння виділити дві показникові функції, тобто співвідношення (5.12) розглянемо для випадку  $n=2$ . Відповідно для пошуку показників  $\lambda_i$  необхідно  $2n$  ординат. Для цього розіб'ємо експериментальні дані на чотири групи, в кожній просумувавши по шість ординат. В результаті обчислень отримаємо, що  $\Pi_1^* = 15,28$ ;  $\Pi_2^* = 17,28$ ;  $\Pi_3^* = 9,49$ ;  $\Pi_4^* = 4,88$ . Система лінійних рівнянь (5.15) матиме вигляд:

$$\begin{cases} 15,28c_0 + 17,28c_1 + 9,49 = 0, \\ 17,28c_0 + 9,49c_1 + 4,88 = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Звідки  $c_0 = 0,0373$ ,  $c_1 = -0,5822$ . Алгебраїчне рівняння (5.14) матиме вигляд:

$$\xi^2 - 0,5822\xi + 0,0373 = 0, \quad (5.19)$$

корні якого дорівнюють відповідно  $\xi_1 = 0,5089$ ,  $\xi_2 = 0,0733$ .

Початковий момент часу згідно наших експериментальних даних  $t_0 = 10^3$  (год) та крок  $\Delta t = 500$  (год). Враховуючи відповідну заміну змінних, значення  $h$  у формулі (5.16) буде рівне - 37,2876.

Показники  $\lambda_i$  матимуть значення:  $\lambda_1 = 0,0181$ ,  $\lambda_2 = 0,0701$ .

Надалі врахуємо визначені ядра повзучості для дробово-диференціальних моделей Максвелла (3.56), Фойгта (3.19) та Кельвіна (3.39).

Відповідно для моделі Максвелла показники визначатимуться із співвідношень:  $\lambda_1 = 1 - \beta$ ,  $\lambda_2 = 1 + \alpha - \beta$ . Звідки знайдемо, що дробово-диференціальні параметри рівні:  $\alpha = 0,0520$ ,  $\beta = 0,9819$ .

Використавши формулу (1.17) знайдемо показники  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  для моделей Фойгта та Кельвіна, які відповідно матимуть вигляд:  $\lambda_1 = 1 + \alpha - 2\beta$ ,  $\lambda_2 = 1 - \beta$ . Дробово-диференціальні параметри матимуть значення:  $\alpha = 0,8779$ ,  $\beta = 0,9299$ .

Параметри  $\alpha$  та  $\beta$ , що описують ядра повзучості є функціонально залежні від вологості та температури середовища. Наведені експериментальні дані повзучості деревини були досліджені при температурі  $T = 23^\circ\text{C}$ , вологості  $W = 65\%$  та модуля пружності  $E = 13800\text{МПа}$ .

У виразах, що описують ядра повзучості невідомим залишається ще параметр  $\tau$  – час релаксації,  $\left(\tau = \frac{\eta}{E}\right)$ , де  $\eta$  – в'язкість. Знайдемо його відшукавши амплітуди  $A_i$ . Для цього розв'яжемо систему лінійних рівнянь (5.17):

$$\begin{cases} A_1' + A_2' = 15,28; \\ A_1' p_1 + A_2' p_2 = 9,49; \end{cases} \quad (5.20)$$

де  $p_1 = e^{-0,6749}$ ,  $p_2 = e^{-2,6139}$ .

Знайшовши  $A_1' = 19,2008$  та  $A_2' = -3,9208$ , при  $s_0 = 6,9078$  отримаємо такі значення амплітуд:  $A_1 = 0,3938$ ,  $A_2 = -0,4460$ .

Оскільки  $A_2$  не входить в область значень амплітуди, то значення параметру  $\tau$  знайдемо із  $A_1$ ,  $\left(A_1 = \tau^{-\beta} / \Gamma(\beta)\right)$ . Для моделей Максвелла та Фойгта параметр  $\tau_{M,F} = 0,155 \cdot 10^{-3}$ , для Кельвіна -  $\tau_K = 0,975 \cdot 10^{-2}$ .

### **5.2.2. Алгоритм ідентифікації параметрів дробово-диференціальних реологічних моделей ітераційним чисельним методом.**

Задачу ідентифікації уявно розділимо на дві під задачі: ідентифікація структурних параметрів (модуля пружності, часу релаксації, в'язкості, початкового напруження тощо), ідентифікація дробово-диференціальних параметрів моделей  $\alpha$  та  $\beta$  під час сушіння деревини.

1. Оскільки структурні параметри дробово-диференціальних реологічних моделей деревини у процесі сушіння априорі повинні збігатися із структурними параметрами для класичних реологічних моделей, то ідентифікацію таких параметрів проведемо використовуючи закон повзучості для конкретно визначеної моделі в її класичній інтерпретації.

Таким чином наведемо закон повзучості для моделей [171]: для моделі Фойгта –  $\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ , для моделі Кельвіна –  $\varepsilon(t) = \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} - \frac{1}{E_1} e^{-t/\tau}\right)$ . Виразити рівняння повзучості для моделі Максвелла так як у попередніх випадках для моделі Кельвіна та Фойгта у класичній теорії не можливо. Пояснюється це тим,

що покладаючи в рівнянні Максвелла  $\sigma = const$  дістанемо, що  $D_t \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E\tau}$ . З цього випливає, що тіло Максвелла під дією постійного напруження тектиме як ньютонівська рідина із сталою швидкістю деформації [171].

Враховуючи вище написане, для знаходження структурних параметрів моделі Максвелла використаємо рівняння деформації, що описує дробово-диференціальну модель Максвелла у процесі сушіння деревини, при цьому покладаючи, що дробові параметри  $\alpha$ ,  $\beta$  рівні одиниці.

Застосовуючи до описаних законів повзучості метод найменших квадратів, отримаємо структурні параметри моделей під час сушіння капілярно-пористих матеріалів. Для початкового наближення та перевірки правильності отриманих результатів використаємо класичний закон Гука для пружного елемента –  $\sigma(t) = E\varepsilon(t)$ . Тобто, що  $\sigma_0 = E\varepsilon_0$ .

Нагадаємо, що час релаксації  $\tau$  зв'язаний із модулем пружності  $E$  та в'язкістю  $\eta$ , та описується наступним виразом –  $\eta = E\tau$ .

Час релаксації  $\tau$  знайдемо із закону Гука та відповідного виразу для в'язкості [172] –  $\eta = \frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}} t_1$ . Отримаємо, що  $\tau = t_1$ . Тобто, що час релаксації збігається із моментом часу розвантаження. Чи вірне вище написане твердження пояснити можна наступним, час релаксації – це час за який напруження зменшиться у  $e$  разів, а момент часу розвантаження практично вибираємо самостійно. Тобто як теоретично так і практично момент часу розвантаження може співпадати із часом релаксації. Так наприклад, для найпростішого тіла Фойгта час запізнювання збігається з часом розвантаження [173]. Звідси відповідно час запізнювання збігається із часом релаксації. Отже, можемо зробити висновок, що час релаксації збігається з моментом розвантаження для реологічної моделі Фойгта, проте для інших моделей це не завжди так. Надалі покажемо, що справді для моделей Максвелла та Кельвіна вище описані міркування про співпадіння часу релаксації із часом розвантаження є хибними. У праці [118] вказується, що особливістю

деформації полімерів (нагадаємо, що природним полімером являється деревина), є наявність широкого набору часу релаксації.

Отже, звідси випливає, що початкове напруження  $\sigma_0$  повинне бути в межах даної формули  $\sigma_0 = E\varepsilon_0$ , а час релаксації  $\tau$  - відповідно в межах точки розвантаження для моделі Фойгта, а для моделі Максвелла та Кельвіна може бути довільним, але задовольняти умову, що  $\tau > 0$ .

2. Ідентифікацію дробово-диференціальних параметрів для кожної моделі зокрема проведемо за наступними міркуваннями.

Шукані структурні параметри для кожної моделі введемо у загальні дробово-диференціальні рівняння повзучості та враховуючи загальний вигляд функції Міттаг-Леффлера (1.17) для спрощення задачі ідентифікації використаємо лише перших два члени ряду функції Міттаг-Леффлера. Конкретизувавши та явно виразивши у інтегральних рівняннях повзучості напруження  $\sigma(t)$ , знайдемо для кожної моделі зокрема явний вигляд виразу, що описує деформацію ( $\varepsilon_F, \varepsilon_M, \varepsilon_K$ ). Нижче показано розв'язок та відшукування виразу деформації у процесі сушіння деревини для дробово-диференціальної моделі Фойгта  $\varepsilon_F$ , а також наведено для моделей Кельвіна  $\varepsilon_K$  та Максвелла  $\varepsilon_M$ .

Вибравши перших два члени ряду (1.17) та врахувавши їх у співвідношенні (3.16) отримаємо:

$$\varepsilon_F(t) = \frac{1}{E\tau^\beta} \int_0^t \left( \frac{(t-z)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \frac{(t-z)^{2\beta-\alpha-1}}{\tau^{\beta-\alpha}\Gamma(2\beta-\alpha)} \right) \sigma(z) dz. \quad (5.21)$$

Процес зміни деформації напруженого тіла у часі називається повзучістю [133]. Зазвичай повзучість вивчають при постійних рівнях напруження, які виникають в тілі за достатньо малий проміжок часу, тобто в результаті ступеневого навантаження  $\sigma(t) = \sigma_k h(t)$ , де  $\sigma_k = const$ ,  $h(t)$  - функція Хевісайда ( $h(t) = 0$  при  $t < 0$ ,  $h(t) = 1$  при  $t \geq 0$ ). На практиці у більшості випадків виникає інтерес до визначення невеликих напружень, при яких має місце обмежена повзучість. Зручно представляти напруження у такому вигляді [133]:

$$\sigma(t) = \sigma_0(t)(h(t) - h(t-t_1)). \quad (5.22)$$

Дана функція описує навантаження для  $t: 0 < t \leq t_1$  та розвантаження для  $t: t_1 < t \leq T$  тіла, що деформується. Тут  $\sigma_0(t)$  – деяка невід’ємна неперервно диференційована функція на  $[0, T]$ .

У нашому випадку приймемо, що  $\sigma_0 = \sigma_0(0) > 0$ . Враховуючи (5.22) перепишемо вираз для деформації (5.21) та отримаємо:

$$\varepsilon_F(t) = \frac{1}{E} \int_0^t \left( \frac{(t-z)^{\beta-1}}{\tau^\beta \Gamma(\beta)} - \frac{(t-z)^{2\beta-\alpha-1}}{\tau^{2\beta-\alpha} \Gamma(2\beta-\alpha)} \right) \sigma_0(z)(h(z) - h(z-t_1)) dz, \quad (5.23)$$

Використовуючи властивості та визначення функції Хевісайда та дельта-функції Дірака  $\delta(t)$  [133], отримаємо:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-z) \sigma_0 \frac{dh(z)}{dz} dz = \sigma_0 \int_0^t \Pi(t-z) \delta(z) dz = \sigma_0 \Pi(t-0) = \sigma_0 \Pi(t), \quad (5.24)$$

Розв’яжемо (5.23) використовуючи метод інтегрування частинами та співвідношення (5.24). В результаті отримаємо такий вираз, що описує деформацію:

$$\begin{aligned} \varepsilon_F(t) = & \frac{\sigma_0}{E \tau^\beta \beta \Gamma(\beta)} \left[ 2t^\beta - (t-t_1)^\beta h(t-t_1) \right] - \\ & - \frac{\sigma_0}{E \tau^{2\beta-\alpha} (2\beta-\alpha) \Gamma(2\beta-\alpha)} \left[ 2t^{2\beta-\alpha} - (t-t_1)^{2\beta-\alpha} h(t-t_1) \right], \end{aligned} \quad (5.25)$$

Отримавши фрактальне співвідношення, що описує деформацію для моделі Фойгта (5.25), необхідно ідентифікувати наступні параметри:  $\sigma_0, \tau$  – структурні параметри моделі, та  $\alpha, \beta$  – дробово-диференціальні параметри.

Аналогічним чином виведемо співвідношення у явному вигляді для моделей Максвелла та Кельвіна, отримаємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_M(t) = & \frac{\sigma_0}{E \tau^\beta \beta \Gamma(\beta)} \left[ 2t^\beta - (t-t_1)^\beta h(t-t_1) \right] + \\ & + \frac{\sigma_0}{E \tau^{\beta-\alpha} (\beta-\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \left[ 2t^{\beta-\alpha} - (t-t_1)^{\beta-\alpha} h(t-t_1) \right], \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_K(t) = & \frac{(E_1 + E_2) \sigma_0}{E_1 E_2 \tau^\beta \beta \Gamma(\beta)} \left[ 2t^\beta - (t-t_1)^\beta h(t-t_1) \right] - \frac{(E_1 + E_2) \sigma_0}{E_1 E_2 \tau^{2\beta} 2\beta \Gamma(2\beta)} \left[ 2t^{2\beta} - (t-t_1)^{2\beta} h(t-t_1) \right] + \\ & + \frac{\sigma_0}{E_2 \tau^{\beta-\alpha} \Gamma(1-\alpha) \Gamma(\beta)} \left[ t^{\beta-\alpha} - (t-t_1)^{\beta-\alpha} h(t-t_1) \right] - \frac{\sigma_0}{E_2 \tau^{2\beta-\alpha} \Gamma(1-\alpha) \Gamma(2\beta)} \left[ t^{2\beta-\alpha} - (t-t_1)^{2\beta-\alpha} h(t-t_1) \right]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Отже, отримавши у яному вигляді вирази, що описують деформацію реологічних моделей у процесі сушіння деревини застосовуємо метод найменших квадратів:

$$\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{F,K,M}(t_i, \alpha, \beta))^2 \Rightarrow \min. \quad (5.28)$$

Уточнення ідентифікованих параметрів моделей відбується за допомогою класичного методу покоординатного спуску.

Для кількісної оцінки розходження результатів, отриманих для дробово-диференціальних рівнянь повзучості кожної реологічної моделі, що описує деформаційний процес деревини під час сушіння, використано статистичний критерій на базі коефіцієнта кореляції.

Даний критерій має наступний вигляд:

$$\Delta = \frac{|\rho_{\varepsilon\bar{\varepsilon}}|}{\sqrt{1 - \rho_{\varepsilon\bar{\varepsilon}}^2}} \sqrt{n - 2}, \quad (5.29)$$

де  $n$  – кількість точок, для яких проводиться порівняння величин,  $\rho_{\varepsilon\bar{\varepsilon}}$  – коефіцієнт кореляції, що визначається за співвідношенням:

$$\rho_{\varepsilon\bar{\varepsilon}} = \frac{\sum_{i=0}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{сер})(\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}_{сер})}{\sqrt{\sum_{i=0}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{сер})^2 \sum_{i=0}^n (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}_{сер})^2}}, \quad (5.30)$$

де  $\varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_i$  – значення деформації для кожної моделі відповідно до знайдених виразів

та експериментальних даних,  $\varepsilon_{сер} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i$ ,  $\bar{\varepsilon}_{сер} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \bar{\varepsilon}_i$ .

### ***5.2.3. Результати ідентифікації фрактальних параметрів реологічних моделей капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння***

Для взірця деревини сосни, модуль пружності якої ( $E = 13,8 \text{ МПа}$ ) із значенням вологості ( $w = 45\%$ ) проведено ідентифікацію дробово-диференціальних параметрів для моделей Максвелла, Кельвіна та Фойгта двома різними описаними вище



методами: методом Проні, ітераційним методом з використанням методу покоординатного спуску (рис. А.1). Проаналізувавши отримані результати ідентифікації за двома методами, можна зробити висновок, що ітераційний метод та покоординатного спуску (апроксиманта 2) дає кращі результати, оскільки апроксимовані криві деформації під час сушіння деревини більше співпадають із точками експериментальних даних повзучості.

За результатами ідентифікації структурних  $(\sigma_0, \tau)$  та фрактальних  $(\alpha, \beta)$  параметрів для реологічних моделей Фойгта, Кельвіна та Максвелла при відносній вологості 65% та температурі середовища  $t_c = 23^\circ\text{C}$ , досліджено динаміку деформації для різних порід деревини у процесі сушіння та при вологості деревини відповідно  $W = 7.5\%; 15\%; 30\%; 45\%$ . Для дослідження фрактальної моделі Фойгта вибрані були зразки деревини твердої листяної породи із різноманітними значеннями модулів пружності кожного зразка. Модель Максвелла досліджувалась також для листяних порід деревини, але м'якої породи. Найменші показники модулів пружності зразків деревини, що характеризують хвойну породу, були використані для дослідження деформації моделі Кельвіна.

Таким чином для фрактальної моделі Фойгта на рис. 5.1 - 5.2 зображено зміну деформації відносно часу для листяних порід деревини у процесі сушіння. Із графічних залежностей очевидно, що метод ідентифікації (ітераційний метод) вибраний коректно, оскільки апроксимовані криві добре збігаються із експериментальними даними. У процесі дослідження повзучості капілярно-пористого матеріалу під час сушіння можливо зафіксувати утворення залишкових деформацій, величина котрих визначається як різниця в'язко-пружних деформацій у початковому стані (нагріта чи волога деревина) та кінцевого стану (охолоджена чи суха деревина) [118]. Саме на залишкових деформаціях заснований ефект «пам'яті» деревини під час сушіння.

Ідентифіковані криві деформації за експериментальними даними повзучості деревини для моделі Фойгта (рис. 5.1 та рис. 5.2), а також для моделей Максвелла

(рис. 5.3 та рис. 5.4) та Кельвіна (рис. 5.5 – 5.6), досліджено при постійному навантаженні  $\sigma = const$  та при його відсутності  $\sigma = 0$ . Отримані графічні залежності деформацій відносно часу схожі із моделлю гігро (термо) – механічних деформацій (рис. А.2), розробленою Б. Н. Уголевым для опису деформаційних перетворень у деревині при зміні її навантаження, температури та вологості [118]. Розроблена модель також враховує утворення залишкових деформацій та відповідно ефекти «пам'яті» деревини. Відповідно до рис. А.1 після розвантаження залишаються деформації повзучості.

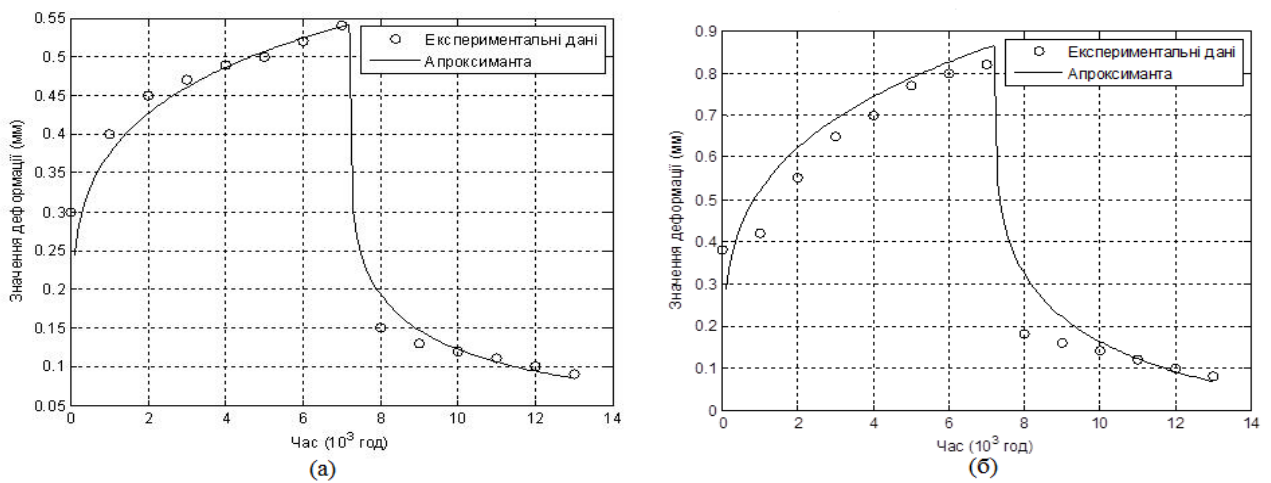


Рисунок 5.1 – Ідентифікація дробово-диференціальних параметрів для моделі Фойгта при вологості деревини  $W = 7.5\%$  (а) та  $W = 15\%$  (б)

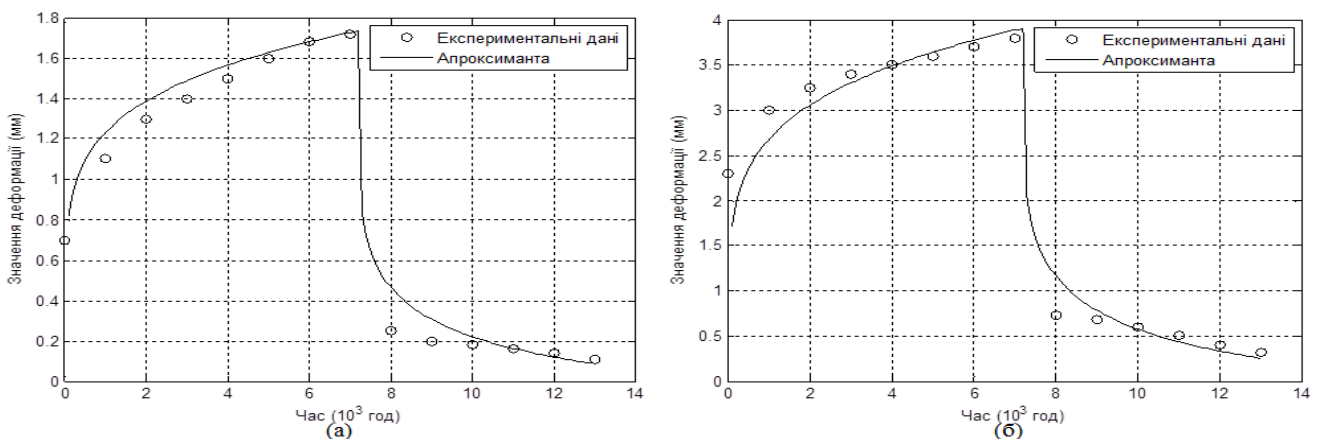


Рисунок 5.2 – Ідентифікація дробово-диференціальних параметрів для моделі Фойгта при вологості деревини  $W = 30\%$  (а) та  $W = 45\%$  (б)

Проаналізувавши графічні залежності в цілому для усіх моделей можна зробити висновки щодо зв'язку вологості деревини та значення пластичних

деформацій (котрі рівні деформаціям повзучості після розвантаження). Зокрема у процентному співвідношенні значення будуть наступними: при вологості  $W = 7,5\%$  деформації повзучості будуть дорівнювати близько 30% від значень пружніх деформацій, для вологості  $W = 15\%$  – відповідно близько 20% пружніх деформацій, при вологості  $W = 30\%$  – близько 16% значення пружньої деформації та при вологості  $W = 45\%$  в середньому 14% значення пружньої деформації відповідно. Звідси можна зробити висновок, що чим більший вологовміст деревини у процесі сушіння, тим менше значення пружніх деформацій після розвантаження. Те, що деревина втрачає частину своїх механічних характеристик таких як жорсткість, пружність, пояснюється тим, що зі збільшенням рівня температури та вологості такі характеристики деревини у процесі сушіння зменшуються, що експериментально досліджені у працях [102, 118, 200].

У [102, 118, 200] пораховані середні значення залишкових деформацій відносно пружніх, зокрема на рис. А.3б та рис. А. 3 в, можна спостерігати, що після сушіння березового шпону форма взірця не змінилася, оскільки частина пружніх деформацій перейшла у залишкові. Взірець згадав свою початкову форму після ряду дій – розвантаження, зволоження та витримки, проте повного відновлення не відбулося, оскільки збереглися необоротні пластичні деформації.

Таким чином, із табл. А. 2., А. 3., А. 4, можна зауважити, що для усіх трьох моделей найбільшого значення дробово-диференціальні параметри приймають при найбільших значеннях початкових напружень. Враховуючи праці [73, 191], коли фрактальні параметри рівні нулю, то це говорить про відсутність пам'яті, так при значеннях рівних одиниці – наявність «повної» пам'яті. Отже, значення прикладеного навантаження до деревини у процесі сушіння має вплив на ефекти «пам'яті» матеріалу. А саме, враховуючи отримані результати та результати отримані у [118] багатократність чи велике навантаження на деревину під час сушіння призводить до зниження її пружності, а відповідно до збільшення значення залишкових деформацій. Так, наприклад, після другого навантаження величина залишкових деформацій збільшилась на 4.3% [118].

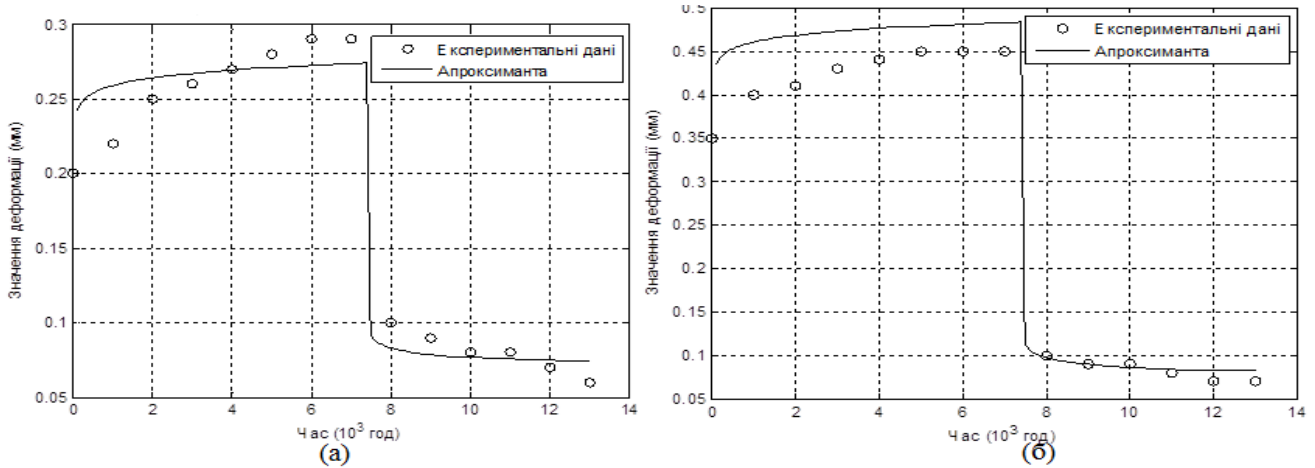


Рисунок 5.3 – Ідентифікація дробово-диференціальних параметрів для моделі Максвелла при вологості деревини  $W = 7,5\%$  (а) та  $W = 15\%$  (б)

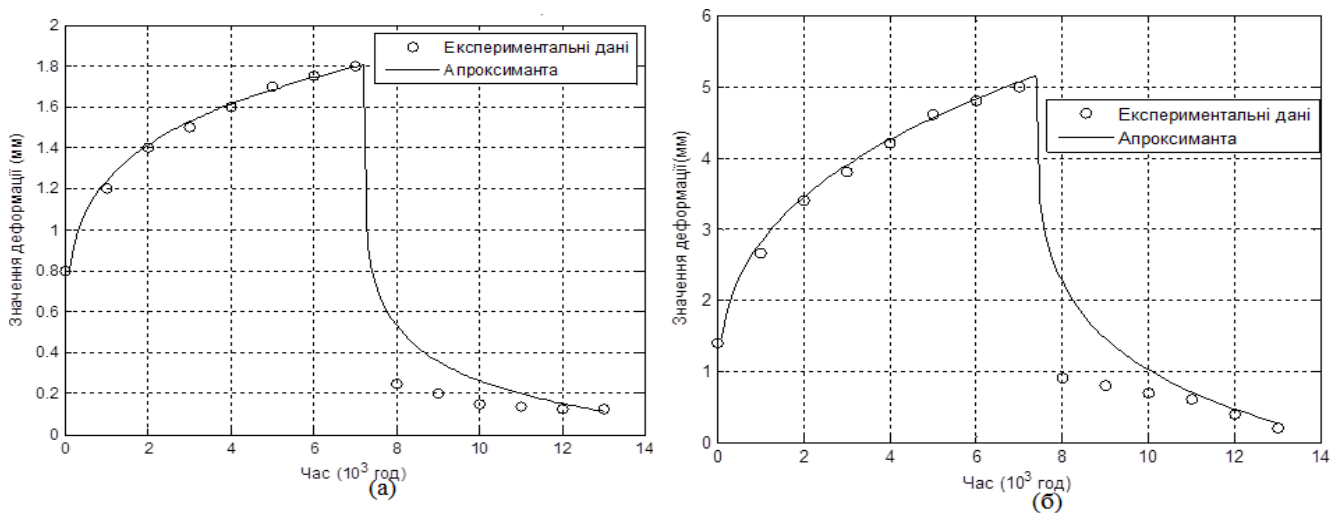


Рисунок 5.4 – Ідентифікація дробово-диференціальних параметрів для моделі Максвелла при вологості деревини  $W = 30\%$  (а) та  $W = 45\%$  (б)

При короткочасних навантаженнях у процесі сушіння деревини, особливо при низькій температурі та вологості, доля залишкових деформацій буде мінімальною [102], відповідно матеріал швидше відновить початкові розміри. Таким чином, для моделі Максвелла при вологості деревини листяної породи ( $W = 7.5\%$ ) та початковому значенні напруження  $\sigma = 0,8869 \times 10^3$  МПа фрактальні параметри приймають значення дуже близькі до нуля ( $\alpha = 0,0026; \beta = 0,0295$ ), що характеризує не значну залишкову «пам'ять» капілярно-пористого матеріалу. У працях [73, 191] було досліджено, що деревина твердих листяних порід здатна краще відновити свій початковий стан після деформування. У [118] пояснення

того, що ефект «пам'яті» в більшій мірі спостерігається на деревині листяних порід обґрунтовано тим, що листяні на відміну від хвойних порід деревини містять у півтори рази більше геміцелюлози.

Проаналізувавши результати ідентифікації, які наведені у Таблицях А. 2., А. 3., А. 4, для різних моделей, отримано наступні висновки: для моделей Фойгта та Кельвіна показники фрактальності найбільші для зразка деревини при вологості ( $W = 15\%$ ), а для моделі Максвелла – при вологості ( $W = 45\%$ ), що вказує на те, що при таких значеннях вологовмісту ефект пам'яті для заданих зразків деревини проявляється найкраще. Зокрема, найбільшого значення  $\alpha, \beta$  серед усіх моделей набуває взірець деревини для моделі Кельвіна (рис. 5.5 б) ( $\alpha = 0,905; \beta = 0,91$ ), де досліджувалась саме хвойна порода деревини із модулем пружності  $E = 13,8 \cdot 10^3 \text{ МПа}$  та вологістю ( $W = 15\%$ ) відповідно.

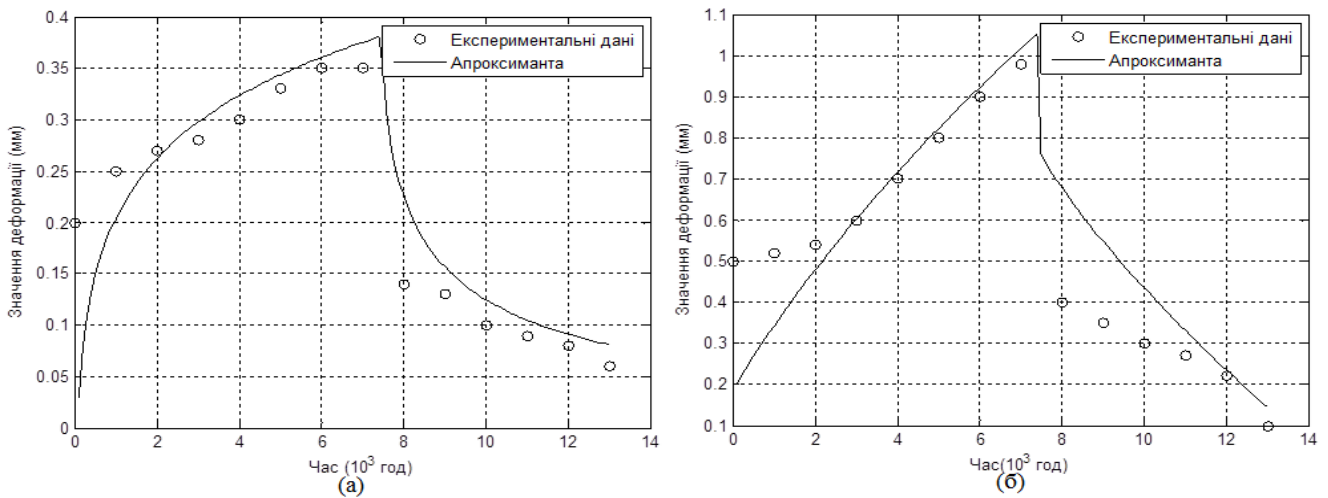


Рисунок 5.5 – Ідентифікація дробово-диференціальних параметрів для моделі Кельвіна при вологості деревини  $W = 7,5\%$  (а) та  $W = 15\%$  (б)

У праці [102] максимальне значення поперек волокон приймають залишкові деформації для зразків шпону із деревини сосни та становить близько 0,75. Такі результати пояснюються наступним [118]: хвойні породи деревини, до котрих відноситься сосна, характеризується меншою пружністю та жорсткістю, чим наприклад такі породи деревини як дуб чи береза, що відносяться до листяних порід деревини. Враховуючи такі механічні властивості для різних порід деревини,

можна відзначити, що доля залишкових деформацій для хвойних порід деревини під час сушіння буде більшою, ніж для твердих листяних порід.

Різниця між фрактальними величинами  $\alpha$  та  $\beta$  для реологічних моделей, котрі досліджувалися, в середньому становить 0,03. Така величина різниці між дробово-диференціальними параметрами моделей деформаційно-релаксаційних процесів під час сушіння деревини вказує на взаємозв'язність між напруженням та деформацією капілярно-пористого матеріалу з урахуванням його фрактальної структури.

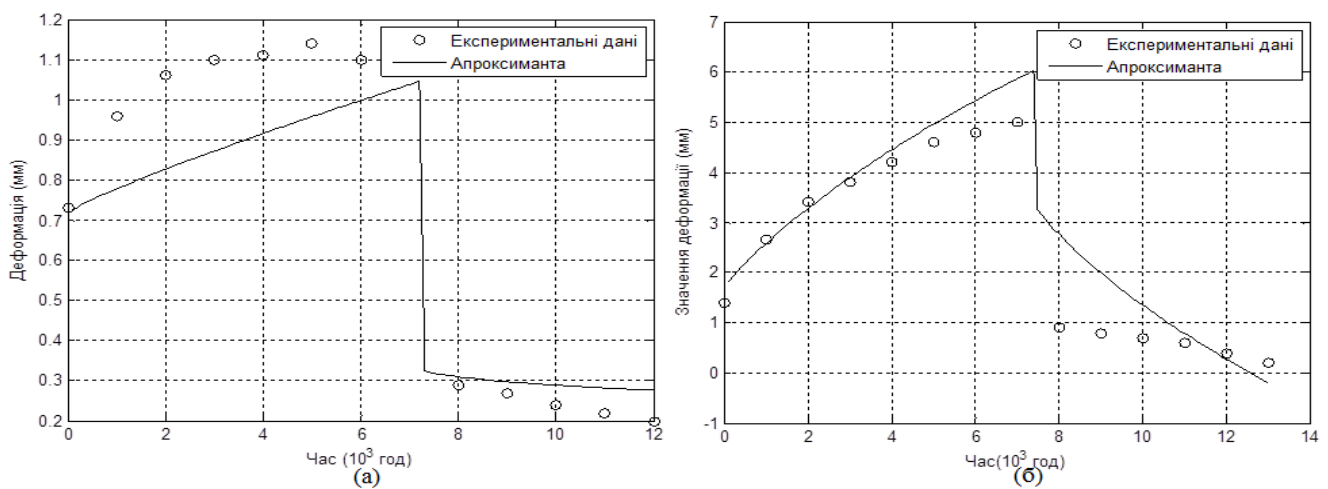


Рисунок 5.6 – Ідентифікація дробово-диференціальних параметрів для моделі Кельвіна при вологості деревини  $W = 30\%$  (а) та  $W = 45\%$  (б)

Таким чином, застосування дробово-диференціального апарату до моделювання деформаційно-релаксаційних процесів дає можливість врахувати залишкові деформації, котрі не могли бути враховані при класичному аналізі реологічних моделей з цілочисельними параметрами. Отримані результати порівнювалися із еспериментальними дослідженнями [102, 118, 200], що показали багатоформовий ефект пам'яті деревини, який пов'язаний із наявністю багатьох фазових та релаксаційних переходів.

### **5.3.Інтерфейс прикладного програмного забезпечення для обчислення температури, вологовмісту та напружено-деформаційного стану деревини з врахуванням ефекту «пам'яті» та самоорганізації у процесі сушіння**

Для чисельної реалізації одновимірної математичної моделі неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування деревини з урахуванням її фрактальної структури під час сушіння було використано прикладне програмне забезпечення, що базується на використанні інтерпретованої об'єктно-орієнтованої мови програмування високого рівня зі строгою динамічною типізацією Python. У мові програмування Python підтримується декілька парадигм. Зокрема, для обчислення температури, вологовмісту, напруження та деформації у цій роботі використовувалися процедурна та функціональна парадигми програмування. На рис. 5.7 зображено інтерфейс розробленого прикладного програмного забезпечення, що дозволяє враховувати різні значення фрактальних параметрів при обчисленні значення температури та вологовмісту деревини. У розробленому інтерфейсі одна частина теплофізичних внутрішніх та зовнішніх параметрів задаються у вигляді функціональних залежностей враховуючи початкові значення температури та вологовмісту, а друга – конкретними числовими значеннями. Наведені теплофізичні характеристики використані із аналізу досліджень підрозділу 5.1 цього розділу та додатку Б. Таким чином у порядку спадання вибрані такі характеристики: початкове значення вологовмісту ( $U_0$ ), початкове значення температури деревини ( $T_0$ ), величина відносної вологості зовнішнього середовища ( $\phi$ ), швидкість руху агента сушіння ( $v$ ), питома теплоємність ( $shc$ ), базисна густина ( $p_0$ ), густина деревини ( $p$ ), коефіцієнт теплопровідності ( $lm$ ), питома теплота пароутворення ( $r$ ), коефіцієнт вологопровідності ( $a$ ), термоградієнтний коефіцієнт ( $\delta$ ), температура середовища ( $T_c$ ), рівноважний вологовміст ( $U_p$ ), коефіцієнт вологообміну ( $\sigma$ ), коефіцієнт теплообміну ( $\omega$ ). Для дослідження певної

породи деревини необхідно змінити базисну густину, яка відповідає певному типу деревини, а також коефіцієнт вологопровідності, залежність від температури якого для конкретно заданої породи наведено у Додатку Б. Інтерфейс побудований таким чином, що користувач має можливість досліджувати процеси тепло- та водообміну при різних значеннях зовнішніх та внутрішніх параметрах моделі. Як можна бачити із рис. 5.7, вводиться нижня та верхня межа просторової координати (*left and right*), час тривалості дослідження (*time*), а також кількість точок розбиття області по просторовій та часовій координаті (*N та K*) відповідно. У графічному інтерфейсі прикладного програмного забезпечення містяться чотири області, де рухомою кнопкою можна вибирати довільне значення критерію фазового переходу  $\varepsilon(\text{eps})$ , дробово-диференціальних показників  $\alpha(\text{alpha})$ ,  $\beta(\text{beta})$ ,  $\gamma(\text{gamma})$ . Також є чотири кнопки: *cut in 2D by t*, *cut in 2D by x* – розбиття по часовій та просторовій сітці відповідно, *show* – показати ці розбиття, *calculate* – обчислити значення вологовмісту та температури для заданої породи деревини, внутрішніми та зовнішніми параметрами з врахуванням фрактальності матеріалу у процесі сушіння. Після натискання кнопки *calculate* отримуємо результати чисельного дослідження математичної моделі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з врахуванням ефекту «пам'яті» та самоорганізації під час сушіння у вигляді тривимірної графіки.

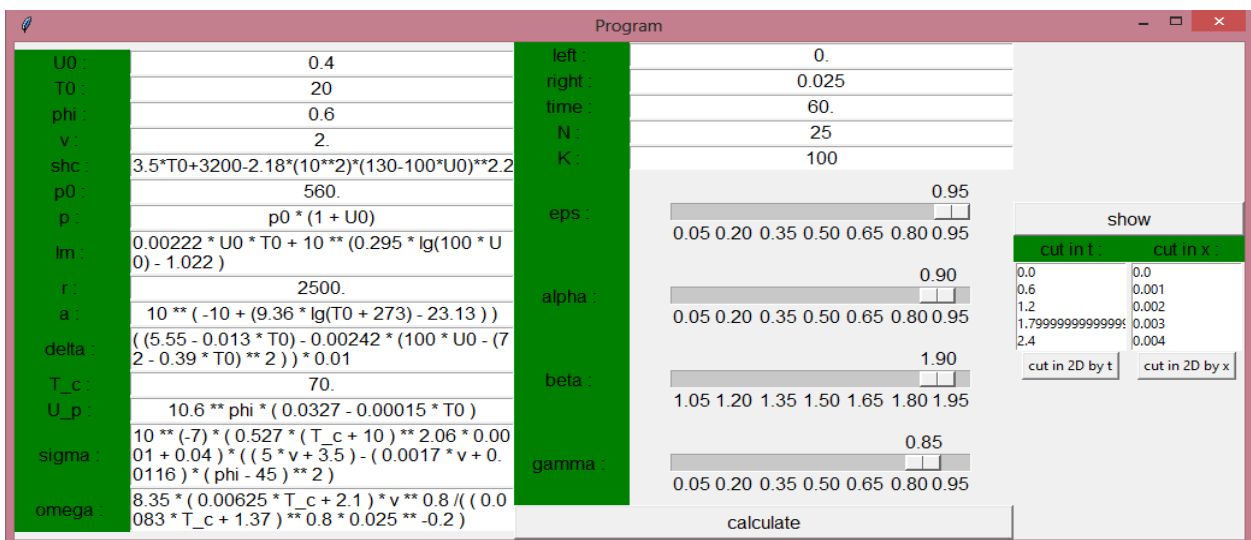


Рисунок 5.7 – Інтерфейс розробленого прикладного програмного забезпечення



Розроблено також інтерфейс програмного забезпечення, що обчислює значення напруження та деформації у процесі сушіння враховуючи ерідитарність капілярно-пористого матеріалу (рис. 5.8). У графічному інтерфейсі користувач може ввести у відповідні області: значення модуля пружності капілярно-пористого матеріалу, що характеризує певну породу деревини; час релаксації та значення фрактальних параметрів  $\alpha$  та  $\beta$ . Після заповнення усіх областей, натиснувши кнопку «Обчислити деформацію» чи «Обчислити напруження» у графічному інтерфейсі отримаємо зміну деформації (чи напруження) відносно часу для усіх трьох дробово-диференціальних реологічних моделей Максвелла, Фойгта та Кельвіна.

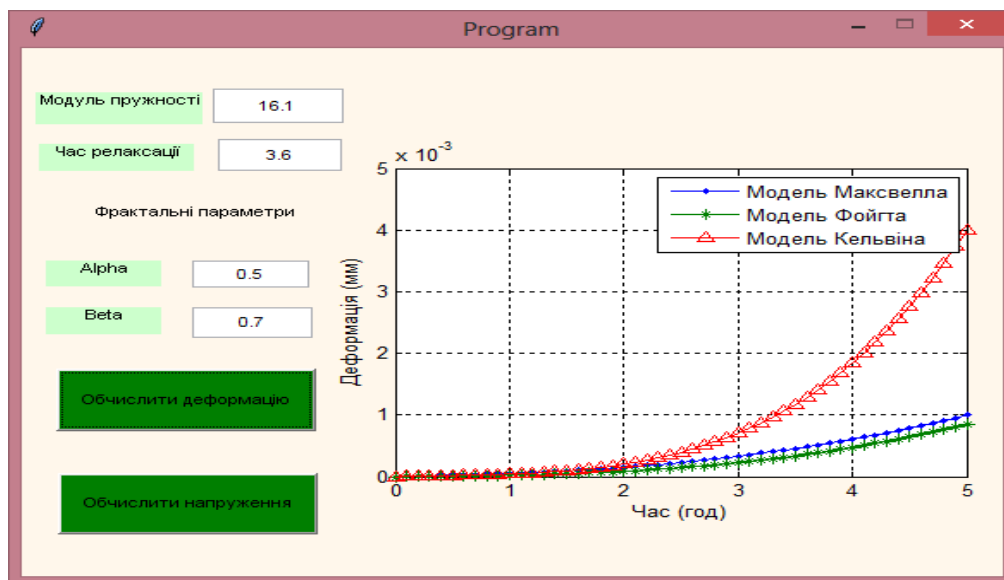


Рисунок 5.8 – Інтерфейс розробленого прикладного програмного забезпечення

Враховуючи, що криві деформацій чи напруження зображені у одній графічній області можливо проаналізувати та порівняти зміну напружено-деформаційного стану деревини у процесі сушіння для усіх реологічних моделей.

Отже, розроблені прикладні програмні забезпечення для обчислення температури, вологості, напруження та деформації враховують фрактальну структуру деревини під час її сушіння. В результаті розробленого програмного забезпечення у наступних підрозділах даного розділу проаналізовано та досліджено ефекти «пам'яті», самоорганізації, неоднорідність структури,

технологічні параметри агента сушіння, напрям аізотропії, реологічні та теплофізичні характеристики деревини у процесі сушіння.

#### **5.4. Закономірності чисельного моделювання процесів тепло- та вологоперенесення у деревині під час сушіння враховуючи ефекти «пам'яті» та самоорганізації**

У цьому підрозділі ставиться за мету дослідити динаміку зміни температури та вологовмісту капілярно-пористих матеріалів враховуючи ефекти «пам'яті» та самоорганізації залежно від породи деревини, параметрів агента сушіння, теплофізичних характеристик, геометричних точках матеріалу для періоду сталого та падаючої швидкостей процесу сушіння. Чисельний експеримент проводився для одновимірної задачі зв'язаного тепломасоперенесення, який був отриманий із врахуванням побудованої двовимірної математичної моделі неізотермічного вологоперенесення (2.1)-(2.8) та її чисельного алгоритму реалізації предиктор-коректор.

При заданих теплофізичних характеристиках зображених на графічному програмному інтерфейсі (рис. 5.7), досліджено динаміку зміни температури та вологовмісту капілярно-пористого матеріалу з урахуванням фрактальної структури. Із рис. 5.9,а, бачимо, що після трьох годин сушіння температура деревини породи дуб зросла до температури середовища  $t_c = 70^\circ\text{C}$ . Вологовміст у деревині (рис. 5.9,б) як можна спостерігати у процесі сушіння зменшується, оскільки відбувається виділення вологи із матеріалу. Отримані результати добре узгоджуються із експериментальними дослідженнями та результатами праць [73, 183, 187], у котрих фрактальність матеріалу досліджувалася лише за часом.

Проаналізовано динаміку зміни температури деревини породи дуб враховуючи її еридитарність та самоорганізацію у процесі сушіння при різних значеннях температури та відносної вологості агента сушіння. Таким чином, на рис. 5.9 в, зображено зміну температури деревини при температурі агента

сушіння  $t_c = 80^\circ\text{C}$ . Порівнявши рис. 5.9 а, та 5.9 в, можна бачити, що із зростанням температури середовища деревина швидше прогрівається.

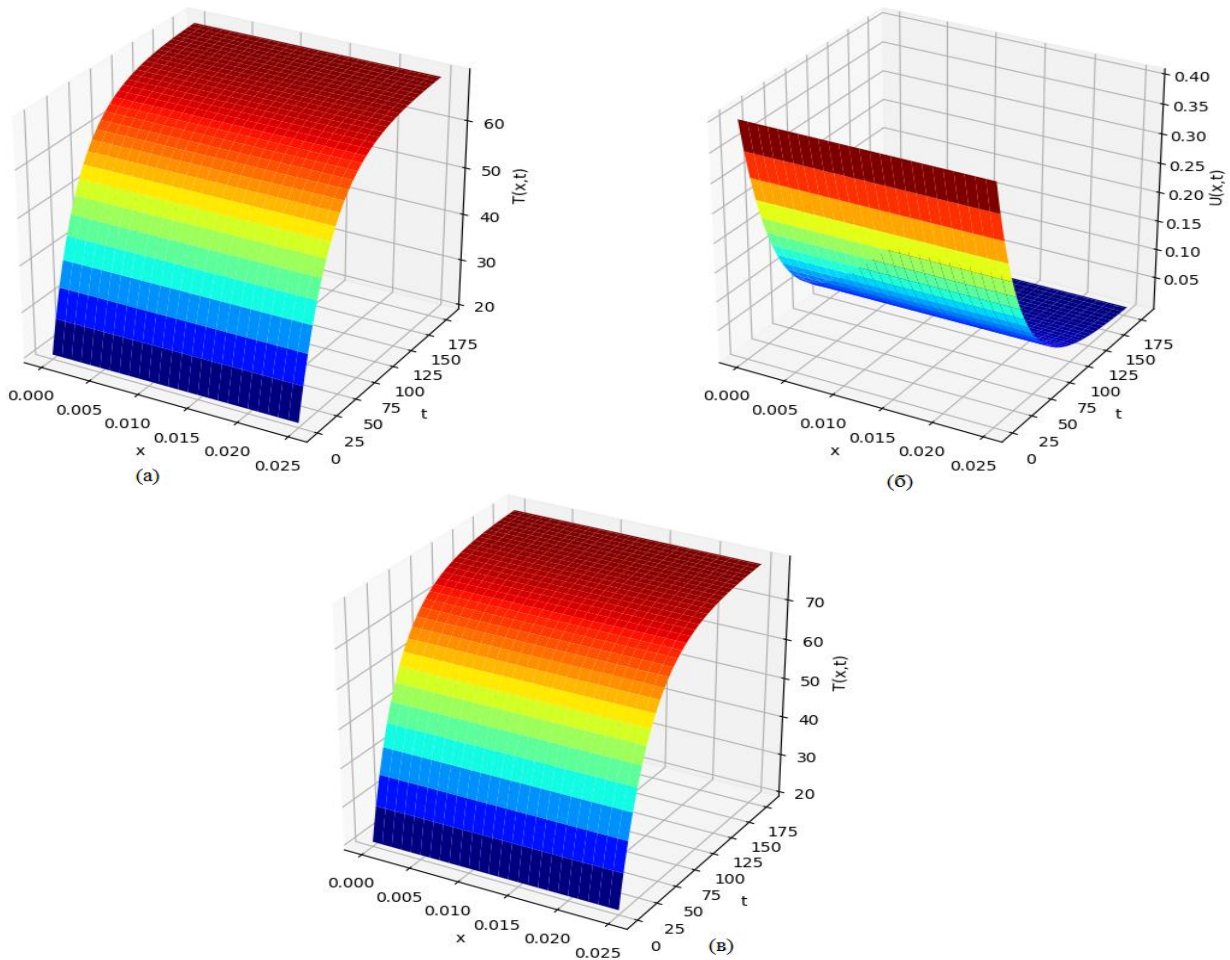


Рисунок 5.9 – Зміна температури при  $t_c = 70^\circ\text{C}$  (а), вологовмісту (б)

та температури при  $t_c = 80^\circ\text{C}$  (в) у деревині враховуючи її фрактальну структуру

На рис. 5.10 наведено зміну температури відносно часу при таких значеннях температури середовища  $t_c = 60, 70, 80^\circ\text{C}$ . Можемо бачити, що температура матеріалу з часом зростає та набуває значення температури агента сушіння (рис. 5.10, а, б, в). Такий результат вказує, що вплив фрактальної структури на зміну температури є суттєвішим із підвищенням температурного режиму сушіння, що також досліджено у праці [73]. Проте, як можна бачити із графічних залежностей (рис. 5.10, б, г) при однаковій температурі середовища та різних значеннях відносної вологості середовища ( $\varphi = 0,6$  та  $\varphi = 0,7$ ), особливої зміни температури не спостерігається.

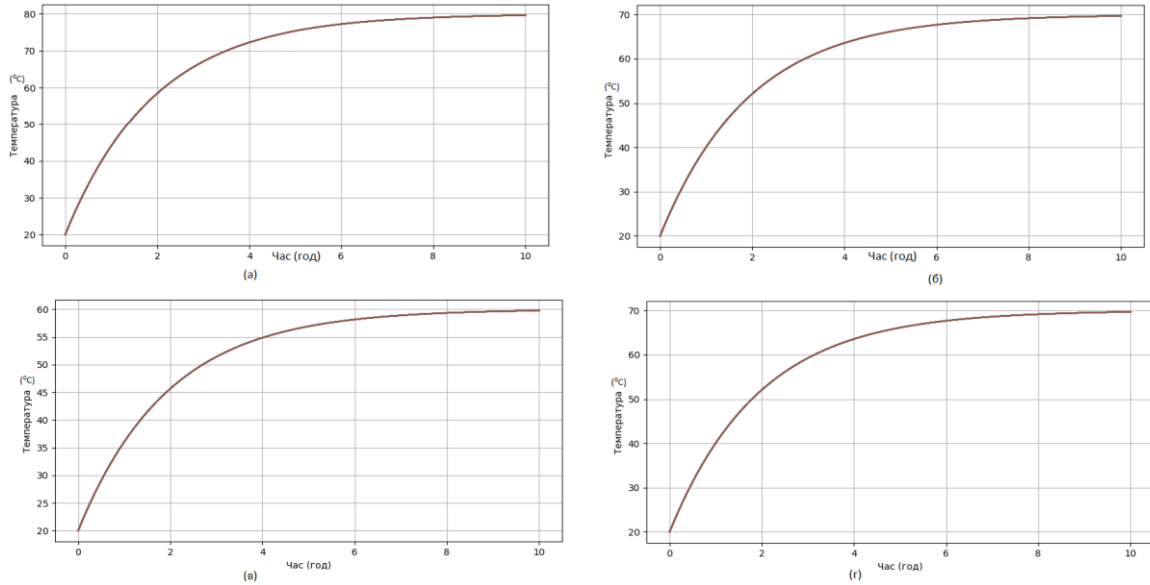


Рисунок 5.10 – Зміна температури деревини дуб з врахуванням фрактальних параметрів при температурі та відносній вологості агента сушіння (а)  $t_c = 80^\circ\text{C}$ ,

$\varphi = 0,6$  (б)  $t_c = 70^\circ\text{C}$ ,  $\varphi = 0,6$  (в)  $t_c = 60^\circ\text{C}$ ,  $\varphi = 0,6$  (г)  $t_c = 70^\circ\text{C}$  та  $\varphi = 0,7$

На рис. 5.11 а, б та 5. 12 а, показано динаміку температури чисельного експерименту математичної моделі теплообмінних процесів з врахуванням фрактальної структури деревини під час сушіння. Для аналізу коректності отриманих результатів використано експериментальні дані наведені у праці [209]. Таким чином, для деревини породи деревини – сосна, зміна температури у процесі сушіння досліджувалася з такими теплофізичними параметрами: базисна густина  $\rho_0 = 460\text{кг}/\text{м}^3$ , початкова температура –  $T_0 = 10^\circ\text{C}$ , початковий вологовміст –  $U_0 = 0.37\text{кг}/\text{кг}$ , температура середовища –  $t_c = 100^\circ\text{C}$ . Фрактальні параметри математичної моделі були вибрані такими:  $\alpha = 0.3, \beta = 1.9, \gamma = 0.1$ . Для порівняння динаміки температури м'якої та твердої породи деревини, вибрано березовий брусок довжиною як і сосновий  $l = 0.02505\text{м}$ . Результати чисельної реалізації математичної моделі та експериментальні дані наведено на рис. 5.11,а. Отже, встановлено такі закономірності: для обидвох взірців деревини температура на кінці бруска зростає швидше, ніж у центрі; через неоднорідність структури деревини можна спостерігати процес уповільнення її нагрівання; сосновий брусок нагрівається швидше на відміну від березового; зменшення параметрів  $\alpha, \beta$

моделі тепломасоперенесення призводить до пришвидшення процесу вологовиділення. Таким чином, у процесі сушіння капілярно-пористі матеріали з ефектами «пам'яті» та самоорганізації із нижчою базисною густиною мають суттєвіший вплив на динаміку температури.

На рис. 5.11 б, зображено зміну температури відносно часу для бруска деревини сосни з урахуванням фрактальних інтегро-диференціальних параметрів моделі ( $\alpha = 0.9; \beta = 1.9; \gamma = 0.9$ ). Відповідно для нехтування фрактальною структурою матеріалу покладено, що параметри моделі  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$  ( $\alpha = 1; \beta = 2; \gamma = 1$ ). Сушіння деревини проводилося протягом 8 год та за цей час температура деревини при фрактальних параметрах зросла швидше, ніж з використанням цілочисельних параметрів та досягла близько  $83^\circ\text{C}$ , що в свою чергу призводить до швидшого просушування деревини. Значення температури з урахуванням фрактальної структури деревини та без її урахування відрізняється на 7,14%. Отже, можна відзначити вплив фрактальної структури матеріалу на динаміку температури. Аналізуючи результати чисельного експерименту одновимірної задачі тепломасоперенесення для деревини берези враховуючи фрактальні та цілочисельні параметри (рис. 5.12 а), можна спостерігати, що із зменшення значення параметрів  $\alpha, \beta, \gamma$ , температура матеріалу буде швидше підніматися до температури агента сушіння.

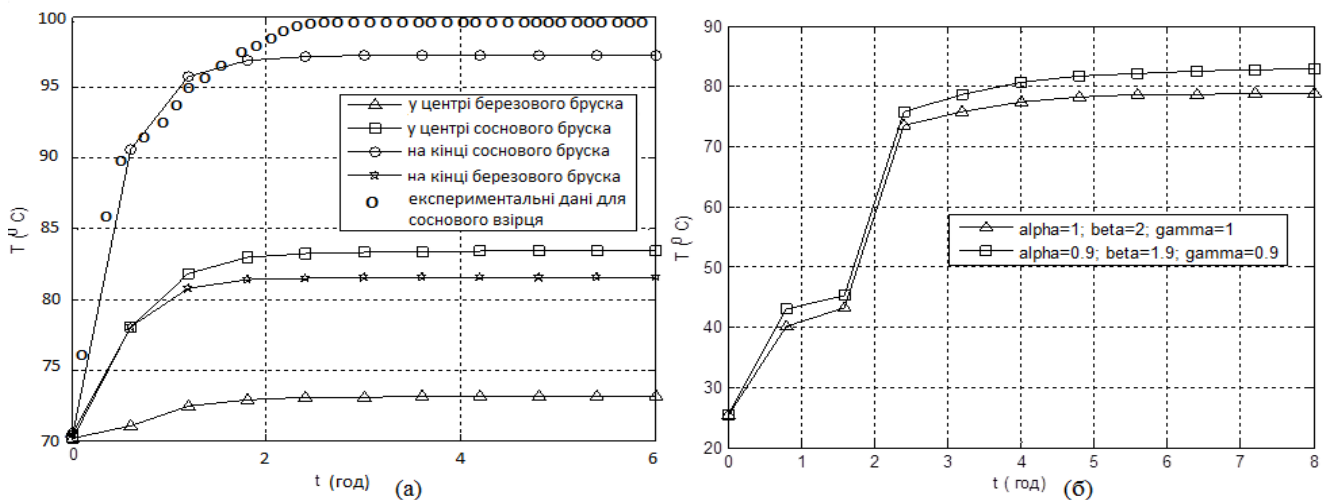


Рисунок 5.11 – Зміна температури у різних геометричних точках взірців деревини(а), на кінці бруска деревини сосни (б)

Отримані результати порівнювалися із іншими працями [183, 209], звідки можна зробити висновки про адекватність побудованої математичної моделі (2.1) – (2.8) та її чисельну реалізацію.

Показано динаміку зміни вологості для різних порід деревини враховуючи ефекти пам'яті та самоорганізації для періоду сталої та падаючої швидкості процесу сушіння. На рис. 5.12 б, зображено зміну вологовмісту для різних порід деревини під час сушіння враховуючи фрактальну структуру матеріалу. Вибрано взірці деревини сосни, берези та дуба однакової довжини  $l=0.025\text{ м}$  із базисної густиною відповідно  $\rho_{0(p)}=460\text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_{0(b)}=530\text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_{0(o)}=560\text{ кг/м}^3$ . Динаміка вологовмісту досліджувалася у центрі брусків. Таким чином, можемо бачити, що вологість у центрі взірця виділяється повільніше для дуба та берези, тобто для порід деревини з більшою базисною густиною. Такий результат також отримано у працях інших дослідників з урахуванням фрактальної структури матеріалу та без її врахування [71, 187, 189]. У [189] пояснюється, що такий результат збільшує різницю між вологовмістом на поверхні та всередині матеріалу, що також є причиною більших значень напружень у деревині із більшою базисною густиною.

Показано також залежності вмісту води відповідної породи деревини від часу при різних параметрах  $\alpha, \beta, \gamma$ . При початковому значенні вологовмісту деревини  $U=0.6\text{ кг/кг}$  та  $U=0.4\text{ кг/кг}$  на рис. 5.13 а, б, показано динаміку зміни вологості чисельного експерименту одновимірної математичної моделі процесу вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою та без її врахування. Можна бачити, що вологість із деревини будь-якої породи у середині бруска виділяється швидше із зменшенням дробово-диференціальних параметрів моделі неізотермічного вологоперенесення. Отже, використання дробово-диференціальних параметрів за часом та просторовими координатами дає змогу більш точно дослідити процес сушіння деревини та врахувати еридитарність і самоорганізацію матеріалу. Зокрема, при врахуванні фрактальної структури деревини вологовиділення збільшуться, тобто капілярно-пористий

матеріал швидше просушується та вологовміст асимптотично наближається до значення рівноважного вологовмісту. Максимальна різниця між значенням вологовмісту із врахуванням фрактальної структури матеріалу та нехтуванням нею: для дуба – 36,7%, для берези – 38,3%, для сосни – 39,53%.

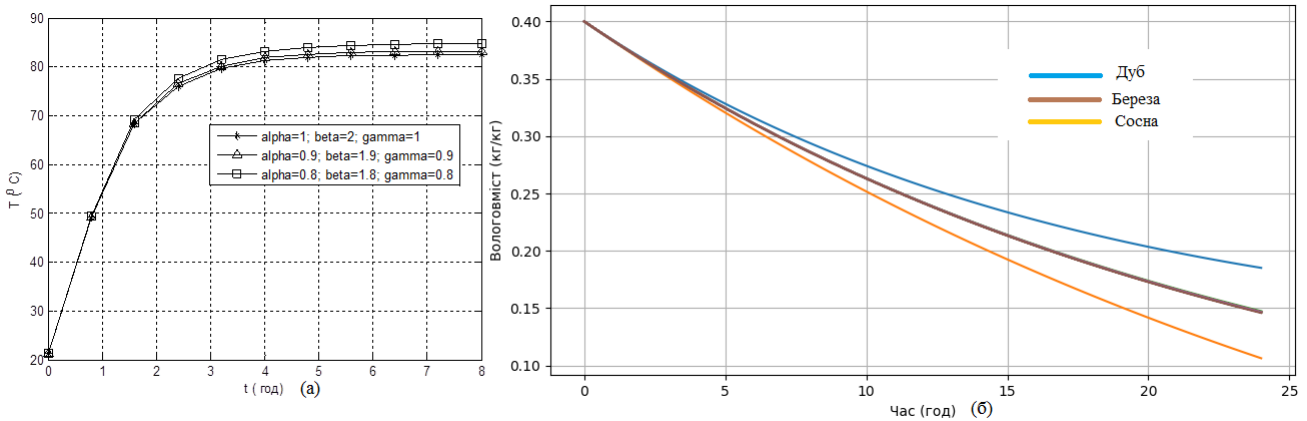


Рисунок 5.12 – Зміна температури на кінці бруска деревини берези з врахуванням фрактальних параметрів та без їх врахування (а) та вологовмісту для різних порід деревини з урахуванням фрактальної структури (б)

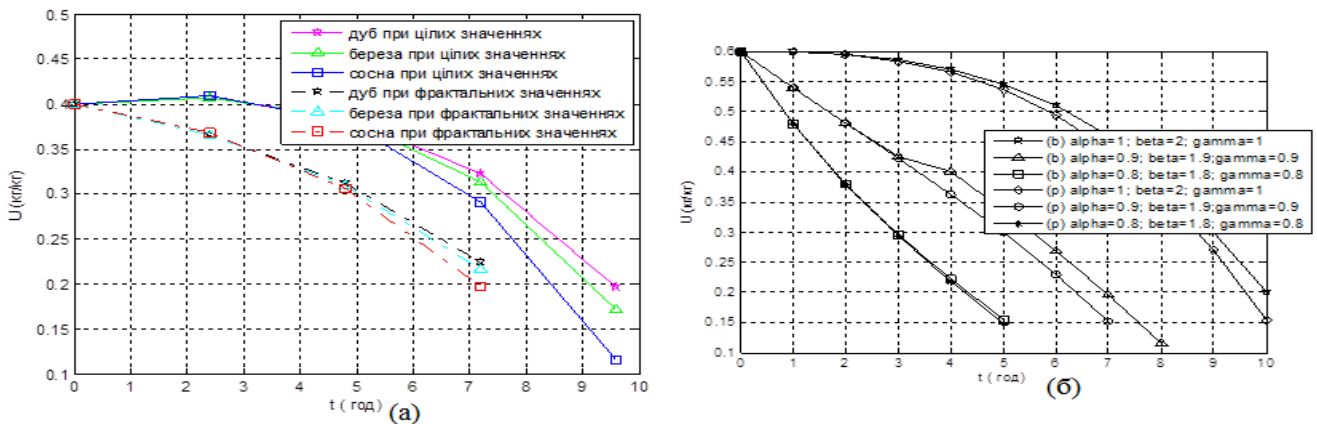


Рисунок 5.13 – Зміна вологовмісту для різних порід деревини (а) та для бруска деревини сосни та берези (б) з фрактальною структурою

Розглянемо процес виділення вологи для різних порід деревини на кінці бруска (рис. 5.14). Проаналізувавши отримані результати, а саме графічні залежності для різних порід у центрі бруска деревини (рис. 5.12 б), у середині (рис. 5.13 а, б) та на кінці (5.14), можна зауважити, що найповільніше вологість виділяється у центрі, а найшвидше вологовиділення спостерігається на кінці

бруска деревини. Ці результати збігаються із експериментальними дослідженнями проведеними у [105, 209].

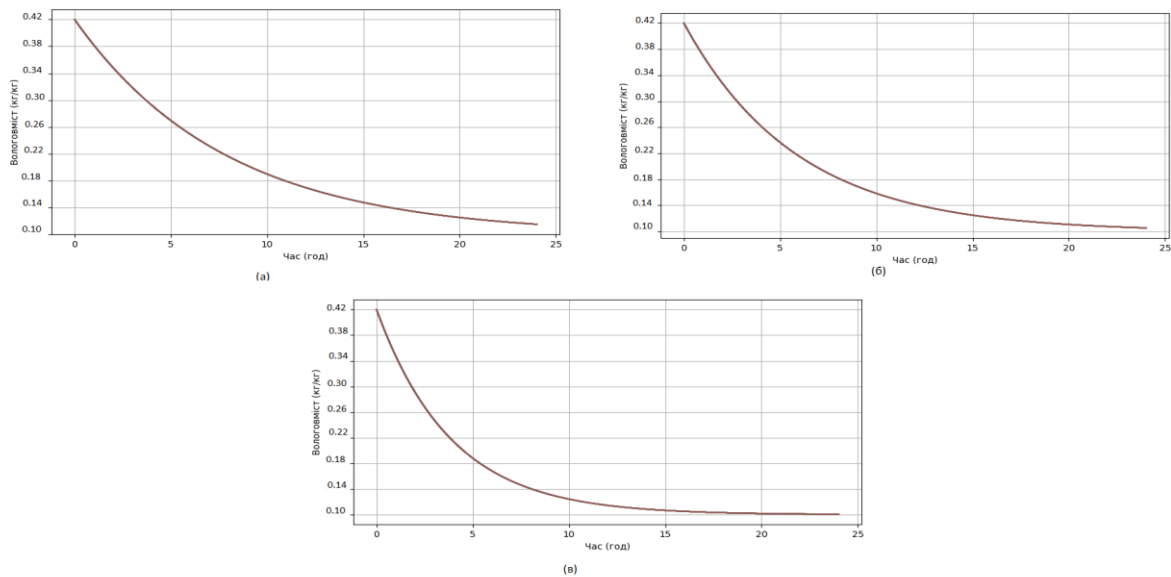


Рисунок 5.14 – Зміна вологовмісту для дуба (а) берези (б) та сосни (в) враховуючи фрактальну структуру матеріалу

Очевидно, що період падаючої швидкості процесу сушіння характеризується швидшим вологовиділенням на відміну від сталого, що змінюється за лінійним законом. Порівнюючи рис. 5.12 б та рис. 5.14, можна зробити висновок, що вологість швидше виділяється для породи деревини – сосни, а найповільніше – для дуба. Окрім цього, за результатами дослідження, можна відзначити, що для сосни період сталої швидкості сушіння є найдовший, як на відміну для дуба – найкоротший. Такі результати пояснюються різною капілярно-пористою структурою для хвойних, м'яких та твердих листяних порід. Враховуючи такі результати, можна встановити наступні закономірності: процес вологовиділення під час сушіння є повільніший для деревини із більшою базисною густиною, тобто твердих листяних порід; через неоднорідність матеріалу та властивості самоорганізації деревина твердої породи швидше відновить свій початковий стан; ефект «пам'яті» у більшій мірі спостерігається на деревині із більшою базисною густиною, окрім цього для такої деревини характерно більші значення



напруження. Отримані закономірності збігаються із результатами інших досліджень [73, 102, 105, 110, 118, 183, 209].

Для періоду падаючої швидкості процесу сушіння проведемо дослідження впливу відносної вологості агента сушіння на зміну вологості для деревини сосни (рис. 5.15). Відносна вологість змінювалася та набирала значення  $\varphi = 30, 40, 60, 70\%$ . Результати дослідження порівнювалися із результатами при урахуванні фрактальної структури матеріалу лише за часом. Умови чисельного експерименту, значення тепломеханічних характеристик та технологічних параметрів агента сушіння вибрані ідентичні до досліджень у [187]. Таким чином, результати порівняння узгоджуються та можна зробити висновок, що із зменшення відносної вологості середовища вологовиділення деревини збільшується, а значить можна зазначити істотніший вплив фрактальної структури матеріалу на зміну вологовмісту.

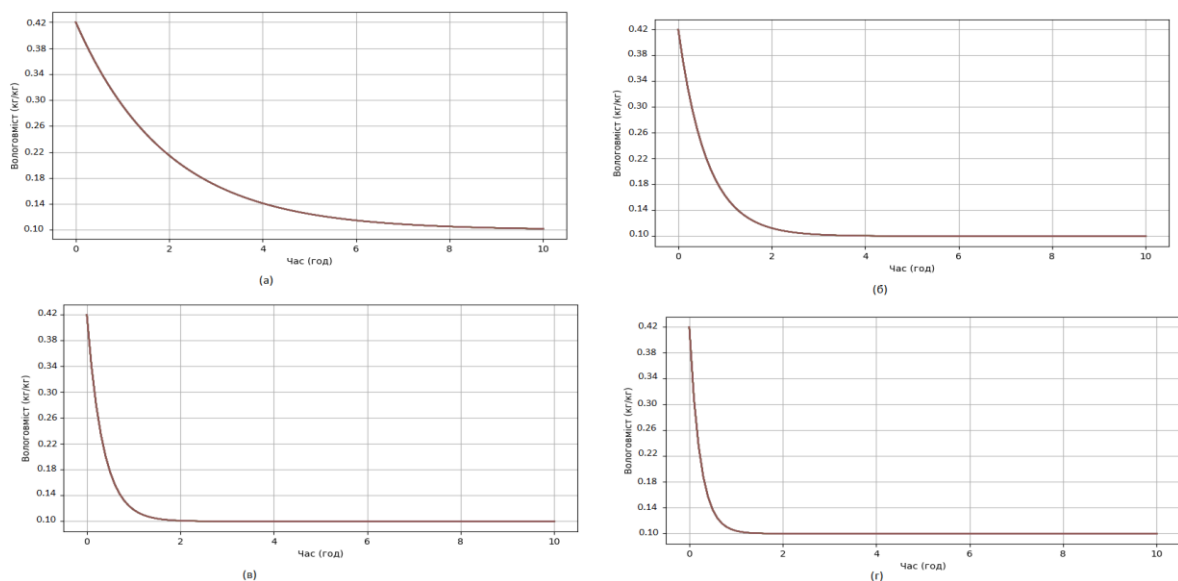


Рисунок 5.15 – Зміна вологовмісту деревини сосни з урахуванням фрактальної структури при відносній вологості середовища (а)  $\varphi = 70\%$  (б)  $\varphi = 60\%$  (в)  $\varphi = 40\%$  (г)  $\varphi = 30\%$  для періоду падаючої швидкості процесу сушіння

Шляхом порівняння експериментальних даних зміни вологовмісту для деревини дуб із базисною густиною  $\rho_{0(o)} = 560 \text{ кг/м}^3$  [209] із результатами чисельної реалізації математичної моделі неізотермічного вологоперенесення

з урахуванням фрактальної структури середовища (рис. 5.16 а) показано адекватність побудованої моделі та методу її реалізації. Значення температури агента сушіння:  $t_c = 70^\circ\text{C}$ . Початкове значення вологовмісту та температури деревини:  $U_0 = 0.5\text{кг}/\text{кг}$ ,  $T_0 = 10^\circ\text{C}$ . Відносна похибка між експериментальними даними та проведеним чисельним експериментом складає  $-2,696\%$ .

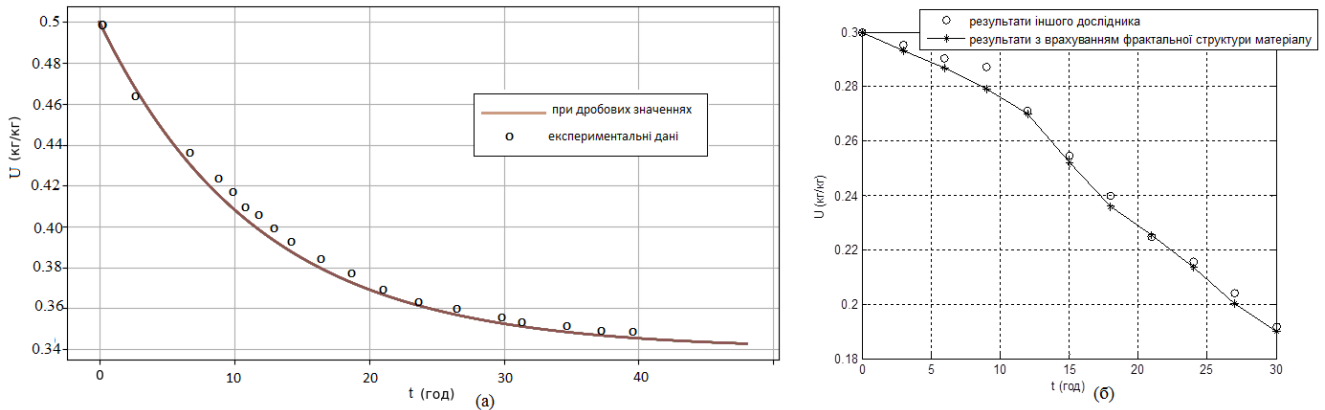


Рисунок 5.16 – Порівняння чисельного експерименту зміни вологовмісту з урахуванням фрактальної структури деревини із експериментальними даними (а) та із чисельними результатами іншого дослідника (б)

Враховуючи отримані результати досліджень у [189], проведено чисельну реалізацію математичної моделі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з урахуванням ефектів «пам'яті» та самоорганізації. Для цього фізичні параметри деревини та агента сушіння вибрано ідентичними при дослідженні [189]: базисна густина  $\rho_{0(o)} = 560\text{кг}/\text{м}^3$ , початкова температура матеріалу  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , початковий вологовміст матеріалу  $U_0 = 0.3\text{кг}/\text{кг}$ , швидкість руху агента сушіння  $\nu = 2\text{м}/\text{с}$ , відносна вологість агента сушіння  $\varphi = 77\%$ , температура середовища  $t_c = 79^\circ\text{C}$ . Із рис. 5.16 б, можна бачити, що результати обох досліджень досить близькі між собою та за 30 год сушіння вологовміст деревини становить близько  $19\text{кг}/\text{кг}$ .

Отже, встановлено закономірності тепломасообмінних процесів з урахуванням фрактальної структури деревини під час сушіння для періоду сталої та падаючої швидкостей процесу сушіння. Проведено верифікацію

та валідацію шляхом порівняння із класичними результатами у теорії теплоперенесення та у часткових випадках з працями, де фрактальність матеріалу не врахована або лише за часом.

### **5.5. Закономірності математичного моделювання деформаційно-релаксаційних процесів капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою під час сушіння.**

У цьому підрозділі ставиться за мету дослідити та встановити закономірності напружено-деформівного стану деревини під час сушіння враховуючи її ефекти «пам'яті» та самоорганзації у одно- та двовимірній області.

Чисельний експеримент визначення залежності напруження  $\sigma(t)$  та деформації  $\varepsilon(t)$  відносно часу  $t$  для моделей Максвелла, Кельвіна та Фойгта наведемо для сосни, модуль пружності якої  $E$ , ( $E=10000\text{МПа}$ ). На рис. 5.17 показано залежність напруження та деформації для реологічних моделей при фіксованому порядку дробової похідної  $\beta$  ( $\beta=0,7$ ) та змінного порядку дробової похідної  $\alpha$ . Встановлено такі закономірності: для моделей Максвелла та Кельвіна найбільше значення функції напруження досягається при більшому значенні  $\alpha$ , проте для моделі Фойгта навпаки. Порівнюючи моделі між собою при фіксованих значеннях  $\alpha$  та  $\beta$  можна зауважити, що найбільшого значення функція напруження досягає для моделі Фойгта, а найменшого – для моделі Максвелла. Відповідно до теорії механіки спадкових середовищ [171-173], при тривалих випробуваннях тіло Фойгта поводить себе як пружне тіло, оскільки в'язкий елемент не сприймає на себе ніякого навантаження. Сосна як хвойна порода деревини із меншим модулем пружності та меншою базисною густиною на відміну від листяних порід, краще описувалась би моделлю Максвелла, оскільки для таких порід деревини характерно менші значення напруження.

Найбільшого значення досягає функція деформації для моделі Максвелла, а найменшого – функція деформації для моделі Фойгта. Такий результат можна пояснити наступним: з розгляду схеми для моделі Максвелла (рис. 3.3) очевидно,

що в пружному та в'язкому елементах напруження будуть однаковими, оскільки елементи деформуються під дією тієї самої сили [172], звідки випливає, що швидкість деформації у точці  $A$  дорівнюватиме сумі швидкостей деформації для пружного та в'язкого елемента відповідно, а для моделі Фойгта навпаки – напруження різні, а деформація для в'язкого та пружного елемента однакові. Отже, можна припускати що загальна сума деформацій для моделі Максвелла буде більшою ніж сума швидкостей деформацій для моделі Фойгта. Також для усіх моделей можна спостерігати, що із збільшенням дробового показника  $\alpha$  спостерігається зменшення значення функції деформації.

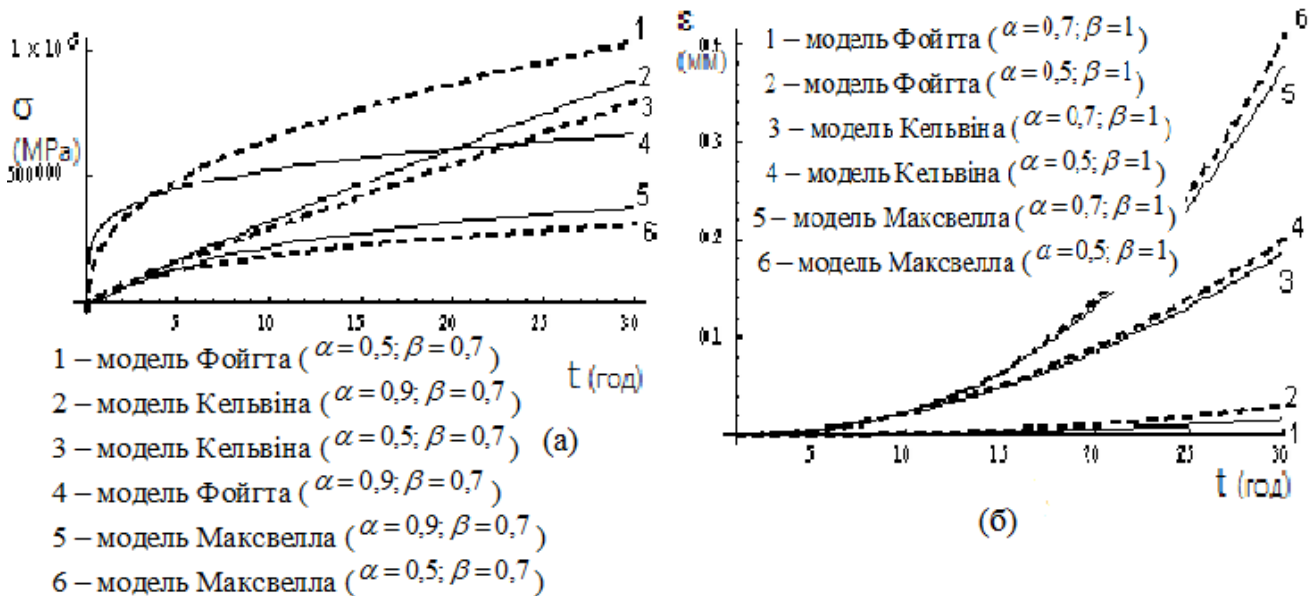


Рисунок 5.17 – Зміна (а) напруження та (б) деформацій від часу при різних фрактальних значеннях моделей для деревини сосни

Проведено також чисельний експеримент визначення залежності напруження  $\sigma(t)$  від часу  $t$  для реологічних моделей для породи деревини – дуб, модуль пружності якого  $E$ , ( $E=14300\text{МПа}$ ) (рис. 5.18, 5.19 а). Фрактальні параметри  $\alpha$  та  $\beta$  фіксовані наступним чином: дробовий параметр  $\alpha$  ближче до 1 (нехай  $\alpha$  прийме значення 0,9), при цьому фрактальний параметр  $\beta$  змінюватиметься із кроком  $\Delta\beta=0,2$ ,  $\beta=0,3+\Delta\beta$ , ( $0\leq\beta\leq 1$ ). Фрактальний параметр  $\beta$  зафіксуємо ближче до 0 (нехай  $\beta$  прийме значення 0,1), тоді  $\alpha$  змінюватимемо ( $\alpha=0,4;0,6;0,8$ ). Проаналізувавши отримані результати можна зауважити, що для моделей при

різних дробових інтегро-диференціальних значеннях параметрів функції напруження зростають. Таким чином для моделей Кельвіна та Максвелла можна спостерігати, що для фіксованого параметру  $\beta$  та змінному  $\alpha$  значення напруження капілярно-пористих матеріалів під час сушіння збільшується із зменшенням параметру  $\alpha$ , проте при фіксованому  $\alpha$  та змінному  $\beta$  навпаки – значення напруження збільшується із збільшенням змінного фрактального параметру  $\beta$  (рис. 5.18). Із отриманих результатів можна зробити відповідні висновки та рекомендації щодо обрання моделі та відповідних дробово-диференціальних показників для кращого опису відповідного деформаційно-релаксаційного процесу.

На рис. 5.20 а, зображено зміну напруження трьох моделей при різних заданих фрактальних значеннях (параметр  $\alpha$  був вибраний ближче до 1 ( $\alpha=0,9$ ), а  $\beta$  до 0 ( $\beta=0,1$ )). Проаналізувавши отримані результати та графічні залежності можна відзначити, що найбільшого значення напруження деревини у процесі сушіння досягається при використанні моделі Фойгта. Враховуючи дослідження [171-173] багато трьохелементних схем, які включають два однойменні елементи, механічно еквівалентні або основним елементам, або двохелементним схемам. Цим можна пояснити те, що криві деформацій та напруження деревини під час сушіння для моделей Кельвіна та Максвелла досить близькі між собою.

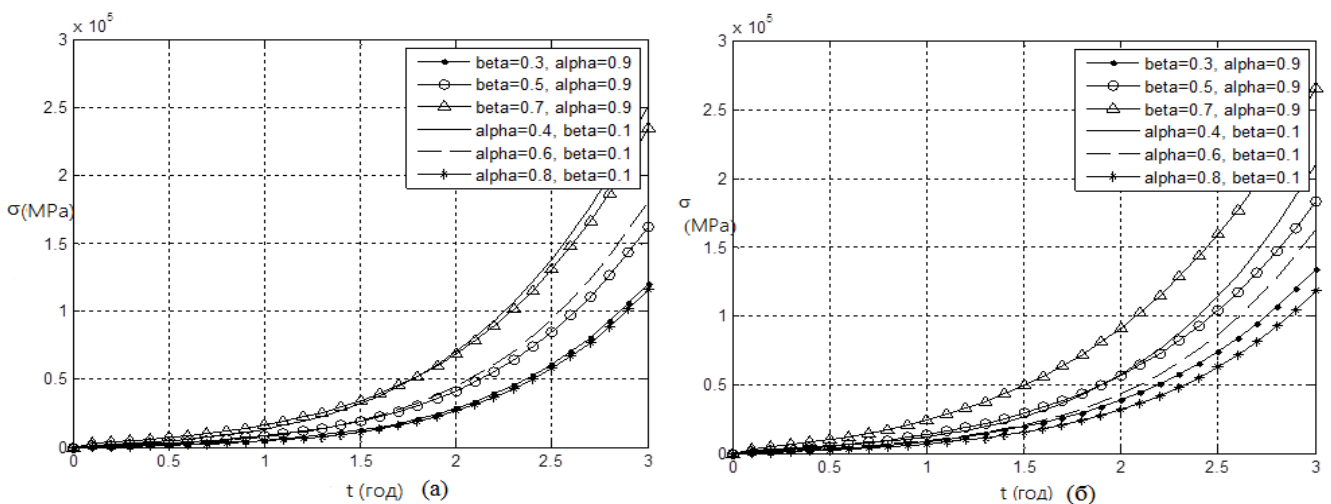


Рисунок 5. 18 – Залежність напруження відносно часу для моделі Максвелла(а) та для Кельвіна (б) при різних фрактальних параметрах

На рис. 5.19 б та 5.20 а, зображено графічні залежності напруження та деформацій дробово-диференціальних моделей для породи деревини сосни з модулем пружності відповідно  $E=10200\text{МПа}$  при різних параметрах моделей  $\alpha, \beta$ . Для дослідження деформацій та напруження параметр  $\alpha$  фіксувався та приймав відповідно значення -  $\alpha=0.4$  та  $\alpha=0.9$ , параметр  $\beta$  змінювався. Із графічних залежностей можна зробити висновок, що значення напруження та деформацій із збільшенням часу набирають все більшого значення, та відповідно криві деформацій та напруження зростають. У [171] це пояснюється так: якщо в моделі-схеми реологічних тіл не будуть входити пластичні елементи, тобто механічні схеми цих тіл будуть складатися лише із пружних і в'язких елементів, то звідси випливає, що при тривалій дії постійного напруження деформації таких реологічних тіл будуть необмежено зростати.

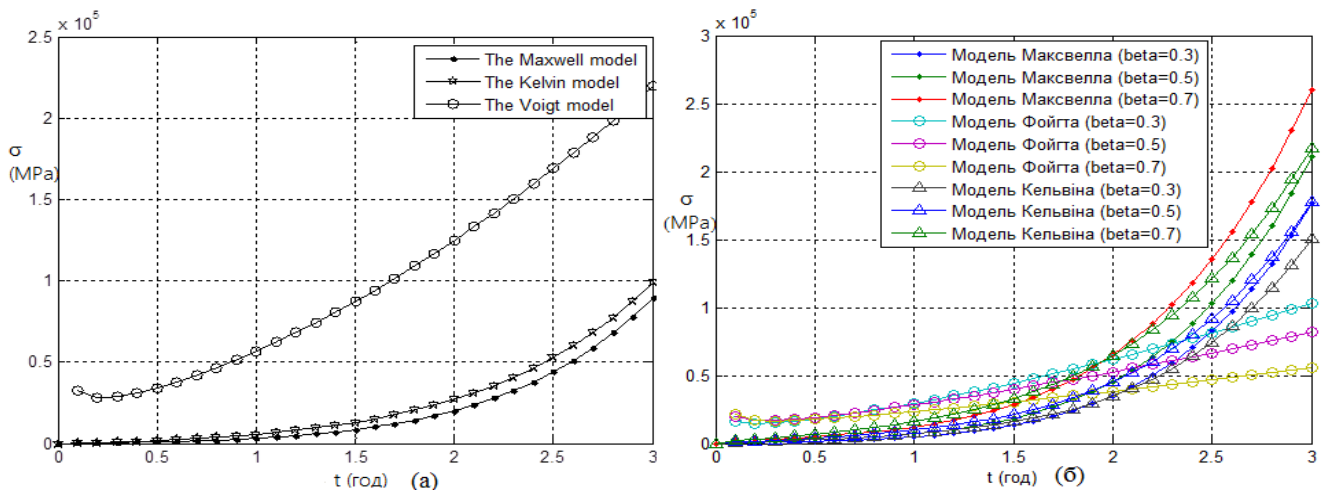


Рисунок 5.19 – Зміна напружень при різних значеннях параметрів моделей

Відомо [172], що тіло Фойгта при короткочасних випробуваннях поводитиме себе як звичайна ньютонівська рідина. Із рис. 5.20а, очевидно, що при постійних напруженнях найменшого значення приймає величина деформацій для дробово-диференціальної моделі Фойгта, що пояснюється тим, що при швидких деформаціях і малих часах спостереження модель Фойгта є ідеальною в'язкою рідиною Ньютонівського типу, що узгоджується із загальним правилом реології, за яким поведінка матеріалу, спостережувана при експериментах, суттєво залежатиме від умов експерименту [171]. Отже, звідси можна зробити висновок про те, що

навантаження матеріалу має вплив на те як себе буде поводити певна реологічна модель залежно від власної механічної схеми.

На рис. 5.20 б, зображено зміну деформації для фрактальної моделі Максвелла залежно від породи деревини у процесі сушіння. Очевидно, що найбільше значення деформації характерне для породи деревини сосни, а найменше – для берези, що пояснюється наявністю різної неоднорідної капілярно-пористої структури кожної з порід деревини. Можна відмітити, що деформація для порід із меншим модулем пружності є більшою, що можна пояснити різною будовою капілярно-пористої структури деревини. Так, наприклад, хвойні породи деревини характеризуються більшою наявністю пор на відміну від листяних порід.

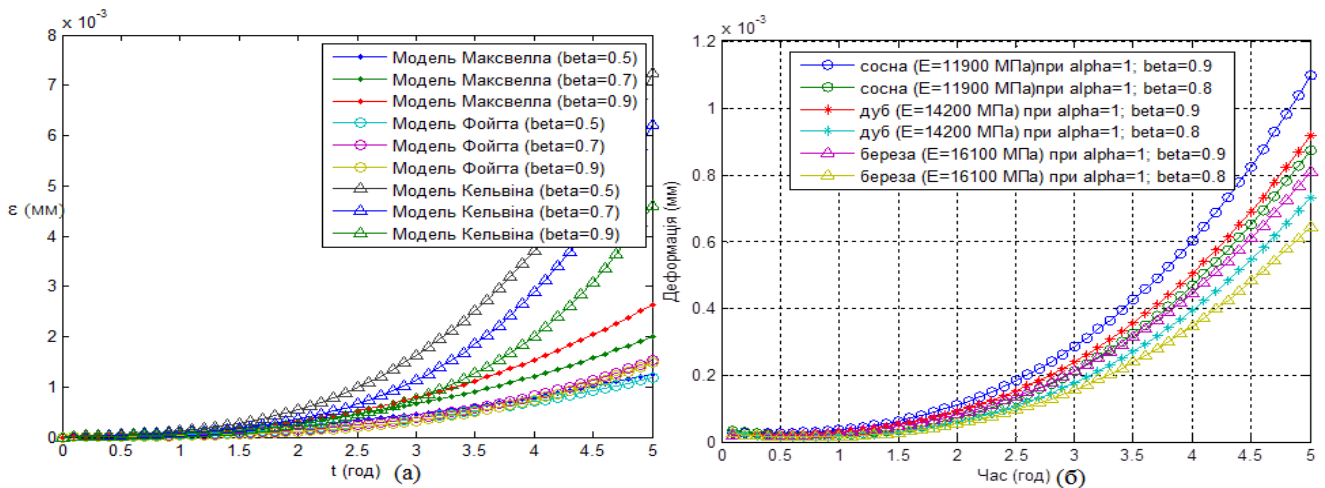


Рисунок 5.20 – Залежності деформацій дробово-диференціальних моделей

Досліджено зміну деформації для породи деревини береза використовуючи реологічну модель Кельвіна з урахуванням фрактальної структури середовища та без її врахування (рис. 5.21 а). Згідно із експериментальними дослідженнями [105], час релаксації для породи деревини береза становив 130 хв, а також узявши середнє значення модуля пружності  $E=16,1$  ГПа, проведено аналіз зміни деформації протягом 10 год. Такі дослідження показали, що зменшуючи дробово-диференціальний параметр  $\beta$ , функції деформації зростають повільніше та при значенні  $\beta=0,1$ , крива деформації набуває такого вигляду, при якому деформація капілярно-пористого матеріалу під час сушіння найменша. Тобто можливо

прослідкувати зв'язок між фрактальними параметрами моделі та процесу зміни деформації. Звідси також можна зробити висновок про вплив фрактальної структури матеріалу на процеси в'язко-пружної деформації, а саме: якщо показник фрактальності є ближчим до нуля, то це можна трактувати як наявність «не повної» пам'яті, що призводить до не значних деформацій, та навпаки чим ближчий показник фрактальності до одиниці, тим більша деформація матеріалу.

Проаналізувавши графічні залежності деформації деревини у процесі сушіння (рис. 5.21 б) при цілочисельних параметрах та одному фрактальному параметрі можна відмітити, що зміна лише одного параметра моделі на нецілочисельний призводить до зменшення деформації, зокрема найбільш виражено це відбувається на породах деревини із меншим модулем пружності. Також як і у випадку моделі Маквелла, для моделі Фойгта найбільша деформація спостерігається для сосни, що належить до м'якої породи деревини.

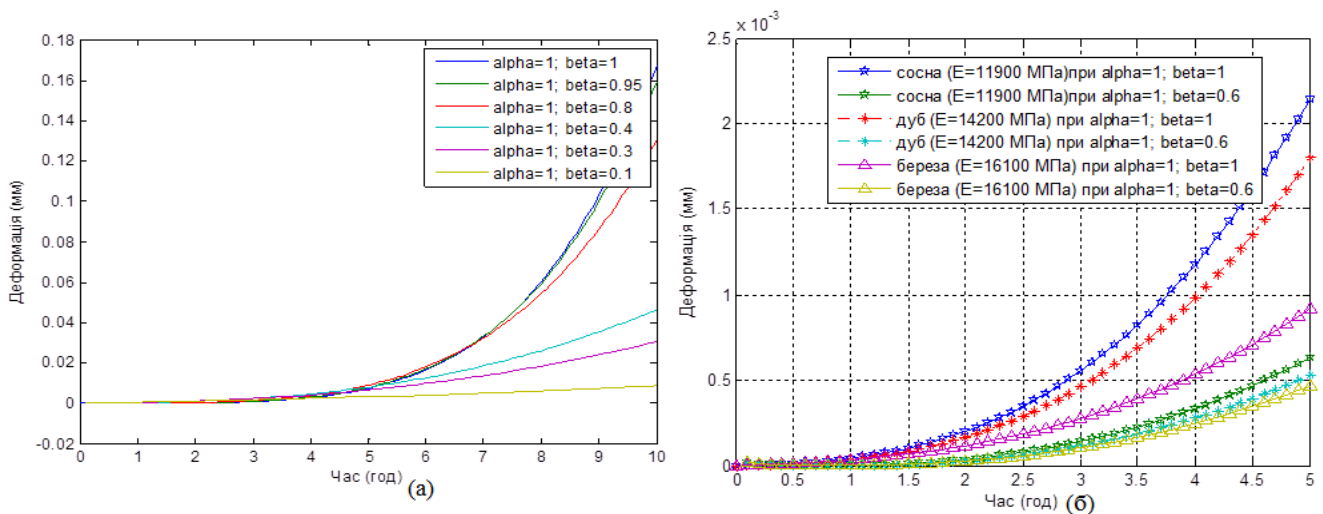


Рисунок 5.21 – Зміна деформацій дробово-диференціальної моделі

Кельвіна(а) та Фойгта (б) при врахуванні цілочисельних та дробових параметрів

Проведемо чисельну реалізацію двовимірної математичної моделі в'язкопружного деформування взявши за основу дробово-диференціальну двовимірну модель Фойгта. Для цього вибрано сосновий, дубовий та березовий брусок розміром  $[l_1; l_2] = [0.02; 0.02] \text{ м}$  з такими реологічними характеристиками: густина – для сосни –  $\rho = 390 (\text{кг}/\text{м}^3)$ ; для берези –  $\rho = 520 (\text{кг}/\text{м}^3)$ ; для дуба –



$\rho = 580(\text{кг}/\text{м}^3)$ ; модулі пружності та зсуву – для сосни ( $E_{11} = 0.7653(\text{ГПа})$ ,  $E_{22} = 0.4385(\text{ГПа})$ ,  $\mu = 0.583(\text{ГПа})$ ); для берези ( $E_{11} = 1.3927(\text{ГПа})$ ,  $E_{22} = 0.7357(\text{ГПа})$ ,  $\mu = 0.2737(\text{ГПа})$ ); для дуба ( $E_{11} = 1.2831(\text{ГПа})$ ,  $E_{22} = 0.6591(\text{ГПа})$ ,  $\mu = 0.2483(\text{ГПа})$ ); значення коефіцієнтів температурного розширення та коефіцієнтів вологісного всихання – для сосни –  $\alpha_{11} = 15 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_{22} = 29 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $\beta_{11} = 12.2\%$ ,  $\beta_{22} = 10.5\%$ ; для берези –  $\alpha_{11} = 27.2 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_{22} = 30 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $\beta_{11} = 13.7\%$ ,  $\beta_{22} = 12.4\%$ ; для дуба –  $\alpha_{11} = 29.3 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_{22} = 41 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $\beta_{11} = 10.5\%$ ,  $\beta_{22} = 8\%$ ; коефіцієнти Пуассона для сосни –  $\nu_{12} = 0.38$ ,  $\nu_{21} = 0.79$ ; для берези –  $\nu_{12} = 0.49$ ,  $\nu_{21} = 0.81$ ; для дуба –  $\nu_{12} = 0.34$ ,  $\nu_{21} = 0.83$ . Беручи до уваги попередні дослідження, що проводилися у підрозділі 5.2 апроксимовано наступні функції температури та вологовмісту залежно від просторових координат:

$$T(x_1) = 80.3575 \cdot (1 - e^{-0.0258 \cdot x_1}) + 19.0761, \quad T(x_2) = 120.5363 \cdot (1 - e^{-0.0258 \cdot x_2}) + 19.0761,$$

$$U(x_1) = -0.0015 \cdot x_1^2 + 0.0321 \cdot x_1 + 0.1194, \quad U(x_2) = -0.00225 \cdot x_2^2 + 0.04815 \cdot x_2 + 0.1791.$$

Враховуючи результати ідентифікації виберемо такі значення параметрів:  $\tau = 7.0538(10^3 \text{ год})$ ,  $E = 15.9(\text{ГПа})$ ,  $W = 45\%$ , дробові порядки моделі –  $\alpha = 0.1885$ ,  $\beta = 0.1905$ . На рис. 5.22 зображено графічні залежності компоненти деформацій  $\varepsilon_{12}$  та напруження  $\sigma_{12}$  від часу для різних порід деревини. Аналізуючи дані графіки можна зробити наступні висновки: із збільшенням часу сушіння деформації та напруження у радіально-тангентальному напрямі анізотропії дещо зменшуються, зокрема найбільшого значення деформації та напруження досягає сосновий взірець, а найменшого – дубовий. Отже, можна відзначити вплив фрактальної структури матеріалу на криві напруження та деформацій, зокрема найбільш виражено це відбувається для порід деревини із меншою базисною густиною. Такий результат відповідно до експериментальних досліджень у [102, 118] можна пояснити так: деревина із меншою базисною густиною є відповідно

менш пружним матеріалом, а тому для таких капілярно-пористих матеріалів характерне більше значення залишкових деформацій у процесі сушіння.

У парцях Шиманського В. М. також досліджено, що фрактальна структура матеріалу має більший вплив на породи деревини із меншою густиною («м'які породи»), ніж на деревину із більшою густиною, так звані «тверді породи». Таким чином відмінність між кривими напруження із урахуванням фрактальної структури та без її урахування для твердіших порід не перевищує 16,7%, натомість різниця для порід із меншою густиною сягає 19,6 – 24%.

На рис. 5.23-5.24 досліджено динаміку компонент деформацій  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  та напружень  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  для взірця деревини сосни залежно від зміни фрактального елемента  $\beta$ . Решта фрактальних параметрів не змінювалися в процесі чисельної реалізації та приймали такі значення –  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$ . Проаналізовано вплив фрактальних параметрів на динаміку зміни напружень та деформацій відносно часу. Із графічних залежностей можна отримати висновки, що криві деформації при цілочисельному параметрі  $\beta = 1$  відрізняються від кривих з використанням фрактального параметра  $\beta$  суттєво. Зокрема, чим більша різниця відхилення від значення – 1, тим більша спостерігається різниця у значеннях деформації.

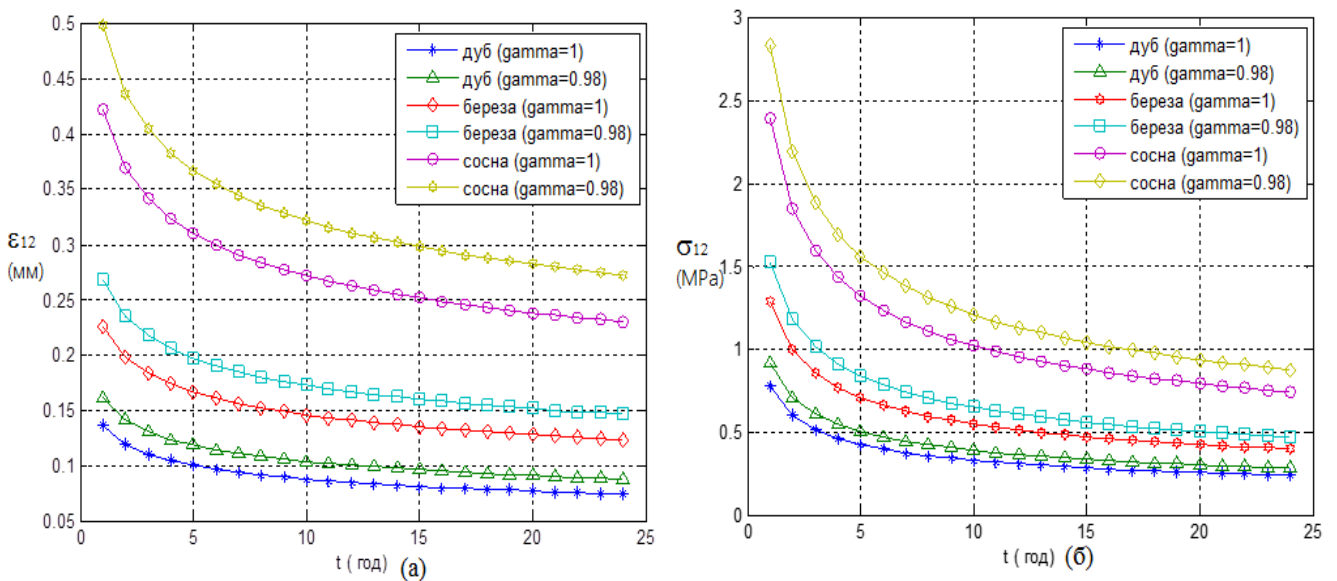


Рисунок 5.22 – Зміна компоненти деформацій  $\varepsilon_{12}$  (а) та напружень  $\sigma_{12}$  (б) залежно від породи деревини

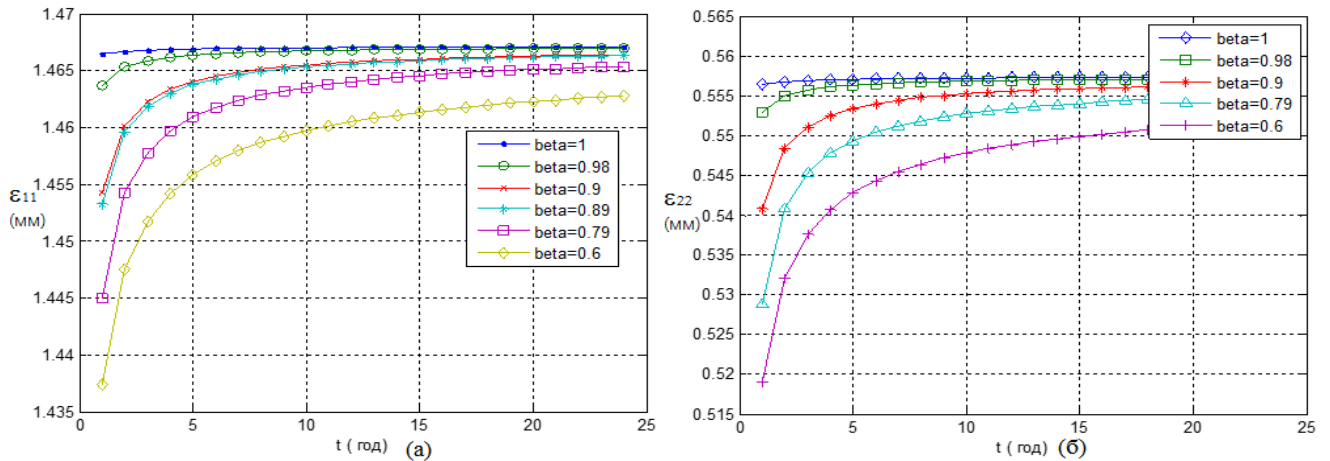


Рисунок 5.23 – Зміна компоненти деформацій  $\varepsilon_{11}$  (а) та деформацій  $\varepsilon_{22}$  (б) для деревини сосни залежно від зміни фрактального параметра  $\beta$

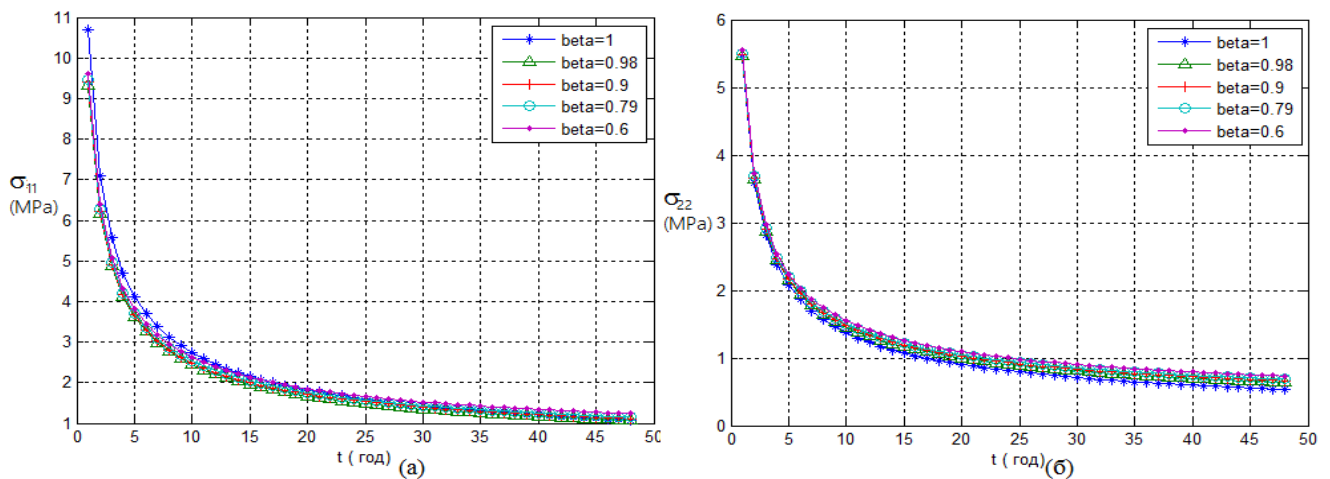


Рисунок 5.24 – Зміна компоненти напруження  $\sigma_{11}$  (а) та  $\sigma_{22}$  (б)

Проведено чисельний експеримент для взірця деревини берези залежно від зміни фрактального параметру  $\alpha$  (рис. 5.25-5.26). Параметри моделей  $\gamma, \beta$  вибрані цілочисельні та рівними значенню – 1. Встановлено наступні закономірності: значення деформації у радіальному напрямі анізотропії є більшими, ніж у тангентальному напрямі; деформації у обидвох напрямках анізотропії відносно часу є зростаючими функціями; у обидвох напрямках анізотропії найбільшого значення деформації досягають при  $\alpha=0.9$ , а найменшого при  $\alpha=0.3$ . Дослідження проводилося протягом 48 год та показало, що деформації у радіальному і тангентальному напрямі анізотропії протягом певного часу до кінця експерименту набували майже сталого значення. Із графічних залежностей

напруження відносно часу (рис. 5.25 б та 5.26 б) можна бачити, що фрактальний параметр  $\alpha$  не суттєво впливає на значення напруження у радіальному і тангентальному напрямках анізотропії.

Отже, досліджено динаміку напруження та деформацій у різних напрямках анізотропії під час сушіння різних порід деревини з урахуванням фрактальної структури капілярно-пористого матеріалу та без її врахування. Отримані результати шляхом порівняння узгоджуються із іншими дослідженнями у працях [92, 103, 124, 126, 127, 133, 171-173, 182].

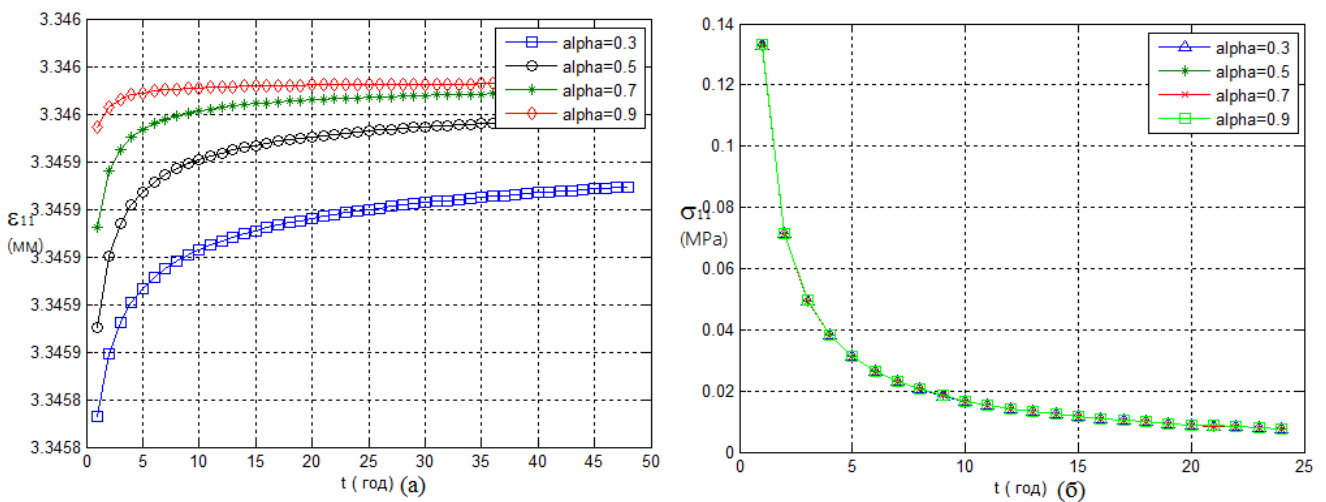


Рисунок 5.25 – Зміна компоненти деформацій  $\varepsilon_{11}$  (а) та напруження  $\sigma_{11}$  (б) для деревини берези залежно від зміни фрактального параметра  $\alpha$

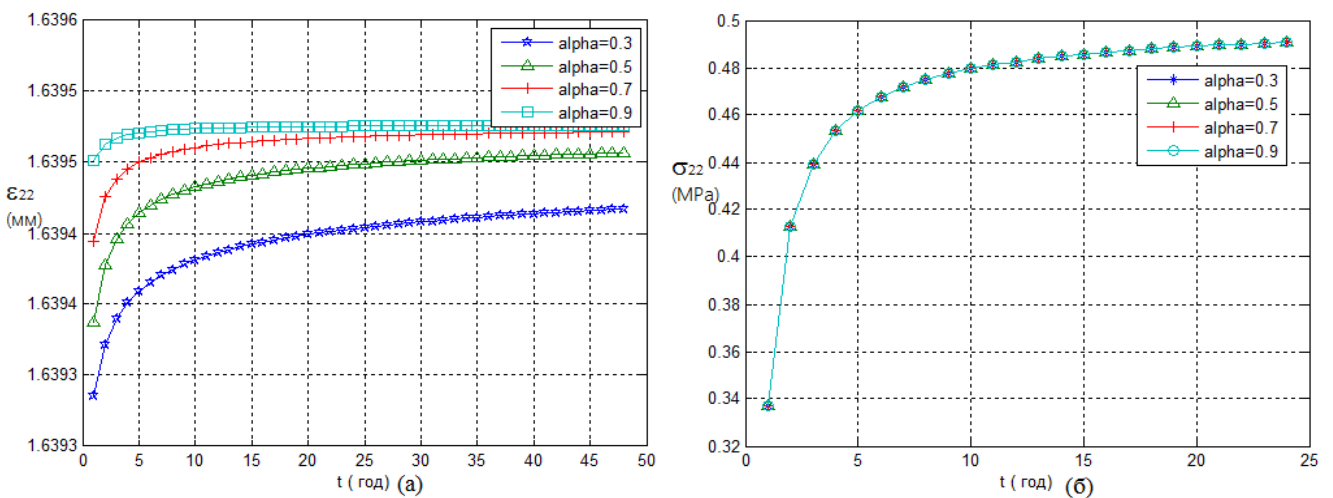


Рисунок 5.26 – Зміна компоненти деформацій  $\varepsilon_{22}$  (а) та напруження  $\sigma_{22}$  (б) для деревини берези залежно від зміни фрактального параметра  $\alpha$

### 5.7. Висновки до 5 розділу

- Розроблено прикладне програмне забезпечення із графічним інтерфейсом для введення вхідних параметрів технологічного процесу, що дозволяє обчислити значення температури та вологовмісту, величин компонент напружень та деформацій у деревині під час сушіння.

- Встановлено закономірності чисельного моделювання неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з урахуванням фрактальної структури для періоду сталої та падаючої швидкості сушіння залежно від породи деревини, температури та відносної вологості агента сушіння. Встановлено, що зменшення дробово-диференціальних параметрів моделі призводить до швидшого виділення вологості із матеріалу. Капілярно-пористі матеріали із врахуванням фрактальної структури базисна густина яких більша прогріваються повільніше.

- Встановлено закономірності чисельного моделювання деформаційно-релаксаційних процесів капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, враховуючи властивості еридитарності та самоорганізації під час сушіння залежно від породи, тепломеханічних характеристик, напряму анізотропії. Встановлено, що зміна лише одного параметра моделі на нецілочисельний призводить до зменшення деформації матеріалу, зокрема найбільш характерно це для деревини із меншим модулем пружності.

- Розроблено алгоритм ідентифікації фрактальних параметрів реологічних моделей, що дає можливість оцінити значення пружних та залишкових деформацій, врахувати ефект «пам'яті» форми деревини та вплив початкового напруження, вологості капілярно-пористого матеріалу на деформаційні перетворення у процесі сушіння.

- Проведено верифікацію та валідацію отриманих результатів шляхом порівняння із експериментальними даними, результатами чисельних досліджень, у котрих не враховано фрактальну структуру матеріалу або враховано лише по часі. Встановлено, що побудовані математичні моделі деформаційних і теплообмінних процесів, розроблені алгоритми їх чисельної реалізації є адекватними, оскільки узгоджуються із відомими експериментальними і теоретичними даними.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальне наукове завдання розроблення та чисельної реалізації математичних моделей процесів деформування та тепломасоперенесення капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, під час сушіння з урахуванням еридитарності та самоорганізації, що дає можливість підвищити якість висушеного матеріалу.

**1.** Побудовано математичну модель тепломасоперенесення капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння на основі використання дробового інтегро-диференціального апарату, що дозволяє проаналізувати динаміку зміни температури та вологості деревини з урахуванням ефектів «пам'яті» та самоорганізації матеріалу для періоду сталої та падаючої швидкостей сушіння. Розроблено скінченно-різницеві схеми для апроксимації математичної моделі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння, що дає змогу провести реалізацію алгоритму чисельного методу. Встановлено умови стійкості різницевих схем, котрі шляхом порівняння узгоджуються із результатами інших досліджень.

**2.** На підставі нецілочисельного інтегро-диференціального апарату отримано аналітичні співвідношення у інтегральній формі для визначення деформацій та напружень дробово-диференціальних реологічних моделей, які дозволяють встановити динаміку напружено-деформаційного стану деревини у процесі сушіння з урахуванням еридитарності та самоорганізації матеріалу, отримати термодинамічні функції, ядра релаксації та повзучості дробово-диференціальних моделей.

**3.** Побудовано двовимірні математичні моделі деформаційних процесів капілярно-пористих матеріалів під час сушіння, які дають можливість врахувати фрактальну структуру матеріалу залежно від початкових значень температури та вологовмісту, тепломеханічних характеристик анізотропії, різних порід деревини. Розроблено алгоритм чисельної реалізації двовимірних математичних моделей в'язко-пружної деформації капілярно-пористих матеріалів під час сушіння, який

дозволяє обчислити компоненти напружено-деформаційного стану деревини з урахуванням ефектів «пам'яті» та самоорганізації.

**4.** Проведено адаптацію методу розщеплення дробово-диференціальних ядер повзучості деревини, що дає можливість визначити ядра зсувної і функції швидкості об'ємної повзучості за експериментальними даними одновимірних моделей в'язко-пружної деформації, ідентифікувати дробово-диференціальні параметри моделей з урахуванням фрактальної структури середовища та оцінити значення пружних і залишкових напружень капілярно-пористих матеріалів під час сушіння.

**5.** Встановлено закономірності чисельного моделювання неізотермічного вологоперенесення для періоду сталої та падаючої швидкості сушіння та в'язко-пружного деформування деревини у процесі сушіння з урахуванням фрактальної структури матеріалу залежно від породи, тепломеханічних характеристик та параметрів агента сушіння, що дає можливість оцінити залишкову деформацію матеріалу. Встановлено, що зменшення дробово-диференціальних параметрів моделей призводить до швидшого виділення вологості із матеріалу та зменшення деформацій, зокрема найбільш характерно це для деревини із меншим модулем пружності. Відмінність між кривими напруження із урахуванням фрактальної структури та без її урахування для твердіших порід не перевищує 16,7%, натомість різниця для порід із меншою густиною 19,6 – 24%. Проведено верифікацію і валідацію отриманих результатів шляхом порівняння із експериментальними даними та результатами чисельних досліджень, у котрих не враховано фрактальну структуру матеріалу або враховано по часі.

**6.** Розроблено алгоритм ідентифікації дробово-диференціальних параметрів моделей та прикладне програмне забезпечення для розрахунку тепломасообмінних і деформаційних процесів під час сушіння деревини з урахуванням ефекту «пам'яті» та самоорганізації, що дають можливість визначити такий напружено-деформаційний стан деревини, який би мав не

перевищувати границю міцності матеріалу та підвищувати його якість у технологічному процесі сушіння деревини. Результати досліджень прийняті для практичного використання на ВКФ «Ледас-Україна» (м. Хуст, Закарпатська обл.) та впроваджені у навчальний процес Національного лісотехнічного університету України.



### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ahmad B. Existence results for nonlinear impulsive hybrid boundary value problems involving fractional differential equations / B. Ahmad, S. Sivasundaram // *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.*- 2009. – Vol. 3, No. 3 – P. 251-258.
2. Al-Khaled K. Numerical solution of time-fractional partial differential equations using Sumudu decomposition method / K. Al-Khaled // *Rom. Journ. Phys. Bueharest*,- 2015. – Vol. 60, Nos.1-2. – P. 99-110.
3. Barkai E. From continuous time random walks to the fractional Fokker–Planck equation / E. Barkai, R. Metzler, J. Klafter / *Phys.Rev.* – 2000. – Vol. 61, No. 1. – P. 132-138.
4. Barnsley M.F. Fractal functions and interpolation / M.F. Barnsley // *Constr. Approx.* 2, 1986. – P. 303-329.
5. Benson D.A. The fractional-order governing equation of Levy motion / D.A. Benson, S.W. Wheatcraft, M.M. Meerschaert // *Water Resour. Res.* – 2000. – Vol. 36, No. 6. – P. 1413-1423.
6. Bodig J. Mechanics of wood and wood composites / J. Bodig, B.A. Jayne // Krieger Publishing Company, 1993. – 712 p.
7. Busher V. Modeling and identification of systems with fractional order integration of systems with fractional order integral and differential / V. Busher, V. Yarmolovich *Journal Electrotechnic and Computer Systems.* – 2014. – No. 15 (91). – P. 52-56.
8. Chen Y.Q. Analytical stability bounded for a class of delayed fractional-order dynamic systems / Y.Q. Chen, K.L. Moore // *Nonlinear Dynam.*, 29. –2002. – P. 191-200.
9. Chen Y. Applications of Fractional Exterior Differential in The Dimension space / Y. Chen, Ya. Zhang // *Appl. Math. Mech.* - 2003. – Vol. 24, No. 3. – P. 216-260.
10. Cottrill-Shepherd K. Fractional differential forms / K. Cottrill-Shepherd, M. Naber // *Journal of Mathematical Physics.* – 2001. – Vol.42, No.5. – P. 2203-2212.

11. Cupial P. Some approaches to the analysis of non proportionally damped viscoelastic structures / P. Cupial // Proc. Int. Symp. on Dynamics of Continua: D. Besdo and R. Bogacz (eds), Sept.9-13 1996, Physikzentrum Bad Honnef. – Physikzentrum Bad Honnef. – 1996. – P. 93-102.
12. Datsko B. Different types of instabilities and complex dynamics in reaction-diffusion systems with fractional derivatives / B.Y. Datsko, V.V. Gafiychuk // Computational and Nonlinear Dynamics. – 2012. – DOI No: CND-09-1119.
13. Debnath L. Recent applications of fractional calculus to science and engineering / L. Debnath // Int. J. Math. Math. Sci. 54. – 2003. – P. 3413-3442.
14. Diethelm K. An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order / K. Diethelm // Electron. Trans. Numer. Anal, 5. – 1997. – P. 1-6.
15. Ferdri Y. Some applications of fractional order calculus to design digital filters for biomedical signal processing / Y. Ferdri // J. Mech. Med. Biol. 12(2), 13 – (2012).
16. Ford N.J. Numerical and analytical treatment of differential equations of fractional order / N. Ford, A. Simpson // In Proc. Internat. Conf. on Sci. Comp. & Math. Modeling, Inst. Of Applied Science and Computations, Charleston, 2000. – P. 60-65.
17. Ford N.J. The numerical solution of fractional differential equations: speed versus accuracy / N. Ford, A. Simpson // Numer. Algorithms, 26(4). – 2001. – P. 333-346.
18. Friedrich C. Relaxation and retardation functions of the Maxwell model with fractional derivatives / C. Friedrich // Rheologica Acta., 30. – 1991. – P. 151-158.
19. Gafiychuk V. Mathematical modeling of different types of instabilities in time fractional reaction-diffusion systems / V. Gafiychuk, B. Datsko // Computers and Mathematics with Applications, 59. - 2010. – P. 1101-1107.
20. Gorenflo R. Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order/ R. Gorenflo, F. Mainardi // CISM Lecture Notes, International Centre for Mechanical Sciences. – 2008. – P. 223-276.
21. Gorenflo R. Fractional calculus and continuous-time finance / R. Gorenflo, F. Mainardi, E. Scalas, M. Raberto // III. The diffusion limit, Math. Finance (Konstanz, 2000). – 2001. – P. 171-180.

22. Grahovac N.M. Modelling of the hamstring muscle group by use of fractional derivatives / N. Grahovac, M. Zigic // *Comput. Math. Appl.* 59. – 2010. – P.1695-1700.
23. Herzallah M. A. E. On the fractional-order diffusion-wave process / M. A. E. Herzallah, A. M. A. El-Sayed, D. Baleanu // *Rom. Journ. Phys.* 55. – 2010. – P. 274-284.
24. Jampour M. Towards a fast method for iris identification with fractal and chaos game theory / M. Jampour, R. Embrahimzadeh, M. Yaghoobi, A. Soleimani-Nezhad// *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence* 26:04. Online publication date: 1-Jun-2012.
25. Javidi M. *Advances in Difference Equations* / M. Javidi, B. Ahmad, 2013. – 375p.
26. Javidi M. Numerical solution of fractional partial differential equations by numericals Laplace inversion technique / M. Javidi M. and B. Ahmad // *Advances in Difference Equations*, 2013.
27. Jaramillo R. Stability Analysis of Variant of the Prony Method / R. Jaramillo and M. Lentini // Hindawi Publishing Corporation / *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2012, Article ID 390645, 21 pages doi:10.1155/2012/390645
28. Jian L. Parameter identification for fractional-order chaotic systems using a hybrid stochastic fractal search algorithm / L. Jian, W. Zhou-Jing // *Nonlinear Dynamics* October 2017. – Volume 90, Issue 2. – P. 1243-1255.
29. John T.E. The numerical solution of linear multi-term fractional differential equations: systems of equations / E.T. John, N. Ford, A. Ch. Simpson // *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 148. – 2002. – P. 401-418.
30. Kexue L. Laplace transform and fractional differential equations / L. Kexue, P. Jigen // *Appl. Math. Lett.* – 2011. – 24. – P. 2019-2023.
31. Kostrobij P. Generalized diffusion equation with fractional derivatives with in Renyi statistics / P. Kostrobij, B. Markovych, O. Viznovych, M. Tokarchuk // *J. Math. Phys.* – 2016. – Vol. 57. – P. 093301.

32. Kostrobij P. Generalized electrodiffusion equation with fractality of space-time / P. Kostrobij, B. Markovych, O. Viznovych, M. Tokarchuk // *Math. Model. Comp.* – 2016. – Vol. 3, No 2. – P. 163-172.
33. Levkovich-Maslyuk L.I. Wavelet-based determination of generating matrices for fractal interpolation functions / L.I. Levkovich-Maslyuk // *Regul. Chaotic Dyn.* 3(2), – 1998. – P. 20-29.
34. Li D.S. Identification of Fractal Scale Parameter of Machined Surface Profile / D.S. Li et al. // *Applied Mechanics and Materials.* – 2011. – Vol. 42. – P. 209-214.
35. Li Sh. Parameter identification approaches to fractal model of mass transport for unsaturated soils / Sh. Li and Yi. Liu // *More: Mod. Phys. Lett. B* 19, 1727. – (2005). – Режим доступа: <https://doi.org/10.1142/S0217984905010323>
36. Liu F. Time fractional advection–dispersion equation / F. Liu, V. Anh, I. Turner, P. Zhuang // *J. Appl. Math. Comput.* 13 (1-2). – 2003. – P. 233-246.
37. Liu Q. Approximation of the Levy-Feller advection-dispersion process by random walk and finite difference method / Q. Liu, F. Liu, I. Turner, V. Anh // *Journal of Computational Physics.* – 2007. – V. 222. – P.57-70.
38. Liu T. Creep of wood under a large span of loads in constant and varying environments / T. Liu // Pt.1: Experimental observations and analysis // *Holz als Roh- und Werkstoff* 51. – 1993. – P. 400-405.
39. Livi L. Fractal Geometry Meets Computational Intelligence: Future Perspectives / L. Livi, A. Sadeghian // In: Di Ieva A. (eds) *The Fractal Geometry of the Brain.* Springer Series in Computational Neuroscience. – New York: Springer, 2016.
40. Lopushanska H., Rapita V. Inverse coefficient problem for semi-linear fractional telegraph equation // *EJDE.* – 2015. – Vol. 2015, No 153. – P. 1-13.
41. Lopushansky A., Lopushanska H. Inverse source Cauchy problem to a time fractional diffusion-wave equation with distributions // *Electronic J. Diff. Equ.* – 2017. – No 182. – P. 1-14.

42. Lopushansky A., Lopushanska H., Myaus O. An inverse fractional source problem in a space of periodic spatial distributions // *Fractional differ. calc.* – 2016. – Vol. 6, № 2. – P. 267-274.
43. Lorenzo C.F. Variable Order Distributed Order fractional Operators / C.F. Lorenzo, T.T. Hartley // *Nonlin. Dyn.* – 2002. – Vol. 29. – P. 57-98.
44. Lynch V.E. Numerical methods for the solution of partial differential equations of fractional order / V.E. Lynch, B.A. Carreras, D. Del-Castill-Negrete, K.M. Ferreira-Mejias, H.R. Hicks // *Journal of Computational Physics.* – 2003. – Vol. 192. – P. 406-421.
45. Machado J.A.T. Entropy analysis of integer and fractional dynamical systems / J.A.T. Machado // *Nonlinear Dyn.* 62(1–2). – 2010. – P. 371–378.
46. Machado J.A.T. Fractional order inductive phenomena based on the skin effect / J.A.T. Machado, A.M.S.F. Galhano // *Non-linear Dyn.* 68(1–2). – 2012. – P. 107-115.
47. Machado J.T. Recent history of fractional calculus / J.T. Machado, V. Kiryakova, F. Mainardi // *Commun Nonlinear Science and Numer Simulat.* – 2011. – Vol. 16. – P. 1140-1153.
48. Mahmoud H.F. Hussein Fingerprint Identification Using Fractal Geometry / H. Mahmoud, E. Loay, T. Azmi // *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering* , Volume 4, Issue 1, January. – 2014.– P. 52-61.
49. Mainardi F. On some properties of the Mittag-Leffler function  $E_{\alpha}(-t^{\alpha})$ , completely monotone for  $t > 0$  with  $0 < \alpha < 1$  / F. Mainardi // *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B (DCDS-B) Series B.* – 2014. – Vol. 19, No. 7. – P. 2267-2278.
50. Mandelbrot B. *The Fractal Geometry of Nature* / B. Mandelbrot // New-York: W. H. Freeman, 1983.
51. Manousopoulos P. Theoharis Parameter Identification of 1D Recurrent Fractal Interpolation Functions with Applications to Imaging and Signal Processing /

- P. Manousopoulos, V. Drakopoulos // *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, June 2011. – Vol. 40, Issue 2. – P. 162-170.
52. Massopust P.R. *Interpolation and Approximation with Splines and Fractals* / P.R. Massopust // Oxford University Press. – London, (2009).
53. Miller K.S. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations* / K.S. Miller, B. Ross John Wiley. – New York, (1993).
54. Molz III F.J. A physical interpretation for the fractional derivative in Levi diffusion/ III F.J. Molz, G.J. Fix III, S. Lu // *Applied Mathematics Letters* 15. – 2002. – P. 907-911.
55. Nigmatullin R. R. // *Ibid.* – 1986. - Vol. 133. – 713 p.
56. Nigmatullin R. R. // *Phys. Stat. Solids.* – 1986. – Vol. 133. – 425 p.
57. Numerical modeling and analysis of physical properties in biomaterials with fractal structure / I. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska // *CEUR Workshop Proceedings.* – 2018. – Vol. 2255. – P. 180–192. ISSN: 16130073
58. Oldham K.B. *The Fractional Calculus* / K.B. Oldham, J. Spanier // New York-London: Academic Press, 1974.
59. Podlubny I. *Fractional Differential Equations* / I. Podlubny // Vol. 198 of *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999. – 340 p.
60. Podlubny I. Mittag-Leffler function / I. Podlubny // Matlab-Code that calculates the Mittag-Leffler function with desired accuracy, Matlab File Exchange [www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange), 2006.
61. Post E.U. Generalized Differentiation / E.U. Post // *Trans. of Amer. Math Soc.* – 1930. – Vol. 32. № 4. – P. 723-781.
62. Povstenko Y. Fractional Heat Conduction in an Infinite Medium with a Spherical Inclusion / Y. Povstenko // *Entropy.* - (October 2013). – Vol. 15. – P. 4122-4133.
63. Povstenko Y. Fundamental solutions to time-fractional heat conduction equations in two joint half-lines / Y. Povstenko // *Cent. Eur. J. Phys.* – 11(10). – 2013. – P. 1284-1294.

64. Povstenko Y. Neumanuboundary-value problems for a time- fractional diffusion-value equation in half-plane / Y. Povstenko // J. Computers Mathematics with Applications. – 2012. – Vol. 64, 11. – P.3183-3192.
65. Pozgaj A. Struktura a vlastnosti dreva / A. Pozgaj, D. Chovanec, S. Kurjatko, M. Babiak // Bratislava: Príroda, 1993. – 485 p.
66. Rihan F.A. A time delay model of tumour-immune system interactions: global dynamics, parameter estimation, sensitivity analysis / F.A. Rihan, D.H. Abdelrahman, S. Lakshmanan // Appl. Math. Comput. 232. – 2014. – P. 606-623.
67. Rihan F.A. Delay differential model for tumor-immune dynamics with HIV infection of CD4+ T-cells / F.A. Rihan, D.H. Abdelrahman // Int. J. Comput. Math. 90(3). – 2013. – P. 594-614.
68. Saichev A.I. Fractional kinetic equations: solutions and applications / A.I. Saichev, G.M. Zaslavsky // Chaos 7 (4). – 1997. – P. 753-764.
69. Sokolovskyy Ya. Mathematical processes taking into account memory effects and self-similarity / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, Ya. Kaplunskyy // CEUR Workshop Proceedings. – 2018. – Vol.2255. – P.215-228. ISSN:16130073
70. Sokolovskyy Ya. Mathematical and Software providing of research of deformation and relaxation processes in environments with fractal structure / Ya. Sokolovskyy, V. Shymanskyi, M. Levkovich, V. Yarkun // XII International scientific and technical conference “Computer science and informational technologies” CSIT 2017. 05-08 September. – Lviv, 2017. – P. 24-27.
71. Sokolovskyy Ya. Mathematical modeling of anisotropic visco-elastic environments with memory based on integro-differentiation apparatus / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, V. Atamanyuk // 14-th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering, TCSET, 20-24 February, – Lviv, 2018. – P. 324-329.
72. Sokolovskyy Ya. Mathematical Modeling of Heat and Moisture Transfer and Reological behavior in Materials with Fractal Structure using the parallelization of Predictor-Corrector Numerical Method / Ya. Sokolovskyy, V. Shymanskyi,

- M. Levkovich, V. Yarkun // 1-st International Conference Data Stream Mining Processing DSMP, 23-27.08. 2016. – Lviv, 2016. – P.108-111.
73. Sokolowskyi Ya. Mathematical modelling of non-isothermal moisture transfer and rheological behavior in capillary-porous materials with fractal structure during drying / Ya. Sokolowskyi, V. Shymanskyi // Computer and Information Science. – Canadian Center of Science and Education. – 2014. – Vol. 7, No. 4. – P. 111-122.
74. Sokolovskyy Ya. Mathematical modeling of non-isothermal moisture transfer and visco-elastic deformation in the materials with fractal structure / Ya. Sokolovskyy, V. Shymanskyi, M. Levkovich // XI-th International scientific and technical conference “Computer science and information technologies” CSIT – 2016; 06-10 September. – Lviv, Ukraine, 2016. – P. 91-95.
75. Sokolovskyy Ya. Mathematical Modeling of Two-dimensional deformation-relaxation processes in environments with fractal structure / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, V. Atamanyuk // II International Conference Data Stream Mining Processing DSMP, 21-25.08.2018. – Lviv, 2018. – P. 375-380.
76. Sokolovskyy Ya. Mathematical modeling of visco-elastic state of materials with fractal structure / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, V. Krishtapovich // 14th International Conference “The experience of designing and application of CAD system in microelectronics (CADSM) / Proceedings 25.02. – Lviv, 2017. – P. 35-38.
77. Sokolovskyy Ya. Numerical Simulation and Analysis of Systems with Memory Based on Integro-differentiation of Fractional Order / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, Ya. Kaplunskyy // XIII international scientific and technical conference “Computer science and informational technologies” CSIT 2018 IEEE, September, 11-14, 2018. – Lviv, Ukraine. – P. 102-105.
78. Sokolovskyy Ya. Two-dimensional mathematical models of visco-elastic deformation using a fractional differentiation apparatus / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich // International Journal of Modern Education and Computer Science (IJMECS). – 2018. – Vol. 10, No. 4. – P. 1-9.



79. Sun H. Time Fractional Differential Equation Model with Randon Derivative Order / H. Sun, Y. Chen, W. Chen // Proc. ASME int. Design Engin. Technical Conf. Computers and Inform. in. Engin. Conf. /DETC/CIE 2009, Paper If DETC 2009-87483 (6 pages).
80. Tadjeran Ch. A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation / Ch. Tadjeran, M. M. Meerschaert, Scheffler Hana-Peter // Journal of Computational Physics. – 2006. – Vol. 213. – P. 205-213.
81. Tschoegl N.W. The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior / N.W. Tschoegl. – Berlin: Springer, 1989.
82. Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers / V.V. Uchaikin // Berlin: Springer, 2013.
83. Valerio D. Variable-Order Fractional Derivatives and their Numerica Aproximations / D. Valerio, J.S. da Costa // Signal Proc. – 2011. – Vol. 91. – P. 470-483.
84. Welch S.W.J. Application of time-based fractional calculus method to viscoelastic creep and stress relaxation of materials / S.W.J. Welch, R.A.L. Rorrer, R.G. Duren // Mech. Time-Dependent Materials. – 1999. – Vol. 3, No. 3. – P. 279-303.
85. West B.J. The Physics of Fractal Operators / B.J. West, M. Bologna and P. Grigolini. – Springer-Verlag, New York, 2003. – 354 p.
86. Wyss W. The fractional Black–Scholes equation / W. Wyss // Fract. Calculus Appl. Anal. 3. – (2000). – P. 51-61.
87. Yang Q. Numerical methods for fractional partial differential equation with Riesz space fractional derivatives / Q. Yang, F. Liu, I. Turner // Applied Mathematical Modelling 34. - (2010). – P. 200 -218.
88. Yuste S.B. Reaction front in an  $A + B \rightarrow C$  reaction–subdiffusion process / S.B. Yuste, L. Acedo, K. Lindenberg // Phys. Rev. E 69 (3) – (2004) 036126.
89. Yuste S.B. Subdiffusion-limited  $A + A$  reactions / S.B. Yuste, K. Lindenberg // Phys. Rev. Lett. 87 (11). – (2001) 118301.

90. Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport / G.M. Zaslavsky // Phys. Rep. 371 (6). - (2002). – P. 461-580.
91. Závada P. Operator of fractional derivative in the complex plane / P. Závada // Communications in Mathematical Physics. – 1998. – Vol. 192. – P. 261-285.
92. Адамов А.А. Методы прикладной вязкоупругости / А.А. Адамов, В.П. Матвеев, Н.А. Труфанов, И.Н. Шардаков . – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 411 с.
93. Алиханов А.А. Разностные методы решения краевых задач для волнового уравнения с дробной производной по времени / А.А. Алиханов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2008. - №2(17). – С. 13-20.
94. Антонов В.К. Застосування похідних дробового порядку в задачах структурної ідентифікації і механіки / В.К. Антонов // Вісник НАУ. – 2009. – №2. – С. 178-183.
95. Бабенко Ю.И. Метод дробного дифференцирования в прикладных задачах теории теломассообмена / Ю.И. Бабенко. – СПб.: НПО «Профессионал», 2009.– 584 с.
96. Баззаев А.К. Локально-одномерная разностная схема для III-й краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка в двумерной области / А.К. Баззаев // Сборник научных трудов Северо-Осетинского отделения Академии наук высшей школы Российской Федерации. – 2008. – №6. – С. 134-139.
97. Баззаев А.К. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода / А.К. Баззаев // Владикавказский математический журнал. – 2011. – Т. 13, вып. 1. – С. 3-12.
98. Баззаев А.К. Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями III рода / А.К. Баззаев, М.Х. Шхануков-Лафишев // Вычисл. матем. и матем. физ. – 2010. – Том 50, №7.– С. 1200-1208.
99. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести // Н.И. Безухов. – Москва: Государственное издательство «Высшая школа», 1961.– 537 с.

100. Бейбалаев В.Д. Математическая модель теплопереноса в средах с фрактальной структурой / В.Д. Бейбалаев // Математическое моделирование.– 2009. – Том 21, №5. – С. 55-62.
101. Бейбалаев В.Д. Численный метод решения краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка / В.Д. Бейбалаев, М.Р. Шабанова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. – №5 (21). – С. 244-251.
102. Белковский С.Ю. Влияние факторов на характеристики эффекта памяти формы древесины: дис. ... канд. техн. наук: 05.21.05 / Белковский Серафим Юрьевич. – Москва, 2016. – 160с.
103. Биргер И.А. Сопротивление материалов: учеб. пособие / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. мет., 1986. – 560с.
104. Бойко С.В. Моделювання фізико-механічних властивостей модифікованої деревини методом скінченних елементів / С.В. Бойко, А.М. Єрошенко // Технічні науки та технології. – 2016. – № 2 (4). – С. 184-188.
105. Боровиков А.М., Уголев Б.Н. Справочник по древесине: справочник / А.М. Боровиков, Б.Н. Уголев / под ред. Б.Н. Уголева. – М.: Лесн. пром-сть, 1989. – 296 с.
106. Буряк Я.Й. Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів / Я.Й. Буряк, Э.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха. – К.: Наукова думка, 2006. – 272с.
107. Бутковский А.Г. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. / А.Г. Бутковский, С.С. Постнов, Е.А. Постнова // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 4. – С. 3-29.
108. Васильев В.В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем: научное издание / В.В. Васильев, Л.А. Симак. – Киев: НАН Украины, 2008. – 256с.
109. Вірченко Н.О. Основи дробового інтегро-диференціювання: навч. посібник / Н.О. Вірченко, В.Я. Рибак. – К.:Тов. «Задруга», 2007. – 364 с.

110. Гайвась Б.І. Математичне моделювання конвективного сушіння матеріалів з урахуванням механотермодифузійних процесів / Б. Гайвась // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 9-37.
111. Гайвась Б.І. Математичне моделювання процесу сушіння пористих тіл з врахуванням кінетики фазових переходів та деформацій: автореф. дис. ... д-ра техн. наук / Б.І. Гайвась. – Львів, 2012. – 40с.
112. Гильмутдинов А.Х. Фракталы и дробные операторы / под общ. ред. А.Х. Гильмутдинова. – Казань: Изд-во «Фэн» Академии наук РТ. – 2010. – 488с.
113. Головизнин В.М. Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнения дробной диффузии / В.М. Головизнин, В.П. Киселев, И.А. Короткин, Ю.И. Юрко. – М.: ИБРАЭ РАН, 2002. – 57с. – (Препринт № ИБРАЭ-2002-01)
114. Головизнин В.М. Численные методы решения уравнения дробной диффузии в одномерном случае / В.М. Головизнин, В.П. Киселев, И.А. Короткин. – М.: ИБРАЭ РАН, 2002. – 35с. - (Препринт № ИБРАЭ-2002-10)
115. Головизнин В.М. Методы численных решений некоторых одномерных уравнений с дробными производными / В.М. Головизнин, И.А. Короткин // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т.42, №7. – С. 907-913.
116. Головизнин В. М. Прямые задачи неклассического переноса радионуклидов в геологических формациях / В.М. Головизнин, В.П. Киселев, И.А. Короткин, Ю.И. Юрко // Изв. РАН. Энергетика. – 2004. – №4. – С. 121-130.
117. Голуб В.П. К определению параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов / В.П. Голуб, Я.В. Павлюк, П.В. Фернати // Прикладная механика. – 2013. – Том 49, №2. – С. 100-113.
118. Горбачева Г.А. Деформационные превращения древесины при изменении нагрузки, влажности и температуры: дис. ... канд. техн. наук: 05.21.05 / Горбачева Галина Александровна. – Москва, 2004. – 197 с.

119. Дацко Б.Й. Математичне моделювання нелінійної динаміки в бістабільних системах реакції-дифузії з дробовими похідними / Б.Й. Дацко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – Т.54, № 2. – С. 163-172.
120. Дендюк М.В. Математична модель двовимірного в'язкопружного стану деревини у процесі сушіння: дис...канд. тех. наук: 01.05.02 / М.В. Дендюк; Нац. лісотехн. ун-т України. – Львів, 2008. – 239 с.
121. Денисюк В.П. Про дробове інтегро-диференціювання тригонометричних функцій / В.П. Денисюк, Л.В. Рибачук // Проблеми інформації та управління. – 2008. – 2 (24). – С. 46-50.
122. Дияк І. Числовий аналіз напружено-деформованого стану тіл з тонкимвключенням методом декомпозиції області / І. Дияк, А. Стягар, Я. Савула // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – Вип. 57, №3. – С. 119-131.
123. Ерохин С.В. Модели ползучести и релаксации материалов с использованием производных дробного порядка / С.В. Ерохин // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – №6. – С. 35-39.
124. Ерохин С.В. Математическое моделирование физических соотношений вязкоупругих тел с использованием методов дробного исчисления: дис. ... канд. техн. наук: 03.13.181 / Ерохин Сергей Александрович. – Москва, 2015. – 117 с.
125. Ерохин С.В. Параметрическая идентификация математической модели вязкоупругих материалов с использованием производных дробного порядка / С.В. Ерохин, Т.С. Алероев, Л.Ю. Фриштер, А.В. Колесниченко // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2015. – Vol. 11, Issue 3. – С. 82-85.
126. Ильюшин А.А. Основы математической теории термовязко-упругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. – Москва: Издательство «Наука», 1970. – 280с.
127. Ильюшин А. А. Соппротивление материалов / А.А. Ильюшин, В.С. Ленский. – Москва, 1959. – 373с.

128. Кириченко Л.О. Обобщенный подход к фрактальному анализу самоподобных и мультифрактальных временных рядов / Л.О. Кириченко // Сучасні проблеми і досягнення в галузі радіотехніки, телекомунікацій та інформаційних технологій: тези доповідей VIII Міжнародної науково-практичної конференції (21-23 вересня 2016 р., м. Запоріжжя). – Запоріжжя: ЗНТУ, 2016. – С. 22-24
129. Кириченко Л.О. Комплексный подход к исследованию фрактальных временных рядов / Л.О. Кириченко, Л.Э Чалая // International Journal "Information Technologies & Knowledge". – 2014. –Vol. 8, N1. – С. 22-28.
130. Кіндибалюк І. Застосування кусково-степеневих апроксимацій МСЕ для сингулярно-збурених задач адвекції-дифузії-реакції /А. Кіндибалюк, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. – 2014. – Вип. 22. – С. 60-74.
131. Коваль Ю.М. Сплави з ефектом пам'яті форми – потужний клас функціональних матеріалів / Ю.М. Коваль // Інноваційні проекти Національної академії наук України, Наука та інновації. – 2005. – Т1, № 2. – С. 80-95.
132. Ковбаса В. Фізичні рівняння деформування ґрунту з суттєвим проявом в'язкопластичних властивостей / В. Ковбаса, О. Gutsol, V. Kurka // Motrol. – 2011, 13В. – С. 145-155.
133. Колтунов М.А. Прикладная механика деформируемого твердого тела: учеб. пособие / М.А. Колтунов, А.С. Кравчук, В.П. Майборода. – М.: Высш. школа, 1983. -349 с.
134. Кольцова Э.М. Численные методы решения уравнений переноса во фрактальных средах / Э.М. Кольцова, В.А. Василенко, В.В. Тарасов // Журнал физической химии. – 2000. – Т.74, № 5. – С. 954-956.
135. Корнієнко В.І. Комплексна оцінка, ідентифікація та прогнозування складних нелінійних процесів / В.І. Корнієнко, І.Г. Гуліна, Л.В. Будкова // Науковий вісник НГУ. – 2013. – №6. – С. 124-131.

136. Костробій П. Узагальнене рівняння дифузії у дробових похідних у статистиці Рені / П. Костробій, Б. Маркович, О. Візнович, М. Токарчук // Фіз.-матем. модел. інформ. техн. – 2016. – Вип. 23. – С. 108-118.
137. Костробій П.П. Узагальнені рівняння електродифузії з просторово-часовою фрактальністю. / П.П. Костробій, Б.М. Маркович, О.В. Візнович, М.В. Токарчук. – Львів, 2017. – 21 с. (Препринт ІСМР-17-03U).
138. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен. – Москва: Мир, 1974. – 321 с.
139. Лавренюк М. Моделі механіки деформівного твердого тіла неоднорідних середовищ: навч. посіб. / М. Лавренюк. – Київ: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2012. – 86 с.
140. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа / К. Ланцош. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 524 с.
141. Левкович М.В. Алгоритм ідентифікації дробово-експоненціальних ядер повзучості за експериментальними даними / М.В. Левкович // Науковий вісник НЛТУ України: зб. наук.-техн. праць. – Львів: НЛТУ України, 2016. – Вип. 26.1. – С. 382-386.
142. Летников А.В. Теория дифференцирования с произвольным указателем / А.В. Летников // Мат. сб. – 1868. – Т. 3, №1. – С. 1-68.
143. Лурье А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 941 с.
144. Марков О.Є. Модель урахування релаксації напружень у металі при гарячому деформуванні / О.Є. Марков // Інноваційні технології та обладнання обробки матеріалів у машинобудуванні та металургії: вісник НТУ «ХП». – 2015. №48 (1167). – С. 21-25.
145. Мейланов Р.П. Уравнение теплопроводности для сред с фрактальной структурой / Р.П. Мейланов, М.Р. Шабанова // Современные наукоемкие технологии. – 2007. - №8. – С. 84-85.

146. Мейланов Р.П. Особенности решения уравнения теплопереноса в производных дробного порядка / Р.П. Мейланов, М.Р. Шабанова // Журнал технической физики. – 2011. – Том 8, вып. 7. – С. 1-6.
147. Мейланов Р.П. Задача Стефана в дробном исчислении / Р.П. Мейланов, М.Р. Шабанова // Труды Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». — Самара, 2010. – С. 192-197.
148. Михальов О.І. Попередня обробка та фрактальний аналіз зображень пористих матеріалів / А.О. Журба, О.І. Михальов, В.Ю. Карпов // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: Херсонский национальный технический университет. – 2015. – Вып. 3(54). – С. 243-247.
149. Михалев А.И. Использование метода пространственных перколяционных кластеров для формирования металлических конструкционных материалов / А.И. Михалев, В.В. Помулев, В.Г. Горб // Системні технології. Регіональний міжвузівський зб. наук. праць. – Вип. 6(53)2007. – С. 180-185.
150. Михалёв А.И. Анализ фрактальных характеристик неметаллических включений при пластической деформации стали / А.И. Михалёв, А.А. Журба, С.И. Губенко // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 2 (85). – Днепропетровск, 2013. – С.171-180.
151. Нахушев А.М. Дробное исчисления и его применение / А.М. Нахушев. – М.: Физматлит, 2003. – 272с.
152. Нахушева Ф.М. Разностная схема для уравнения переноса общего вида с дробной производной по времени // Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием (3–6 июня 2010 г.). – Часть 3, Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Матем. моделирование и краев. задачи. – Самара: изд-во Самарский государственный технический университет, 2010. – С. 213–215.



153. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация /Р.Р. Нигматуллин // Теоретическая и математическая физика. – 1992. - Т. 90, №3. – С. 354–368.
154. Никитенко Н.И. Теория тепломассопереноса / Н.И. Никитенко. – Киев: Наук. думка, 1983. – 352с.
155. Никитенко Н.И. Сопряжение и обратные задачи тепломассопереноса / Н.И. Никитенко. – Киев: Наук. думка, 1988. – 240с.
156. Овсиенко А.С. Идентификация параметров процесса аномальной диффузии на основе разностных уравнений / Вычислительные технологии. – 2013. – Том 18, №1. – С. 65-73.
157. Овсиенко А.С. Разработка методов идентификации параметров дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля / А.С. Овсиенко // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2014. – Том 20, вып. 1 (34). – С. 134-144.
158. Овсиенко А.С. Разработка метода идентификации параметров дробного дифференциального оператора / А.С. Овсиенко // Математическое моделирование и краевые задачи: труды Восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. – Самара: СамГТУ, 2011. – С. 195-201.
159. Огородников Е.Н. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля / Е.Н. Огородников, В.П. Радченко, Л.Г. Унгарова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2016. – Том 20, № 1. – С. 167-194.
160. Огородников Е.Н. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов / Е.Н. Огородников, В.П. Радченко, Н.С. Яшагин // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. – №1(22). – С. 255-268.
161. Пайтген Х.О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем / Х.О. Пайтген, П.Х. Рихтер. – М.: Мир, 1993.

162. Пискарев С.И. Об аппроксимации дробных разрешающих семейств / Ж. Лю, Л. Миао, Х. Пастор, С.И. Пискарев // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т.50, № 7. – С. 937-946.
163. Пінчевська О.О. Щодо підвищення якості пиломатеріалів функціонального призначення / О.О. Пінчевська, О.Ю. Горбачова // Современные строительные конструкции из металла и древесины. – 2013. – № 17. – С. 158-162.
164. Победря Б.Е. Модели линейной теории вязко-упругости / Б.Е. Победря // МТТ. – 2005. – № 6. – С. 121-134.
165. Победря Б.Е. Модели механики сплошной среды / Б.Е. Победря // Изв. РАН МТТ. – 2000. – № 3. – С. 47-59.
166. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А.В. Псху; [отв. ред. А.П. Солдатов]; Научно-исследовательский ин-т приклад. математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – М.: Наука, 2005. – 199с.
167. Прусак Ю.В. Визначення двовимірного в'язкопружного стану деревини у процесі сушіння з урахуванням циліндричної анізотропії / Ю.В. Прусак // Науковий вісник НЛТУ України. – 2015. – Вип.25.6. – С. 317-323.
168. П'янило Я.Д. Використання многочленів Лагерра до спектрального методу розв'язання рівнянь дробових похідних за часом / Я.Д. П'янило, М. Васюник, І. Васюник // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – №17. – С. 163-168.
169. П'янило Я.Д. Дослідження спектрального методу розв'язання рівнянь у дробових похідних за часом у базисі многочленів Лагерра / Я.Д. П'янило, М. Васюник, І. Васюник // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – №18. – С. 173-180.
170. Расев А.И. Сушка древесины / А.И. Расев. – М.: Высш. шк., 1990. – 224 с.
171. Савін Г.М. Елементи механіки спадкових середовищ / Г.М. Савін // Реологічні тіла з найпростішим законом лінійного деформування. – 1970. – Вип. 2. – 137с.

172. Савін Г.М. Елементи механіки спадкових середовищ / Г. М. Савін // Реологічні тіла з найпростішим законом лінійного деформування. – 1969. – Вип. 1. – 114с.
173. Савін Г.М. Елементи механіки спадкових середовищ: навч. посіб. для мех.-мат. ф-тів ун-тів / Г.М. Савін, Я.Я. Рушицький. – К.: Вища школа, 1976. – 251с.
174. Савула Я.Г. Гетерогенна чисельна схема методу декомпозиції області для дослідження задач пластичності / Я.Г. Савула, І.І. Дияк, О.І. Дудаш // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т.43, №3. – С. 85-90.
175. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971. – 553 с.
176. Самарський А.А. Устойчивость разностных схем / А.А. Самарський, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1973. – 415 с.
177. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688с.
178. Сергиенко М.П. Применение метода Прони для идентификации переходных характеристик средств измерительной техники колебательного типа / М.П. Сергиенко // Системи обробки інформації. – 2011. – Вип. 6 (96). – С. 102-105.
179. Скородинський І.С. Аналіз деформування кусково-однорідного тіла з в'язкопружним проміжним шаром за дії зсувного навантаження / І.С. Скородинський // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2008. – Вип.6 – С. 175-182.
180. Соколовський Я.І. Алгоритмічне та програмне забезпечення для дослідження неізотермічного вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою / Я.І. Соколовський, В.І. Яркун, М.В. Левкович // Науковий вісник НЛТУ України: зб. наук.-техн. праць. – Львів: НЛТУ України, 2016. – Вип.26.7. – С. 308-318.
181. Соколовський Я.І. Визначення анізотропних пружних характеристик деревини акустичним методом / Я.І. Соколовський, О.Л. Сторожук // Науковий вісник

Національного університету біоресурсів і природокористування України. Серія : Техніка та енергетика АПК. – 2013. – Вип. 185(2). – С. 211-221.

182. Соколовський Я.І. Визначення реологічних властивостей деревини залежно від зміни температури та вологості / Я.І. Соколовський, В.І. Криштапович, О.В. Мокрицька // Проблеми трибології. – 2017. – №1. – С. 19-29.
183. Соколовський Я.І. Двовимірна математична модель вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах із фрактальною структурою / Я.І. Соколовський, В.М. Шиманський // Інформаційні технології галузі: науковий вісник НЛТУ України, 2011. – Вип.21.2. – С. 341-347.
184. Соколовський Я.І. Математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів з використанням похідних дробового порядку / Я.І. Соколовський, М.В. Москвітін, І.Б. Борецька, С.І. Коширець, В.І. Яркун // Праці IV Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки»(ПКТ-2015), м. Чернівці, 26-29 травня, 2015 р. – С. 43-45.
185. Соколовський Я.І. Математичні моделі нерівноважних фізичних процесів з врахуванням ефекту пам'яті та самоорганізації / Я.І. Соколовський, М.В. Левкович // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Матеріали XXIV Всеукраїнської наукової конференції. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2018. – С. 143-147.
186. Соколовський Я.І. Математична модель теплового перенесення та напружено-деформівного стану у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою / Я.І. Соколовський, М.В. Шиманський // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, - 2012. – Вип.16. – С. 133-141.
187. Соколовський Я.І. Математичне моделювання деформаційно-релаксаційних процесів з використанням похідних дробового порядку / Я.І. Соколовський, М.В. Москвітін // Вісник Національного університету «Львівська політехніка», Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів: НУ «ЛП», 2015. – №826. – С. 175-184.

188. Соколовський Я. Моделювання деформаційно-релаксаційних процесів у висушуваній деревині методом скінченних елементів / Я. Соколовський, А. Бакалець // Lviv Politechnic National University Institutional Repository. – 2006.–С. 51-57.
189. Соколовський Я.І. Моделювання неізотермічного вологоперенесення та деформування у середовищах з використанням алгоритмів розпаралелювання / Я.І. Соколовський, В.М. Шиманський, М.В. Левкович, В.І. Яркун // IV Науково-технічна конференція “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”, фізико-механічний інститут ім. академіка Карпенка НАН України, 2016р. – С. 88-92.
190. Соколовський Я.І. Фрактальна модель тепло і масоперенесення у капілярнопористих матеріалах / Я.І. Соколовський, В.М. Шиманський // Вісник національного університету «Львівська політехніка»: Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – Львів: НУ «ЛП», 2011. - №694. – С. 424-428.
191. Соколовський Я.І. Чисельне моделювання двовимірного тепломасоперенесення на підставі похідних дробового порядку / Я.І. Соколовський, М.В. Левкович, В.І. Яркун, Ю.Т. Ликтей, Р.П. Стельмах // 18-th International Conference System Analysis and Information Technology SAIT 2016, May 30 – June 2. – Kyiv, Ukraine, 2016. – С. 158-161.
192. Соколовський Я.І. Чисельне моделювання тепломасоперенесення у середовищах з фрактальною структурою / Я.І. Соколовський, М.В. Левкович, О.П. Герасимчук, В.І. Яркун // III Міжнародна конференція з автоматичного управління та інформаційних мехнологій, ICASIT – 2015, 11-13 грудня 2015 р., Київ, НТУ КПП, – С. 41-43.
193. Соколовський Я.І. Чисельне моделювання тепломасоперенесення в середовищах з фрактальною структурою з використанням розпаралелювання / Я.І. Соколовський, В.І. Яркун, М.В. Левкович, Р.П. Стельмах // 14 Міжнародна науково-практична конференція. “Математичне та імітаційне моделювання систем” (МОДС-2016). – Київ, Жукін. – 2016. – С. 75-78.

194. Соколовський Я.І. Чисельне моделювання теплообмінних процесів з використанням похідних дробового порядку / Я.І. Соколовський, М.В. Москвітін, А.В. Нечепуренко, І.Б. Борецька, С.Б. Поберейко // X Міжнародна науково-практична конференція: «Математичне та імітаційне моделювання систем» (МДС 2015), Чернігів, 22-26 червня 2015 р. – С. 45-49.
195. Соколовський Я.І. Чисельний метод дослідження неізотермічного вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою / Я.І. Соколовський, М.В. Левкович // Вісник Національного університету «Львівська політехніка», Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів: НУ «ЛП», 2015. – №843. – С. 288-296.
196. Соколовський Я.І. Числовий метод дослідження теплообміну на підставі похідних дробового порядку / Я.І. Соколовський, М.В. Москвітін // Технічні вісті. – 2015. – 1(41), 2(42). – С. 12-15.
197. Суханов А.Д. Журнал физической химии / А.Д. Суханов, С.Ф. Тимашев // 1998. – Т.72, №11. – С. 2073.
198. Тарасевич Ю.Я. Теорія пружності: конспект лекцій. Частина 1 Напружено-деформований стан у точці тіла. Плоска задача теорії пружності в декартових координатах / укладач: Ю.Я. Тарасевич. – Суми: вид-во СумДУ, 2010. – 116с.
199. Таукенова Ф.И. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка / Ф.И. Таукенова, М.Х. Шхануков-Лафишев // Вычисл. матем. и матем. физ. – 2006. – Том 46, №10. – С. 1871-1881.
200. Уголев Б.Н. Экспериментальные исследования влияния наноструктурных изменений древесины на ее деформативность / Б.Н. Уголев, В.П. Галкин, Г.А. Горбачева, А.А. Калинина, С.Ю. Белковский // Лесной вестник. – 2012. – №7. – С. 124-127.
201. Учайкин В.В. Метод дробных производных / В.В. Учайкин. – Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008. – 512с.

202. Фильштинський Л.А. Одновимірна початково-крайова задача для дробово-диференціального рівняння теплопровідності / Л.А. Фильштинський, Т.В. Мукомел, Т.А. Кірічок // Вісник Запорізького національного університету.– 2010. – №1. – С. 113-118.
203. Хрисанов Н.Н. Интегральный метод аппроксимации экспериментальных данных экспоненциальными функциями / Н.Н. Хрисанов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. - 2001. – Вып. 12. – С. 195-199.
204. Чапля Є.Я. Математичне моделювання гетеродифузійних процесів при розпаді частинок / Є.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха, Ю.І. Білушак. – Львів: Растр-7, 2018. – 240 с.
205. Чапля Є. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах / Є. Чапля, О. Чернуха. – Київ: Наук. думка, 2009. – 301 с.
206. Шиманський В.М. Апроксимація експериментальних даних повзучості деревини з використанням дробово-експоненціального оператора / В.М. Шиманський // Науковий вісник НЛТУ України: збірник науково-технічних праць. – Львів, 2015. – Вип. 25.1. – С. 396-402.
207. Шинкаренко Г.А. Экспоненциальные аппроксимации МСЕ для сингулярно збурених задач конвекції-дифузії реакції / Г. Шинкаренко, Ю. Сінчук // Вісн. Львів. ун-ту, Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – Вип. 12. – С. 157-169.
208. Шостак А.В. Побудова реологічних моделей при інженерно-геодезичному моделюванні елементів технологічних комплексів / А.В. Шостак, В.В. Божи-дарнік, О.В. Мельник // Scientific journal «Technological complexes». – 2013. – №2 (8). – С. 91-94.
209. Шубин Г.С. Сушка и тепловая обработка древесины / Г.С. Шубин. – М.: Лесн. пром-сть, 1990. – 336с.

**ДОДАТОК А. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДАНІ ПОВЗУЧОСТІ ТА СХЕМИ  
ДЕФОРМАЦІЙНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДЕРЕВИНИ З УРАХУВАННЯМ  
ЕФЕКТУ «ПАМ'ЯТІ». ЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ,  
КОЕФІЦІЄНТА КОРЕЛЯЦІЇ ТА ОЦІНКИ РОЗХОДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ**

Таблиця А. 1

Оброблені експериментальні дані повзучості деревини [38]

| Дуб, $E = 17,3 \times 10^3$ МПа, $W = 7,5\%$ , час розвантаження $t_1 = 7,2 \times 10^3$ год |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Час<br>$t$<br>( $10^3$ год)  | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   |
| $\varepsilon(t)$<br>(мм)   | 0,3  | 0,4  | 0,45 | 0,47 | 0,49 | 0,5  | 0,52 | 0,54 | 0,15 | 0,13 | 0,12 | 0,11 | 0,1  | 0,09 |
| Дуб, $E = 16,6 \times 10^3$ МПа, $W = 15\%$ , час розвантаження $t_1 = 7,2 \times 10^3$ год  |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| Час<br>$t$<br>( $10^3$ год)  | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   |
| $\varepsilon(t)$<br>(мм)   | 0,38 | 0,42 | 0,55 | 0,65 | 0,7  | 0,77 | 0,8  | 0,82 | 0,18 | 0,16 | 0,14 | 0,12 | 0,1  | 0,08 |
| Дуб, $E = 16,7 \times 10^3$ МПа, $W = 30\%$ , час розвантаження $t_1 = 7,2 \times 10^3$ год  |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| Час<br>$t$<br>( $10^3$ год)  | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   |
| $\varepsilon(t)$<br>(мм)   | 0,7  | 1,1  | 1,3  | 1,4  | 1,5  | 1,6  | 1,68 | 1,72 | 0,25 | 0,2  | 0,18 | 0,16 | 0,14 | 0,11 |



## Продовження табл. А. 1

Дуб,  $E = 15,9 \times 10^3 \text{ МПа}$ ,  $W = 45\%$ , час розвантаження  $t_1 = 7,2 \times 10^3 \text{ год}$

| Час<br>$t$<br>( $10^3 \text{ год}$ ) | 0   | 1   | 2    | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8    | 9    | 10  | 11   | 12  | 13   |
|--------------------------------------|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|-----|------|-----|------|
| $\varepsilon(t)$<br>(мм)             | 2,3 | 3,0 | 3,25 | 3,4 | 3,5 | 3,6 | 3,7 | 3,8 | 0,73 | 0,68 | 0,6 | 0,51 | 0,4 | 0,32 |

Береза,  $E = 15,4 \times 10^3 \text{ МПа}$ ,  $W = 7,5\%$ , час розвантаження  $t_1 = 7,4 \times 10^3 \text{ год}$

| Час<br>$t$<br>( $10^3 \text{ год}$ ) | 0   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8   | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   |
|--------------------------------------|-----|------|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|------|
| $\varepsilon(t)$<br>(мм)             | 0,2 | 0,22 | 0,25 | 0,26 | 0,27 | 0,28 | 0,29 | 0,29 | 0,1 | 0,09 | 0,08 | 0,08 | 0,07 | 0,06 |

Береза,  $E = 15,1 \times 10^3 \text{ МПа}$ ,  $W = 15\%$ , час розвантаження  $t_1 = 7,4 \times 10^3 \text{ год}$

| Час<br>$t$<br>( $10^3 \text{ год}$ ) | 0    | 1   | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8   | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   |
|--------------------------------------|------|-----|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|------|
| $\varepsilon(t)$<br>(мм)             | 0,35 | 0,4 | 0,41 | 0,43 | 0,44 | 0,45 | 0,45 | 0,45 | 0,1 | 0,09 | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,07 |

Береза,  $E = 15,3 \times 10^3 \text{ МПа}$ ,  $W = 30\%$ , час розвантаження  $t_1 = 7,4 \times 10^3 \text{ год}$

| Час<br>$t$<br>( $10^3 \text{ год}$ ) | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6    | 7   | 8    | 9   | 10   | 11   | 12   | 13   |
|--------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|------|-----|------|------|------|------|
| $\varepsilon(t)$<br>(мм)             | 0,8 | 1,2 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,75 | 1,8 | 0,25 | 0,2 | 0,15 | 0,14 | 0,13 | 0,13 |

## Продовження табл. А. 1

Сосна,  $E = 13,8 \times 10^3 \text{ МПа}$ ,  $W = 45\%$ , час розвантаження  $t_1 = 7,4 \times 10^3 \text{ год}$ 

|                                      |     |      |     |     |     |     |     |   |     |     |     |     |     |     |
|--------------------------------------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Час<br>$t$<br>( $10^3 \text{ год}$ ) | 0   | 1    | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7 | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  | 13  |
| $\varepsilon(t)$<br>(мм)             | 1,4 | 2,65 | 3,4 | 3,8 | 4,2 | 4,6 | 4,8 | 5 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,4 | 0,2 |

Сосна,  $E = 15,3 \times 10^3 \text{ МПа}$ ,  $W = 30\%$ , час розвантаження  $t_1 = 7,4 \times 10^3 \text{ год}$ 

|                                      |      |      |      |     |      |      |      |     |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------------------|------|------|------|-----|------|------|------|-----|------|------|------|------|------|------|
| Час<br>$t$<br>( $10^3 \text{ год}$ ) | 0    | 1    | 2    | 3   | 4    | 5    | 6    | 7   | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   |
| $\varepsilon(t)$<br>(мм)             | 0,73 | 0,95 | 1,05 | 1,1 | 1,12 | 1,15 | 1,17 | 1,1 | 0,27 | 0,24 | 0,22 | 0,20 | 0,20 | 0,14 |

Сосна,  $E = 13,8 \times 10^3 \text{ МПа}$ ,  $W = 15\%$ , час розвантаження  $t_1 = 7,4 \times 10^3 \text{ год}$ 

|                                      |     |      |      |     |     |     |     |      |     |      |     |      |      |     |
|--------------------------------------|-----|------|------|-----|-----|-----|-----|------|-----|------|-----|------|------|-----|
| Час<br>$t$<br>( $10^3 \text{ год}$ ) | 0   | 1    | 2    | 3   | 4   | 5   | 6   | 7    | 8   | 9    | 10  | 11   | 12   | 13  |
| $\varepsilon(t)$<br>(мм)             | 0,5 | 0,52 | 0,54 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,98 | 0,4 | 0,35 | 0,3 | 0,27 | 0,22 | 0,1 |

Сосна,  $E = 14,5 \times 10^3 \text{ МПа}$ ,  $W = 7,5\%$ , час розвантаження  $t_1 = 7,4 \times 10^3 \text{ год}$ 

|                                      |     |      |      |      |     |      |      |      |      |      |     |      |      |      |
|--------------------------------------|-----|------|------|------|-----|------|------|------|------|------|-----|------|------|------|
| Час<br>$t$<br>( $10^3 \text{ год}$ ) | 0   | 1    | 2    | 3    | 4   | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10  | 11   | 12   | 13   |
| $\varepsilon(t)$<br>(мм)             | 0,2 | 0,25 | 0,27 | 0,28 | 0,3 | 0,33 | 0,35 | 0,35 | 0,14 | 0,13 | 0,1 | 0,09 | 0,08 | 0,06 |

Таблиця А. 2

Значення параметрів ідентифікації, коефіцієнта кореляції та оцінки розходження результатів для дробово-диференціальної моделі Максвелла

| № зразка | E<br>(10 <sup>3</sup> МПа) | W<br>(%) | $\sigma_0$<br>(10 <sup>3</sup> МПа) | $\tau(10^3 \text{год})$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\rho$ | $\Delta$ |
|----------|----------------------------|----------|-------------------------------------|-------------------------|----------|---------|--------|----------|
| 29       | 15,4                       | 7,5      | 0,8869                              | 0,028                   | 0,0026   | 0,0295  | 0,9868 | 20,18    |
| 127      | 15,1                       | 15       | 1,5562                              | 0,0178                  | 0,0189   | 0,0332  | 0,9982 | 25,3     |
| 6        | 15,3                       | 30       | 3,1424                              | 0,1804                  | 0,0024   | 0,1922  | 0,9921 | 26,15    |
| 70       | 13,8                       | 45       | 11,4746                             | 2,5169                  | 0,2193   | 0,4121  | 0,9867 | 20,10    |

Таблиця А. 3

Значення параметрів ідентифікації, коефіцієнта кореляції та оцінки розходження результатів для дробово-диференціальної моделі Фойгта

| № зразка | E<br>(10 <sup>3</sup> МПа) | W<br>(%) | $\sigma_0$<br>(10 <sup>3</sup> МПа) | $\tau(10^3 \text{год})$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\rho$ | $\Delta$ |
|----------|----------------------------|----------|-------------------------------------|-------------------------|----------|---------|--------|----------|
| 57       | 17,3                       | 7,5      | 4,2859                              | 6,8769                  | 0,1858   | 0,1867  | 0,6891 | 3,1534   |
| 24       | 16,6                       | 15       | 6,606                               | 7,6761                  | 0,22     | 0,2394  | 0,5588 | 2,2351   |
| 23       | 16,7                       | 30       | 13,5148                             | 7,5666                  | 0,1558   | 0,1656  | 0,634  | 2,719    |
| 37       | 15,9                       | 45       | 28,4361                             | 7,0358                  | 0,1885   | 0,1905  | 0,7196 | 3,4372   |

Таблиця А. 4

Значення параметрів ідентифікації, коефіцієнта кореляції та оцінки розходження результатів для дробово-диференціальної моделі Кельвіна

| № зразка | E <sub>1</sub><br>(10 <sup>3</sup> МПа) | W<br>(%) | $\sigma_0$<br>(10 <sup>3</sup> МПа) | $\tau(10^3 \text{год})$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\rho$ | $\Delta$ |
|----------|---|----------|-------------------------------------|-------------------------|----------|---------|--------|----------|
| 31       | 14,5                                    | 7,5      | 2,4611                              | 0,1727                  | 0,0792   | 0,0262  | 0,9664 | 12,48    |
| 12       | 13,8                                    | 15       | 7,291                               | 34,9449                 | 0,905    | 0,91    | 0,9122 | 7,38     |
| 16       | 15,3                                    | 30       | 3,1424                              | 0,1804                  | 0,51     | 0,49    | 0,889  | 6,32     |
| 70       | 13,8                                    | 45       | 14,7023                             | 43,3469                 | 0,8522   | 0,84    | 0,9489 | 9,98     |

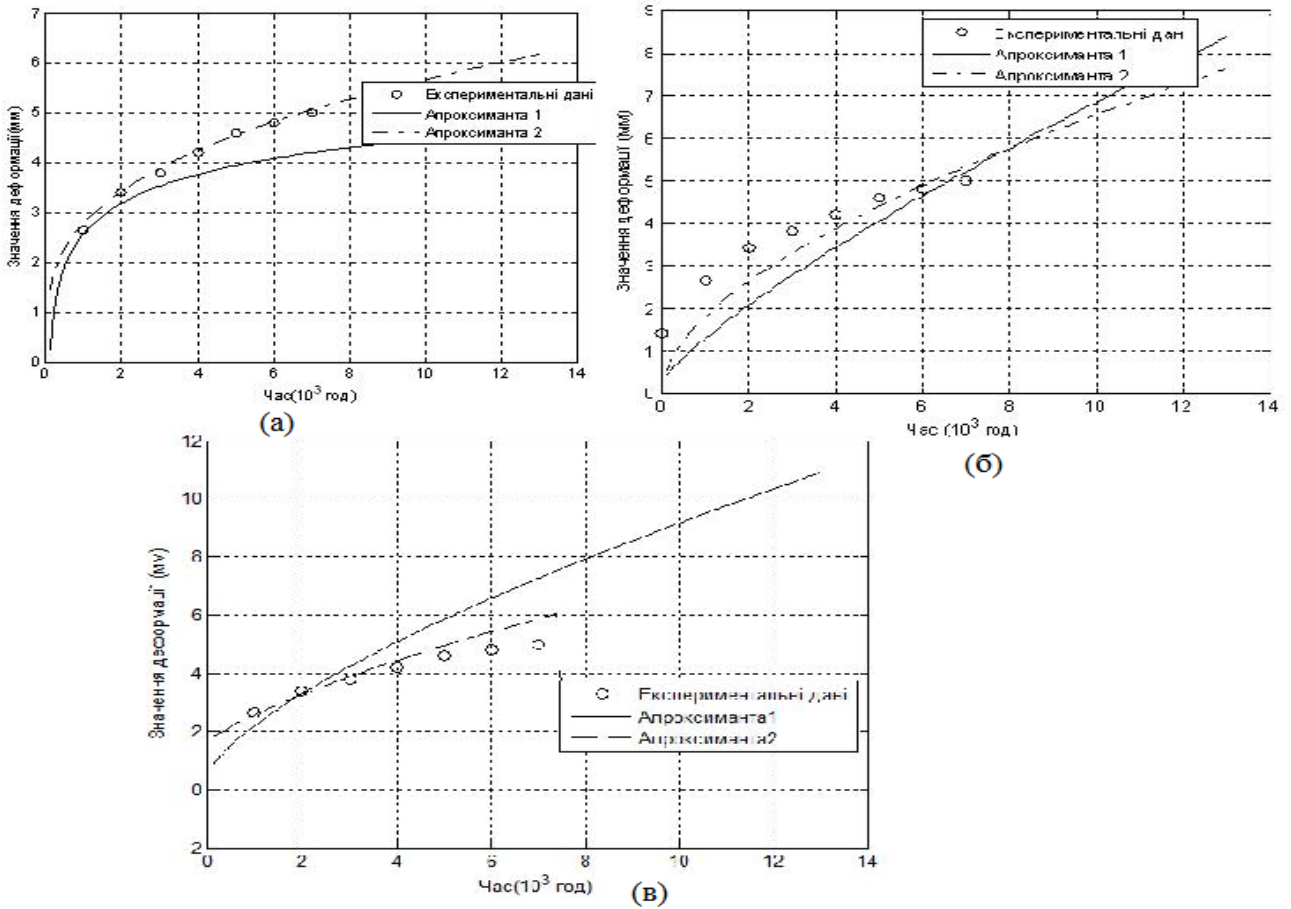


Рисунок. А.1 – Порівняння результатів ідентифікації за двома методами для моделі Максвелла, (а) для моделі Фойгта (б) та для моделі Кельвіна (в)

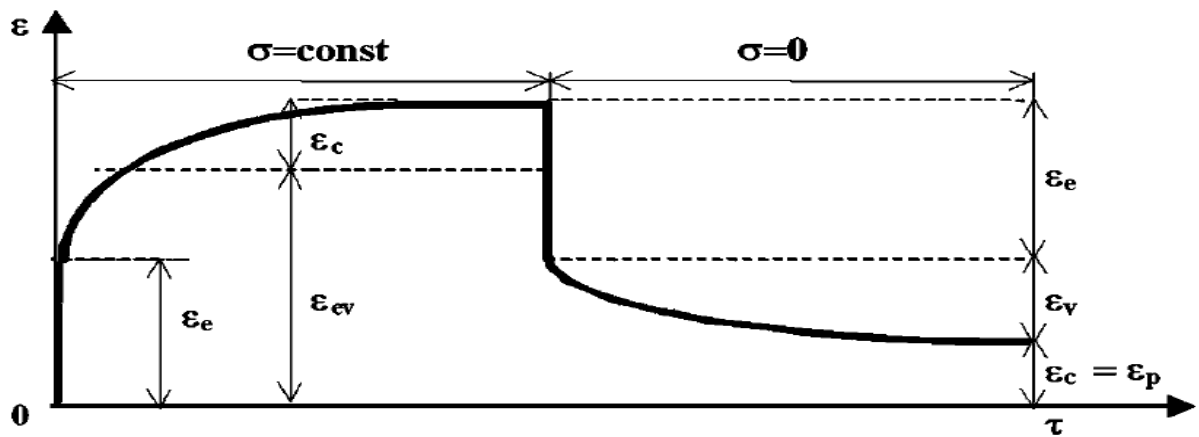


Рисунок А.2. – Модель гідро (термо)-механічних деформацій [199] ( $\epsilon_e$  - пружні деформації,  $\epsilon_v$  - в'язкі деформації,  $\epsilon_{ev}$  - в'язко-пружні деформації,  $\epsilon_c = \epsilon_p$  - деформації повзучості)



Рисунок А. 3 – Зміна форми зразка шпону та ефект пам'яті деревини берези [199]:  
 а. волога деревина; б. навантажена волога деревина; в. після сушки при навантаженні; г. після розвантаження сухої деревини; д. спочатку зволоження; е. через 27 сек. зволоження; ж. через 48 сек. зволоження; з. після зволоження і витримки.

Таблиця А.5

Оброблені експериментальні дані повзучості деревини

| $k$ | $\Pi_k$ (мм) | $k$ | $\Pi_k$ (мм) | $k$ | $\Pi_k$ (мм) | $k$ | $\Pi_k$ (мм) |
|-----|--------------|-----|--------------|-----|--------------|-----|--------------|
| 1   | 2,2          | 7   | 2,82         | 13  | 2,93         | 19  | 0,88         |
| 2   | 2,31         | 8   | 2,85         | 14  | 2,94         | 20  | 0,86         |
| 3   | 2,61         | 9   | 2,87         | 15  | 1            | 21  | 0,84         |
| 4   | 2,68         | 10  | 2,9          | 16  | 0,9          | 22  | 0,79         |
| 5   | 2,73         | 11  | 2,91         | 17  | 0,85         | 23  | 0,77         |
| 6   | 2,75         | 12  | 2,93         | 18  | 0,87         | 24  | 0,74         |

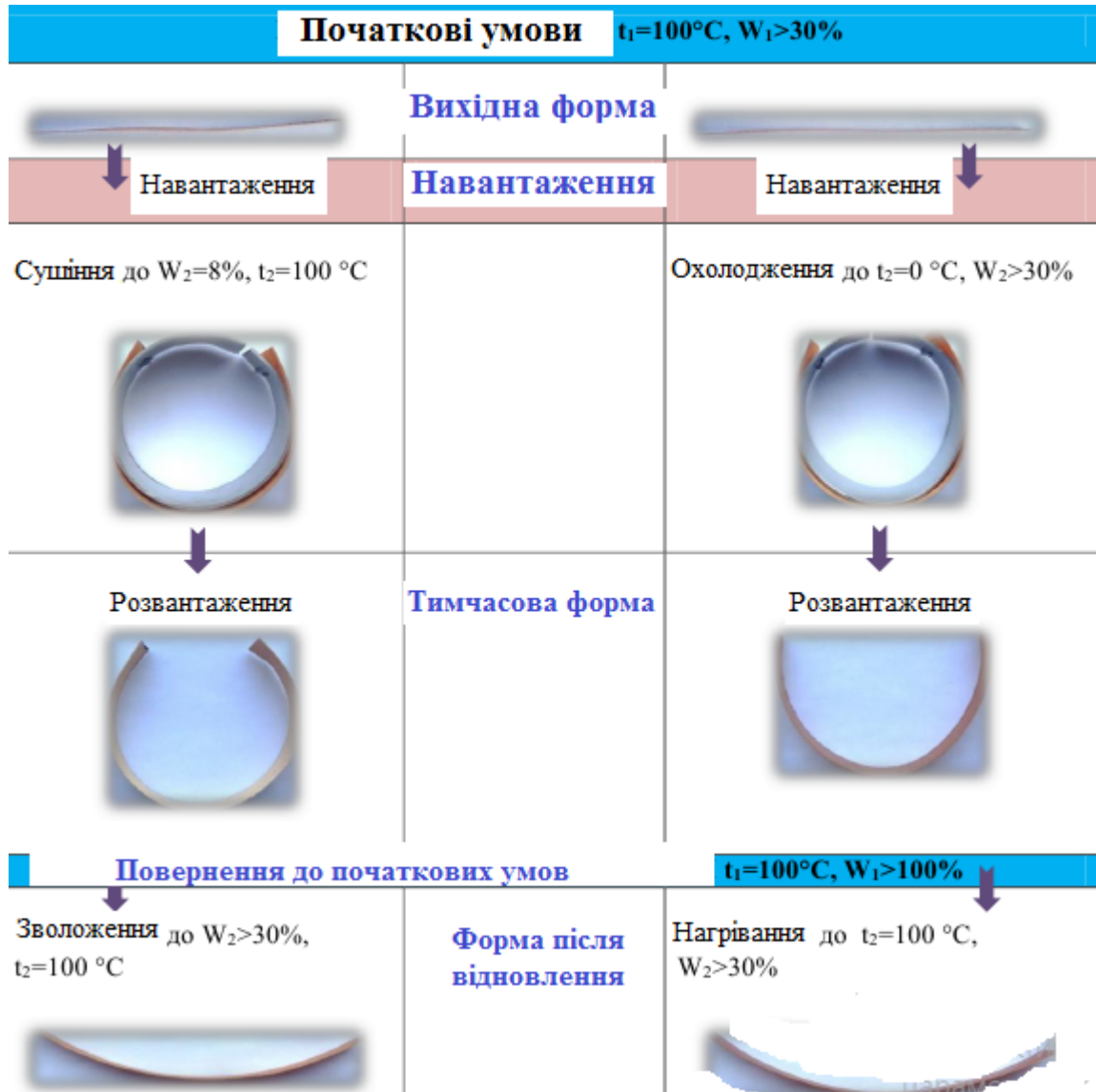


Рисунок А. 4 – Схема деформаційних перетворень при ефекті пам'яті форми [102]

## ДОДАТОК Б. ТЕПЛОМЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕРЕВИНИ

Для дослідження та моделювання деформаційно-релаксаційних процесів у середовищах з фрактальною структурою у розділах 3 та 4 були використані наступні характеристики: модулі пружності  $E, E_{11}(T, U), E_{22}(T, U)$ , модуль зсуву у радіально-тангентальному напрямі  $\mu(T, U)$ , коефіцієнти Пуассона  $\nu_{12}(T, U), \nu_{21}(T, U)$ , коефіцієнти температурного розширення  $\alpha_{11}, \alpha_{22}$ , коефіцієнти вологісного всихання  $\beta_{11}, \beta_{22}$ .

Миттєвий модуль пружності деревини дуба залежно від вологості  $W$  та температури  $T$  у [189] описується такою формулою:

$$E_{(m)}(W, T) = 24.4TW - 3130W - 9.5T + 1200 \quad (\text{Б.1})$$

У [209] апроксимовано та наведено модулі пружності за експериментальними даними для різних порід деревини залежно від температури  $T$  та вологовмісту  $U$ :

$$E_p(U, T) = 15TU - 1600U - 5.25T + 575, \quad (\text{Б.2})$$

$$E_b(U, T) = 8.3TU - 1233U - 3.5T + 500, \quad (\text{Б.3})$$

$$E_o(U, T) = 24.2TU - 3130U - 9.5T + 1200, \quad (\text{Б.4})$$

де  $U = W/100_{\text{кг/кг}}$  - вологовміст.

Деревина є ортотропним матеріалом для котрої важливими реологічними характеристиками є модуль зсуву  $\mu$  та коефіцієнти Пуассона (коефіцієнти поперечної деформації)  $\nu_{12}, \nu_{21}$ . Залежність від вологості  $W$  та температури  $T$  модуля зсуву  $\mu$  деревини сосни у праці [181] визначено наступним чином:

$$\mu(W, T) = \left( b_0 + b_1W + b_2W^2 + b_3W^3 + b_4T^3 + b_5WT^3 + b_6W^2T^3 \right)^2 \cdot \rho, \quad (\text{Б.5})$$

де  $\rho$  - густина, коефіцієнти  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$  відповідно мають значення:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1303.5238833684; & b_3 &= -0.00040291527771619 & b_6 &= -7.8615654948012 \cdot 10^{-8}; \\ b_1 &= -12.047347737003; & b_4 &= -0.00053433124880264 & & \\ b_2 &= 0.11322914343392 & b_5 &= 8.8997393276165 \cdot 10^{-6}. & & \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

Оброблення результатів дослідження впливу вологості на механічні властивості деревини сосни дало змогу у роботі [181] отримати залежності коефіцієнта Пуассона від вологості  $w$  :

$$\nu_{12}(w) = 1.464 - 3.695 \cdot 10^{-2} \cdot w, \quad (\text{Б.7})$$

$$\nu_{21}(w) = 1.3426 - 0.2105 \cdot 10^{-3} \cdot w. \quad (\text{Б.8})$$

Наведемо модулі пружності для радіальних і тангентальних напрямів анізотропії, модуль зсуву у радіально-тангентальному напрямі, коефіцієнти Пуассона та їхні відношення до модулів пружності для деревини сосни, берези та дуба при вологості  $w = 5..15\%$  [6, 104, 105] у табл. Б.1 та табл. Б.2.

Таблиця Б.1

Значення модулів пружності та зсуву для деревини сосни, дуба та берези.

| Порода<br>деревини | Модуль<br>пружності<br>(ГПа)<br>$w = 12\%$ |          | Модуль<br>зсуву<br>(ГПа)<br>$w = 12\%$ | Модуль<br>пружності<br>(ГПа)<br>$w = 15\%$ |          | Модуль<br>зсуву<br>(ГПа)<br>$w = 15\%$ |
|--------------------|--|----------|--|--|----------|--|
|                    | $E_{11}$                                   | $E_{22}$ | $\mu$                                  | $E_{11}$                                   | $E_{22}$ | $\mu$                                  |
| Сосна              | 0.7653                                     | 0.43851  | 0.583                                  | 0.5001                                     | 0.4217   | 0.049                                  |
| Дуб                | 1.2831                                     | 0.6591   | 0.2483                                 | 1.0787                                     | 0.8140   | 0.4315                                 |
| Береза             | 1.3927                                     | 0.7357   | 0.2737                                 | 0.5884                                     | 0.4119   | 0.1961                                 |

Відомо, що при нагріванні деревини виникає збільшення її об'єму. Дослідження показали, що температурне розширення у тангентальному напрямі анізотропії більше у 1,5-1,8 разів, ніж у радіальному напрямі. Значення коефіцієнтів температурного розширення у радіальному  $\alpha_{11}$  і тангентальному  $\alpha_{22}$  напрямі для деревини дуб та береза наведено у [65, 6]:  $\alpha_{11(o)} = -2,5 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_{22(o)} = -2,1 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C}$ ;  $\alpha_{11(b)} = 32,3 \cdot 10^6$ ,  $\alpha_{22(b)} = 39,4 \cdot 10^6$  при густині  $\rho = 660 \text{ кг/м}^3$ .

У [65] наведено таку пропорцію між коефіцієнтами вологісного всихання у радіальному  $\beta_{11}$  і тангентальному  $\beta_{22}$  напрямі анізотропії:  $\beta_{22} : \beta_{11} = 2 : 1$ . Враховуючи середню густину деревини із експериментальних даних [65]



та відповідні дослідження [105] можна навести такі значення коефіцієнту вологісного всихання та температурного розширення (табл. Б.3).

Таблиця Б.2

Значення та співвідношення коефіцієнтів Пуассона до модулів пружності для деревини сосни, дуба та берези.

| Порода деревини | $\nu_{12}/E_{11} \times 10^{-6} \times \text{см}^2/\text{кг}$ | $\nu_{21}/E_{22} \times 10^{-6} \times \text{см}^2/\text{кг}$ | $\nu_{12}$ | $\nu_{21}$ |
|-----------------|---|---|------------|------------|
| Береза          | 0.207   | 0.214   | 0.49       | 0.81       |
| Сосна           | 0.179   | 0.241   | 0.38       | 0.79       |
| Дуб             | 0.427   | 0.421   | 0.34       | 0.83       |

Таблиця Б.3

Значення коефіцієнтів температурного розширення абсолютно сухої деревини та коефіцієнтів вологісного всихання для деревини сосни, берези та дуба

| Порода деревини | $\alpha_{11} \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ | $\alpha_{22} \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ | $\beta_{11}(\%)$ | $\beta_{22}(\%)$ | $\rho$<br>( $\text{кг}/\text{м}^3$ ) |
|-----------------|---|---|------------------|------------------|--------------------------------------|
| Сосна           | 15.0  | 29.0  | 12.2             | 10.5             | 390                                  |
| Береза          | 27.2  | 30.0  | 13.7             | 12.4             | 520                                  |
| Дуб             | 29.3  | 41.0  | 10.5             | 8                | 580                                  |

У розділі 2 для чисельного дослідження процесу тепло- та волого перенесення з використанням дробових похідних похідних було використано наступні теплофізичні характеристики деревини: питома теплоємність  $c(T,U)$ , густина  $\rho(U)$ , базисна густина  $\rho_0$ , коефіцієнт фазового переходу  $\varepsilon$ , питома теплота пароутворення  $r$ , коефіцієнти теплопровідності в радіальному і тангентальному напрямі анізотропії  $\lambda_1(T,U)$ ,  $\lambda_2(T,U)$ , коефіцієнти вологопровідності в радіальному і тангентальному напрямі анізотропії  $a_1(T,U)$ ,

$a_2(T, U)$ , термоградієнтний коефіцієнт  $\delta(T, U)$ , рівноважний вологовміст  $U_p(t_c, \varphi)$ , що є функцією від температури середовища  $t_c$  та відносної вологості зовнішнього середовища  $\varphi$ , коефіцієнти теплообміну  $\alpha_1(t_c, \nu), \alpha_2(t_c, \nu)$ , коефіцієнт вологообміну  $\beta(t_c, \varphi, \nu)$ , де  $\nu$  є швидкістю руху агента сушіння.

Коефіцієнти вологопровідності характеризують інтенсивність потоку вологи всередині у деревині. Експериментальні дослідження [209] показали, що коефіцієнти вологопровідності найбільше залежні від температури деревини, базисної густини (чим більша густина деревини не залежно від породи, тим нижча у ній вологопровідність), напрямку потоку вологи (коефіцієнт вологопровідності більший у радіальному напрямку, ніж у тангентальному). Наприклад, згідно даних [105] коефіцієнт вологопровідності для деревини берези при базисній густині  $\rho_0 = 500 \text{ кг/м}^3$  та температурі  $T = 20, 60, 80^\circ \text{C}$  набуває відповідні значення у двох напрямках анізотропії (див. табл. Б.4).

Залежність коефіцієнту вологопровідності від температури для деревини сосни, берези та дуба описуються такими співвідношеннями [209]:

$$a_p(T) = 10^{9.36 \lg(T+273) - 22.6} \cdot 10^{-6}; \quad (\text{Б.9})$$

$$a_b(T) = 10^{9.36 \lg(T+273) - 22.79} \cdot 10^{-6}; \quad (\text{Б.10})$$

$$a_o(T) = 10^{9.36 \lg(T+273) - 23.13} \cdot 10^{-6}. \quad (\text{Б.11})$$

Точність апроксимованих функцій (Б.9)-(Б.11) становить 0,3 %.

Для розрахунків визначення функціональної залежності коефіцієнту вологопровідності одразу для температури  $T$  та вологовмісту  $U$  у [104] приймався наступний вираз:

$$a(U, T) = a_T \cdot a_U, \quad (\text{Б.12})$$

де отримані наступні залежності коефіцієнту вологопровідності від температури  $a_T$  та вологовмісту  $a_U$ :

$$a_T = (c_1 T^3 + c_2 T^2 + c_3 T + c_4) \cdot 10^{-6}, \text{ м/с}, \quad (\text{Б.13})$$

$$a_U = -274.39 U^5 + 634.908 U^4 - 526.7 U^3 + 181.864 U^2 - 22.655 U + 1.905, \quad (\text{Б.14})$$

коефіцієнти  $c_i, (i=1, \dots, 4)$  для порід деревини сосна, береза та дуб наведені у табл.Б.5

Відношення коефіцієнту вологопровідності деревини у радіальному напрямі анізотропії до тангентального  $a_1/a_2$ . знаходиться у межах від 1,23-1,28 [209], зокрема для хвойних порід деревини становить 1,25 [104].

Таблиця Б.4

Коефіцієнти вологопровідності для деревини берези при різних значеннях температури

| Напрямок анізотропії | Коефіцієнти вологопровідності<br>$a_i \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ |                        |                        |
|----------------------|--|------------------------|------------------------|
|                      | $T = 20^\circ\text{C}$   | $T = 40^\circ\text{C}$ | $T = 80^\circ\text{C}$ |
| Радіальний           | 2.07   | 6.34                   | 11.4                   |
| Тангентальний        | 1.85   | 6.2                    | 10.0                   |

Таблиця Б.5

Значення коефіцієнтів моделі для різних порід деревини

| Порода деревини | $c_1$                 | $c_2$                  | $c_3$ | $c_4$ |
|-----------------|-----------------------|------------------------|-------|-------|
| Сосна           | $1.273 \cdot 10^{-5}$ | $9.74 \cdot 10^{-4}$   | 0.022 | 0.587 |
| Береза          | $8.565 \cdot 10^{-5}$ | $-2.361 \cdot 10^{-3}$ | 0.111 | 0.192 |
| Дуб             | $8.565 \cdot 10^{-5}$ | $-5.704 \cdot 10^{-4}$ | 0.041 | 0.012 |

Перенесення тепла всередині деревини характеризується коефіцієнтами теплопровідності, котрі залежні від вологості, пористості (густини), напрямку потоку тепла та температури. Досліджено, що із збільшенням базисної густини коефіцієнт теплопровідності збільшується [170]. У праці [209] апроксимовано коефіцієнт теплопровідності залежний від величини вологовмісту та температури із точністю 1,6% для деревини густина якої  $\rho$  ( $\rho = 500 \text{ кг}/\text{м}^3$ ):

$$\lambda(U, T) = 0.0022 \chi T + 10^{0.2951 \lg 100U - 1.022}, \quad 0.05 \leq U \leq 1 \quad (\text{Б.15})$$

$$\lambda(U, T) = (0.0013U + 0.0009)T + 10^{0.2951 \lg 100U - 1.022}, \quad 1 < U \leq 1.3. \quad (\text{Б.16})$$

Відношення коефіцієнтів теплопровідності у радіальному і тангентальному напрямках анізотропії для порід деревини сосна, береза та дуб можна подати у такому вигляді [209]:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = K_x, \quad (\text{Б.17})$$

де коефіцієнт  $K_x$  приймає відповідні значення для сосни, берези та дуба – 1,06; 1,00; 0,87.

Питома теплоємність  $c$  на відміну від інших теплофізичних характеристик деревини не залежить від густини та породи деревини. Залежність питоми теплоємності від вмісту вологи та температури задаються наступними співвідношеннями [104, 209]:

$$c(U, T) = 20T + 243U + 2200, \quad -60^\circ\text{C} \leq T < 0^\circ\text{C}, \quad (\text{Б.18})$$

$$c(U, T) = 3.5T + 3200 - 2.18 \cdot 10^2 (130 - 100U)^{2.28}, \quad 0^\circ\text{C} \leq T \leq 100^\circ\text{C}. \quad (\text{Б.19})$$

Точність співвідношень (Б.18) та (Б.19) відповідно рівна 2,2 та 3,0 %.

Термоградієнтний коефіцієнт  $\delta$  задається такою функціональною залежністю від температури та вологовмісту [209]:

$$\delta(U, T) = \left( (5.55 - 0.013T) - 2.42 \cdot 10^{-3} (100U - (72 - 0.39T))^2 \right) \cdot 10^{-2}. \quad (\text{Б.20})$$

До граничних умов третього роду (2.5)-(2.8) входять такі характеристики як рівноважний вологовміст, коефіцієнти теплообміну та теплопровідності, які є залежні від зовнішніх параметрів - температури середовища та відносної вологості агента сушіння.

Враховуючи [209] рівноважний вологовміст  $U_p$  можна описати наступною формулою:

$$U_p(t_c, \varphi) = 10,6^\varphi (0,0327 - 0,00015T). \quad (\text{Б.21})$$

Шляхом логарифмування із виразу (5.31) у [104] отримано величину відносної вологості зовнішнього середовища  $\varphi$ :

$$\varphi = 0.42 \ln \frac{100U_p}{7.36 - 0.015T}. \quad (\text{Б.22})$$

Аналіз досліджень свідчить про не залежність коефіцієнту вологообміну  $\beta$  від породи деревини та вологості, проте він залежить від швидкості руху агента сушіння  $\nu$ , температури середовища та відносної вологості агента сушіння [209]:

$$\beta(t_c, \varphi, \nu) = \begin{cases} (0.527(t_c + 10)^{2.06} \cdot 10^{-4} + 0.04)(5\nu + 3.5) - \\ - (0.0017\nu + 0.0116)(\varphi - 45)^2 \cdot 10^{-7}, 5^\circ C < t_c \leq 70^\circ C \\ \frac{((5\nu + 35) - (0.0017\nu + 0.0116)(\varphi - 45)^2) \cdot 10^{-7}}{(4.32 - 0.0303t_c) - 0.0089(5\nu + 35) - (0.0017\nu + 0.0116)(\varphi - 45)^2}, 70^\circ C < t_c \leq 100^\circ C \end{cases} \quad (\text{Б.23})$$

Коефіцієнт теплообміну  $\alpha$  описується наступною формулою [209]:

$$\alpha(t_c, \nu) = 8.35(0.00625t_c + 2.1) \left( \frac{\nu}{0.0083t_c + 1.37} \right)^{0.8} \cdot l^{-0.2}, \quad (\text{Б.24})$$

де  $l$  - розмір деревини у напрямку руху потоку тепла.

У табл. Б.6 наведено значення коефіцієнту фазового переходу  $\varepsilon$  при відповідній базисній густині деревини.

Таблиця Б.6

Значення критерію фазового переходу

| $\rho_0$ (кг/м <sup>3</sup> ) | $\varepsilon$ | $\rho_0$ (кг/м <sup>3</sup> ) | $\varepsilon$ |
|-------------------------------|---------------|-------------------------------|---------------|
| 562                           | 0.945         | 553                           | 0.975         |
| 583                           | 0.925         | 567                           | 0.927         |

**ДОДАТОК В. ЛІСТИНГ ПРОГРАМНОГО КОДУ ЧИСЕЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ  
МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНОСЕННЯ  
У СЕРЕДОВИЩАХ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ**

```

from tkinter import *
from math import log10 as lg, gamma as Gamma
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
import matplotlib
matplotlib.use('TkAgg')
from matplotlib.backends.backend_tkagg import FigureCanvasTkAgg
tt = []
xx = []
label_names = ['U0', 'T0', 'phi', 'v', 'shc', 'p0', 'p', 'lm', 'r', 'a',
               'delta', 'T_c', 'U_p', 'sigma', 'omega', 'left', 'right', 'time', 'N', 'K',
               'eps', 'alpha', 'beta', 'gamma']
labels = []
fontsize = '12'
root = Tk()
root.title('Program')
frame00 = Frame(root)
frame00.grid(row=0, column=0)
frame01 = Frame(root)
frame01.grid(row=0, column=1)
frame02 = Frame(root)
frame02.grid(row=0, column=2)
for i in range(15):
    labels.append(Label(frame00, text=label_names[i]+' : ', width=10, bg='green',
                       font='TkTextFont ' + fontsize))
    labels[i].grid(row=i, column=0)
for i in range(15,24):
    labels.append(Label(frame01, text=label_names[i]+' : ', width=10, bg='green',
                       font='TkTextFont ' + fontsize))
    labels[i].grid(row=i-15, column=0)
labels[7].config(height=2)
labels[10].config(height=2)
labels[13].config(height=3)
labels[14].config(height=2)
labels[20].config(height=4)
labels[21].config(height=4)
labels[22].config(height=4)

```

```

labels[23].config(height=4)
def get_U0(frame00):
    global U0
    U0 = eval(entry_U0.get())
    print('U0 =', U0)
entry_U0 = Entry(frame00)
entry_U0.insert(END, '20.')
entry_U0.grid(row=0, column=1)
# entry_U0.bind('<Leave>', get_U0)
def get_T0(frame00):
    global T0
    T0 = eval(entry_T0.get())
    print('T0 =', T0)
entry_T0 = Entry(frame00)
entry_T0.insert(END, '0.4')
entry_T0.grid(row=1, column=1)
# entry_T0.bind('<Leave>', get_T0)
def get_phi(frame00):
    global phi
    phi = eval(entry_phi.get())
    print('phi =', phi)
entry_phi = Entry(frame00)
entry_phi.insert(END, '0.6')
entry_phi.grid(row=2, column=1)
# entry_phi.bind('<Leave>', get_phi)
def get_v(frame00):
    global v
    v = eval(entry_v.get())
    print('v =', v)
entry_v = Entry(frame00)
entry_v.insert(END, '2.')
entry_v.grid(row=3, column=1)
# entry_v.bind('<Leave>', get_v)
def get_shc(frame00):
    global shc
    shc = eval(entry_shc.get())
    print('shc =', shc)
entry_shc = Entry(frame00)
entry_shc.insert(END, '2697.2')
entry_shc.grid(row=4, column=1)
# entry_shc.bind('<Leave>', get_shc)
def get_p0(frame00):
    global p0

```

```

    p0 = eval(entry_p0.get())
    print('p0 =', p0)
entry_p0 = Entry(frame00)
entry_p0.insert(END, '560.')
entry_p0.grid(row=5, column=1)
# entry_p0.bind('<Leave>', get_p0)
def get_p(frame00):
    global p
    p = eval(entry_p.get())
    print('p =', p)
entry_p = Entry(frame00)
entry_p.insert(END, 'p0 * (1 + U0)')
entry_p.grid(row=6, column=1)
# entry_p.bind('<Leave>', get_p)
def get_lm(frame00):
    global lm
    lm = eval(text_lm.get(1.0, END))
    print('lm =', lm)
text_lm = Text(frame00, height=2, width=35, font='TkTextFont' + fontsize)
text_lm.insert(END,
    '0.00222 * U0 * T0 + 10 ** (0.295 * lg(100 * U0) - 1.022 )')
text_lm.grid(row=7, column=1)
# text_lm.bind('<Leave>', get_lm)
def get_r(frame00):
    global r
    r = eval(entry_r.get())
    print('r =', r)
entry_r = Entry(frame00)
entry_r.insert(END, '2500.')
entry_r.grid(row=8, column=1)
# entry_r.bind('<Leave>', get_r)
def get_a(frame00):
    global a
    a = eval(entry_a.get())
    print('a =', a)
entry_a = Entry(frame00)
entry_a.insert(END, '10 ** ( -10 * (9.36 * lg(T0 + 273) - 22.6 ) )')
entry_a.grid(row=9, column=1)
# entry_a.bind('<Leave>', get_a)
def get_delta(frame00):
    global delta
    delta = eval(text_delta.get(1.0, END))
    print('delta =', delta)

```



```

text_delta = Text(frame00, height=2, width=35, font='TkTextFont' + fontsize)
text_delta.insert(END,
    '( (5.55 - 0.013 * T0) - 0.00242 * '
    '(100 * U0 - (72 - 0.39 * T0) ** 2) ) * 0.01')
text_delta.grid(row=10, column=1)
# text_delta.bind('<Leave>', get_delta)
def get_T_c(frame00):
    global T_c
    T_c = eval(entry_T_c.get())
    print('T_c =', T_c)
entry_T_c = Entry(frame00)
entry_T_c.insert(END, '70.')
entry_T_c.grid(row=11, column=1)
# entry_T_c.bind('<Leave>', get_T_c)
def get_U_p(frame00):
    global U_p
    U_p = eval(entry_U_p.get())
    print('U_p =', U_p)
entry_U_p = Entry(frame00)
entry_U_p.insert(END, '10.6 ** phi * ( 0.0327 - 0.00015 * T0 )')
entry_U_p.grid(row=12, column=1)
# entry_U_p.bind('<Leave>', get_U_p)
def get_sigma(frame00):
    global sigma
    sigma = eval(text_sigma.get(1.0, END))
    print('sigma =', sigma)
text_sigma = Text(frame00, height=3, width=35, font='TkTextFont' + fontsize)
text_sigma.insert(END,
    '10 ** (-7) * ( 0.527 * ( T_c + 10 ) ** 2.06 * 0.0001 + 0.04 ) * '
    '( ( 5 * v + 3.5 ) - ( 0.0017 * v + 0.0116 ) * ( 100 * phi - 45 ) ** 2 )')
text_sigma.grid(row=13, column=1)
# text_sigma.bind('<Leave>', get_sigma)
def get_omega(frame00):
    global omega
    omega = eval(text_omega.get(1.0, END))
    print('omega =', omega)
text_omega = Text(frame00, height=2, width=35, font='TkTextFont' + fontsize)
text_omega.insert(END,
    '8.35 * ( 0.00625 * T_c + 2.1 ) * v ** 0.8 / '
    '( ( 0.0083 * T_c + 1.37 ) ** 0.8 * T0 ** 0.2 )')
text_omega.grid(row=14, column=1)
# text_omega.bind('<Leave>', get_omega)
def get_left(frame01):

```

```

    global left
    left = eval(entry_left.get())
    print('left =', left)
entry_left = Entry(frame01)
entry_left.insert(END, '0.')
entry_left.grid(row=0, column=1)
# entry_left.bind('<Leave>', get_left)
def get_right(frame01):
    global right
    right = eval(entry_right.get())
    print('right =', right)
entry_right = Entry(frame01)
entry_right.insert(END, '0.025')
entry_right.grid(row=1, column=1)
# entry_right.bind('<Leave>', get_right)
def get_time(frame01):
    global time
    time = eval(entry_time.get())
    print('time =', time)
entry_time = Entry(frame01)
entry_time.insert(END, '60.')
entry_time.grid(row=2, column=1)
# entry_time.bind('<Leave>', get_time)
def get_N(frame01):
    global N
    N = eval(entry_N.get())
    print('N =', N)
entry_N = Entry(frame01)
entry_N.insert(END, '25')
entry_N.grid(row=3, column=1)
# entry_N.bind('<Leave>', get_N)
def get_K(frame01):
    global K
    K = eval(entry_K.get())
    print('K =', K)
entry_K = Entry(frame01)
entry_K.insert(END, '100')
entry_K.grid(row=4, column=1)
# entry_K.bind('<Leave>', get_K)
def get_eps(frame01):
    global eps
    eps = scale_eps.get()
    print('eps =', eps)

```

```

scale_eps = Scale(frame01,orient=HORIZONTAL,length=200,from_=0.05,to=0.95,
    tickinterval=0.15,resolution=0.05)
scale_eps.grid(row=5,column=1)
# scale_eps.bind('<Leave>', get_eps)
def get_alpha(frame01):
    global alpha
    alpha = scale_alpha.get()
    print('alpha =', alpha)
scale_alpha = Scale(frame01,orient=HORIZONTAL,length=200,from_=0.05,to=0.95,
    tickinterval=0.15,resolution=0.05)
scale_alpha.grid(row=6,column=1)
# scale_alpha.bind('<Leave>', get_alpha)
def get_beta(frame01):
    global beta
    beta = scale_beta.get()
    print('beta =', beta)
scale_beta = Scale(frame01,orient=HORIZONTAL,length=200,from_=1.05,to=1.95,
    tickinterval=0.15,resolution=0.05)
scale_beta.grid(row=7,column=1)
# scale_beta.bind('<Leave>', get_beta)
def get_gamma(frame01):
    global gamma
    gamma = scale_gamma.get()
    print('gamma =', gamma)
scale_gamma = Scale(frame01,orient=HORIZONTAL,length=200,from_=0.05,to=0.95,
    tickinterval=0.15,resolution=0.05)
scale_gamma.grid(row=8,column=1)
# scale_gamma.bind('<Leave>', get_gamma)
entries = [entry_U0, entry_T0, entry_phi, entry_v, entry_shc, entry_p0,
    entry_p, entry_r, entry_a, entry_T_c, entry_U_p, entry_left, entry_right,
    entry_time, entry_N, entry_K]
texts = [text_lm, text_delta, text_sigma, text_omega]
scrolls = [scale_eps, scale_alpha, scale_beta, scale_gamma]
# labels
for entry in entries:
    entry.config(font='TkTextFont ' + fontsize, width=35, justify=CENTER)
for text in texts:
    text.config(font='TkTextFont ' + fontsize, width=35)
for scroll in scrolls:
    scroll.config(font='TkTextFont ' + fontsize, length=250, width=15)
def set_values():
    print()
    print('='*30)

```

```

print()
get_U0(root)
get_T0(root)
get_phi(root)
get_v(root)
get_shc(root)
get_p0(root)
get_p(root)
get_lm(root)
get_r(root)
get_a(root)
get_delta(root)
get_T_c(root)
get_U_p(root)
get_sigma(root)
get_omega(root)
get_left(root)
get_right(root)
get_time(root)
get_N(root)
get_K(root)
get_eps(root)
get_alpha(root)
get_beta(root)
get_gamma(root)
print()
print('='*30)
print()
# button_set = Button(root, text='set values', command=set_values)
# button_set.grid(row=24, column=0)
def calculate():
    set_values()
    print('calculate')
    nx = N+1 # amount of points on x
    kt = K+1 # amount of points on t
    dt = (right - left) / N
    dx = time / K
#####
    # form matrixes (T, U, A, B, C) (N+1)x(N+1)
    # form vectors (f, g) (N+1)
#####
    size = (nx, nx)
    A = np.zeros(size)

```

```

B = np.zeros(size)
C = np.zeros(size)
size = (kt, nx)
global T
global U
T = np.zeros(size)
U = np.zeros(size)
t = np.zeros(nx) # for  $T_n^{k+0.5}$ 
u = np.zeros(nx) # for  $U_n^{k+0.5}$ 
f = np.zeros(nx)
g = np.zeros(nx)
# initial conditions
# T[0] = np.ones(nx)
# U[0] = np.ones(nx)
#####
# initial conditions
T[0] = 20 * np.ones(nx)
U[0] = 0.4 * np.ones(nx)
# defined constants
b = eps * p0 * r
c = p0 * (1-eps) * sigma
d = Gamma(2-gamma) * dx ** gamma
e = Gamma(2-gamma) * (dt / 2) ** alpha
#####
def q(b,j):
    return (-1)**j * Gamma(b+1) / (Gamma(j+1) * Gamma(b-j+1))
#def qq(b,j):
#    res = b
#    for i in range(1,j):
#        res *= (b-i)
#    res /= factorial(j)
#    return abs(res)
#def factorial(n):
#    res = 1
#    for i in range(2,n+1):
#        res *= i
#    return res
# print(q(1.5,7))
# print(qq(1.5,7))
#####
# form matrix A
A[0,0] = omega / c + lm * gamma / d
A[0,1] = lm / (c * d)

```

```

A[N,N] = omega / c - lm / d
A[N,N-1] = lm * gamma / (c * d)
for n in range(1,N):
    A[n,n] = shc * p / b - lm * q(beta, 0) / dx ** beta
    for j in range(0,n):
        A[n,j] = -lm * e * q(beta,n-j) / (dx ** beta * b)
# form matrix B
B[0,0] = sigma - a * gamma / d
B[0,1] = a / d
B[N,N] = a / d + sigma
B[N,N-1] = -a * gamma / d
for n in range(1,N):
    B[n,n] = -1 / e + a * q(beta,0) / dx ** beta
    for j in range(0,n):
        B[n,j] = a * q(beta, n-j) / dx ** beta
# form matrix C
C[0,0] = -a * delta * gamma / d
C[0,1] = a * delta / d
C[N,N] = a * delta / d
C[N,N-1] = -a * delta * gamma / d
for n in range(1,N):
    for j in range(0,n+1):
        C[n,j] = a * delta * q(beta, n-j) / dx ** beta
#####
# make cycle
#####
for k in range(1,kt):
    # form vector f
    f[0] = U_p - omega / c * T_c
    f[-1] = U_p - omega / c * T_c
    for n in range(1,N):
        f[n] = alpha * U[k-1,n] - shc * p * alpha / b * T[k-1,n]
    # form vector g
    g[0] = -sigma * U_p
    g[-1] = -sigma * U_p
    for n in range(1,N):
        g[n] = alpha * U[k-1,n] / e
    # find  $T_n^{\{k+0.5\}}$  and  $U_n^{\{k+0.5\}}$ 
    D = np.linalg.inv(np.add(np.matmul(B,A), C)) #  $(B*A + C)^{-1}$ 
    E = np.negative(np.add(np.matmul(B,f), g)) #  $-(Bf + g)$ 
    t = np.matmul(D, E)
    u = np.add(np.matmul(A,t), f)
    # find  $T_n^{\{k+1\}}$  and  $U_n^{\{k+1\}}$ 

```

```

gg = Gamma(2-alpha) * dt ** alpha
coef = a * gg / dx ** beta
for n in range(0,nx):
    ss = 0
    for j in range(0,n+1):
        ss += q(beta, j) * (u[n-j] + delta * t[n-j])
    U[k,n] = alpha * U[k-1,n] + coef * ss
for n in range(0,nx):
    ss = 0
    for j in range(0,n+1):
        ss += q(beta, j) * t[n-j]
    T[k,n] = ( alpha * T[k-1,n] + lm * gg / (shc * p * dx ** beta) * ss +
              b * (U[k,n] - alpha * U[k-1,n]) / (shc * p) )+3.5
#####
# visualize
#####
fig = plt.figure(figsize=plt.figaspect(0.5))
global xx, tt
xx = np.linspace(left, right, nx)
tt = np.linspace(0, time, kt)
X, Y = np.meshgrid(xx, tt)
ax1 = fig.add_subplot(1, 2, 1, projection='3d')
ax1.plot_surface(X, Y, T, cmap=cm.jet)
ax1.set_xlabel('x')
ax1.set_ylabel('t')
ax1.set_zlabel('T(x,t)')
ax2 = fig.add_subplot(1, 2, 2, projection='3d')
ax2.plot_surface(X, Y, U, cmap=cm.jet)
ax2.set_xlabel('x')
ax2.set_ylabel('t')
ax2.set_zlabel('U(x,t)')
plt.show()
button_calc = Button(frame01, text='calculate', command=calculate)
button_calc.grid(row=24, columnspan=2, sticky=W+E+N+S)
button_calc.config(font='TkTextFont ' + fontsize)
def show():
    for item in tt:
        listbox_t.insert(END, item)
    for item in xx:
        listbox_x.insert(END, item)
button_show = Button(frame02, text='show', command=show)
button_show.grid(row=0, columnspan=2, sticky=W+E+N+S)
button_show.config(font='TkTextFont ' + fontsize)

```

```

# cut t
Label(frame02, text='cut in t :', width=10, bg='green',
      font='TkTextFont ' + fontsize).grid(row=1, column=0)
listbox_t = Listbox(frame02, height=5, width=15, selectmode=SINGLE)
listbox_t.grid(row=2, column=0)
def cut_t():
    get_t_pos = listbox_t.curselection()[0]
    get_t = tt[get_t_pos]
    print(get_t)
    t = T[get_t_pos,:]
    u = U[get_t_pos,:]
    print(xx)
    print(t)
    print(u)
    master = Tk()
    fig1 = matplotlib.figure.Figure()
    fig2 = matplotlib.figure.Figure()
    plot1 = fig1.add_subplot(1, 1, 1)
    plot2 = fig2.add_subplot(1, 1, 1)
    plot1.plot(xx, u, linewidth=2.0)
    plot1.set_xlabel('x')
    plot1.set_ylabel('T(x)')
    plot2.plot(xx, t, linewidth=2.0)
    plot2.set_xlabel('x')
    plot2.set_ylabel('U(x)')
    canvas1 = FigureCanvasTkAgg(fig1, master)
    canvas1.draw()
    canvas1.get_tk_widget().grid(row=0, column=0)
    canvas2 = FigureCanvasTkAgg(fig2, master)
    canvas2.draw()
    canvas2.get_tk_widget().grid(row=0, column=1)
    master.mainloop()
button_cut_2D_t = Button(frame02, text='cut in 2D by t', command=cut_t)
button_cut_2D_t.grid(row=3, column=0)
# cut x
Label(frame02, text='cut in x :', width=10, bg='green',
      font='TkTextFont ' + fontsize).grid(row=1, column=1)
listbox_x = Listbox(frame02, height=5, width=15, selectmode=SINGLE)
listbox_x.grid(row=2, column=1)
def cut_x():
    get_x_pos = listbox_x.curselection()[0]
    get_x = xx[get_x_pos]
    print(get_x)

```



```

t = T[:,get_x_pos]
u = U[:,get_x_pos]
print(tt)
print(t)
print(u)
master = Tk()
fig1 = matplotlib.figure.Figure()
fig2 = matplotlib.figure.Figure()
plot1 = fig1.add_subplot(1, 1, 1)
plot1.set_xlabel('t')
plot1.set_ylabel('T(t)')
plot2 = fig2.add_subplot(1, 1, 1)
plot2.set_xlabel('t')
plot2.set_ylabel('U(t)')
plot1.plot(tt, t, linewidth=2.0)
plot2.plot(tt, u, linewidth=2.0)
canvas1 = FigureCanvasTkAgg(fig1, master)
canvas1.draw()
canvas1.get_tk_widget().grid(row=0, column=0)
canvas2 = FigureCanvasTkAgg(fig2, master)
canvas2.draw()
canvas2.get_tk_widget().grid(row=0, column=1)
master.mainloop()
button_cut_2D_x = Button(frame02, text='cut in 2D by x', command=cut_x)
button_cut_2D_x.grid(row=3, column=1)
root.mainloop()
#\begin{verbatim}
#\end{verbatim}

```

**ДОДАТОК Г. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості  
про апробацію результатів дисертації**

1. Sokolovskyu Ya., Levkovych M. Two-dimensional mathematical models of visco-elastic deformation using a fractional differentiation apparatus // International Journal of Modern Education and Computer Science. 2018. Vol. 10, No. 4. P. 1-9.
2. Mathematical models of biophysical processes taking into account memory effects and self-similarity / Ya. Sokolovskyu, M. Levkovych, O. Mokrytska, Ya. Kaplunskyu // Informatics & Data-Driven Medicine. 2018. Vol. 2255. P. 215-228. ISSN: 1613-0073 (SCOPUS).
3. Левкович М.В. Алгоритм ідентифікації дробово-експоненціальних ядер повзучості за експериментальними даними // Науковий вісник НЛТУ України. 2016. Вип. 26.1. С. 382-386.
4. Соколовський Я.І., Москвітін М.В. Математичне моделювання деформаційно-релаксаційних процесів з використанням похідних дробового порядку // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: Комп'ютерні науки та інформаційні технології : зб. наук. пр. 2015. № 826. С. 175-184.
5. Соколовський Я.І., Левкович М.В. Чисельний метод дослідження неізотермічного вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: Комп'ютерні науки та інформаційні технології : зб. наук. пр. 2016. № 843. С. 288-296.
6. Соколовський Я., Яркун В., Левкович М. Алгоритмічне та програмне забезпечення для дослідження неізотермічного вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою // Науковий вісник НЛТУ України. 2016. Вип. 26.7. С. 308-318.
7. Sokolovskyu I., Levkovych M., Mokrytska O. Numerical modeling and analysis of physical properties in biomaterials with fractal structure // Informatics & Data-Driven Medicine. 2018. Vol. 2255. P. 180-192. ISSN: 1613-0073 (SCOPUS).
8. Соколовський Я., Москвітін М. Числовий метод дослідження теплообміну на підставі похідних дробового порядку // Технічні вісті. 2015. 1(41), 2(42). С.12-15.

9. Sokolovskyy Ya., Shymanskyi V., Levkovich M. Mathematical modeling of non-isothermal moisture transfer and visco-elastic deformation in the materials with fractal structure // Computer Science and Information Technologies 'CSIT 2016' : proc. of the 11th Intern. Sci. and Techn. Conf., 6-10 Sept. 2016. Lviv, 2016. P. 91-95. (SCOPUS)
10. Mathematical and software providing of research of deformation and relaxation processes in environments with fractal structure / Ya. Sokolovskyy, V. Shymanskyi, M. Levkovich, V. Yarkun // Computer Science and Information Technologies 'CSIT 2017': proc. of the 12th Intern. Sci. and Techn. Conf., 5-8 Sept. 2017. Lviv, 2017. P. 24-27. (SCOPUS)
11. Numerical simulation and analysis of systems with memory based on integro differentiation of fractional order / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, Ya. Kaplunskyy // Computer Science and Information Technologies 'CSIT 2018': proc. of the 13th Intern. Sci. and Techn. Conf., 11-14 Sept. 2018. Lviv, 2018. P. 102-105. (SCOPUS, WEB of SCIENCE).
12. Mathematical modeling of two-dimensional deformation-relaxation processes in environments with fractal structure / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, V. Atamanyuk // 2nd International Conference on Data Stream Mining and Processing 'DSMP 2018' : proc., 21-25 Aug., 2018. Lviv, 2018. P. 375-380. (SCOPUS).
13. Mathematical modeling of heat and moisture transfer and rheological behavior in materials with fractal structure using the parallelization of predictor-corrector numerical method / Ya. Sokolovskyy, V. Shymanskyi, M. Levkovich, V. Yarkun // 1st International Conference on Data Stream Mining and Processing : proc., 23-27 Aug., 2016. Lviv, 2016. P. 108-111. (SCOPUS)
14. Mathematical modeling of visco-elastic state of materials with fractal structure / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovich, O. Mokrytska, V. Kryshchak // The Experience of Designing and Application of CAD System in Microelectronics 'CADSM 2017' : proc. of 14th Intern. Conf., 21-25 Feb., 2017. Lviv, Polyana, 2017. P. 35-38. (SCOPUS)

15. Mathematical modeling of anisotropic visco-elastic environments with memory based on integro-differentiation of fractional order / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovych, O. Mokrytska, V. Atamanyuk // Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering 'TCSET 2018' : proc. of 14th Intern. Conf., 20-24 Feb., 2018. Lviv, Slavske, 2018. P. 816-820. (SCOPUS)
16. Чисельне моделювання двовимірного тепломасоперенесення на підставі похідних дробового порядку / Я.І. Соколовський, М.В. Левкович, В.І. Яркун, Ю.Т. Ликтей, Р.П. Стельмах // 18-th International Conference on System Analysis and Information Technology, May 30 – June 2, 2016. Kyiv, 2016. С. 158-161.
17. Чисельне моделювання тепломасоперенесення в середовищах з фрактальною структурою з використанням розпаралелювання / Я.І. Соколовський, В.І. Яркун, М.В. Левкович, Р.П. Стельмах // 14 Міжнародна науково-практична конференція. "Математичне та імітаційне моделювання систем". Київ, Жукін, 2016. С. 75-78.
18. Моделювання неізотермічного вологоперенесення та деформування у середовищах з використанням алгоритмів розпаралелювання / Я.І. Соколовський, В.М. Шиманський, М.В. Левкович, В.І. Яркун // IV Науково-технічна конференція "Обчислювальні методи і системи перетворення інформації". Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка НАН України, 2016. С. 88-92.
19. Чисельне моделювання тепломасоперенесення у середовищах з фрактальною структурою / Я.І.Соколовський, М.В.Левкович, О.П.Герасимчук, В.І.Яркун // III Міжнародна конференція з автоматичного управління та інформаційних технологій 'ICASIT-2015', 11-13 грудня 2015 р. Київ: НТУУ КПІ, 2015. С. 41-43.
20. Чисельне моделювання теплообмінних процесів з використанням похідних дробового порядку / Я.І.Соколовський, М.В.Москвітіна, А.В.Нечепуренко, І.Б.Борецька // X Міжнародна науково-практична конференція «Математичне та імітаційне моделювання систем», 22-26 червня 2015. Чернігів, 2015. С. 45-49.

21. Математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів з використанням похідних дробового порядку / Я.І.Соколовський, М.В.Москвітїна, І.Б.Борецька, В.І.Яркун // Праці IV Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки», 26-29.05. 2015. Чернівці, 2015. С. 43-45.
22. Соколовський Я.І., Левкович М.В. Математичні моделі нерівноважних фізичних процесів з урахуванням ефекту «пам'яті» та самоорганізації // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Матеріали XXIV Всеукраїнської наукової конференції. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2018. С. 143-147.

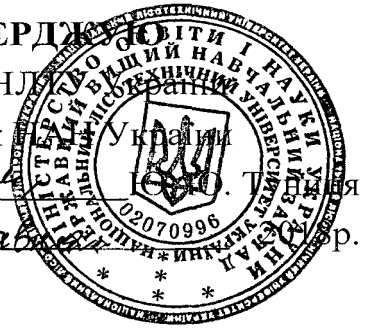
**Апробація результатів дисертації.** Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на таких конференціях та семінарах: 14-th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering TCSET (Lviv, 2018); XI, XII та XIII International scientific and technical conference “Computer science and informational technologies” CSIT (Lviv, 2016, 2017, 2018); I та II International Conference “Data Stream Mining & Processing” DSMP (Lviv, 2016, 2018); на 18-th International Conference System Analysis and Information Technology SAIT (Kyiv, 2016); 14th International Conference “The experience of designing and application of CAD system in microelectronics” CADSM / Proceedings (Lviv, 2017); IV Міжнародній науково-практичній конференції «Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки» ПІКТ-2015 (Чернівці 2015); III Міжнародній конференції з автоматичного управління та інформаційних технологій ICACIT-2015 (Київ, 2015); X Міжнародній науково-практичній конференції «Математичне та імітаційне моделювання систем» МДС (Чернігів, 2015); 14 Міжнародній науково-практичній конференції «Математичне та імітаційне моделювання систем» МОДС (Київ, Жукін, 2016); XXIV Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» APAMS-2018 (Львів, 2018); 1-st International Workshop on Informatics & Data-Driven Medicine (Львів, 2018); Науково-практичних конференціях професорсько-викладацького складу НЛТУ України в період 2015-2018 рр.

**ДОДАТОК Д. АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ**

ЗАТВЕРДЖЕНО

Ректор НЛТУ  
академік

*Юлія*  
"17" травня



### Акт

впровадження у навчальний процес результатів  
дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук Левкович М. В.

Ми, хто підписалися нижче, представники Національного лісотехнічного університету України, директор Інституту деревооброблювальних технологій і дизайну, доктор техн. наук, проф. В. М. Максимів; завідувач кафедри інформаційних технологій, доктор техн. наук, проф. Я. І. Соколовський; доц. кафедри інформаційних технологій, канд. фіз.-мат. наук О. І. Думанський; доц. кафедри інформаційних технологій, канд. техн. наук В. М. Шиманський склали цей акт про те, що у навчальному процесі кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України для викладання дисциплін: "Моделювання систем", "Математичне моделювання в інформаційних технологіях", "Чисельні методи", "Автоматизовані системи наукових досліджень", використовуються результати дисертаційної роботи аспіранта кафедри інформаційних технологій М. В. Левкович.

Результати дисертаційної роботи використано під час дипломного проектування при написанні бакалаврських і магістерських робіт за спеціальністю 122 "Комп'ютерні науки".

Використання результатів дисертаційної роботи сприяє вдосконаленню та підвищенню рівня фахової підготовки студентів університету.

Акт складено у трьох примірниках:

1-й примірник – кафедрі інформаційних технологій; 2-й примірник – навчально-методичному відділу НЛТУ України; 3-й примірник – М. В. Левкович.

Голова комісії

*В. М. Максимів*

В. М. Максимів

Члени комісії:

*Я. І. Соколовський*

Я. І. Соколовський


*О. І. Думанський*

О. І. Думанський

*В. М. Шиманський*

В. М. Шиманський

Проректор з наукової роботи  
Національного лісотехнічного  
університету України  
Професор, д. біол. н.

  
Г. Т. Криницький  
2018 р.  
вул. Ген. Чупринки 103



ЗАТВЕРДЖУЮ  
Директор виробничо-комерційної  
фірми "Ледас-Україна"  
В. В. Карпенко  
"23" 08 2018 р.  
м. Хуст, Закарпатська обл.

### АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи  
на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук  
Левкович Мар'яни Володимирівни

Ми, що нижче підписалися, директор ВКФ "Ледас-Україна" В. В. Карпенко, головний технолог І. М. Сливканич, начальник сушильного господарства Я. П. Телепанич, завідувач кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України, д.т.н., професор Я. І. Соколовський склали цей акт про прийняття від аспіранта кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України Левкович М. В., таких практичних результатів дисертаційної роботи:

- програмно-алгоритмічний комплекс скінченно-різницевого розрахунку тепло-масообмінних та деформаційно-релаксаційних процесів під час сушіння деревини з урахуванням ефекту "пам'яті" матеріалу;
- алгоритм ідентифікації параметрів дробово-диференціальних операторів для реологічних моделей за експериментальними даними повзучості для різних порід деревини з урахуванням її фрактальної структури.

Комісія ознайомила із роботою програмного забезпечення, що розроблене М. В. Левкович, яке дає можливість обчислити значення температури, вологовмісту та компонент напружено-деформівного стану деревини з урахуванням ефекту "пам'яті" та самоорганізації. Також комісією було розглянуто алгоритм ідентифікації фрактальних параметрів, що дає можливість краще описати та дослідити деформаційно-релаксаційні процеси під час сушіння капілярно-пористих матеріалів.

Розроблене програмне забезпечення дозволяє вирішувати наступні задачі для ведення технологічного процесу сушіння деревини:

- за заданими початковими значеннями температури та вологості деревини, агента процесу сушіння та обчислених коефіцієнтів ядер повзучості та релаксації, обчислити значення температури і вологи, а також компонент



релаксації, обчислити значення температури і вологи, а також компонент напружено-деформівного стану деревини з врахуванням таких властивостей матеріалу як біологічна мінливість реологічних властивостей, структурна неоднорідність, самоорганізація та ефекти “пам’яті” у процесі конвективного сушіння;

- за експериментальними даними повзучості деревини визначити такий напружено-деформаційний стан, який би мав не перевищувати границю міцності матеріалу та підвищувати його якості у процесі сушіння деревини враховуючи її складну фрактальну структуру.

Використання програмного забезпечення для обчислення напружено-деформівного стану у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів з врахуванням ефекту “пам’яті” та самоорганізації, дозволяє оцінити залишкові та пружні значення напруження, що виникають під час даного технологічного процесу та визначити такі параметри сушильної камери, які забезпечуть необхідну якість висушеного матеріалу. Алгоритм ідентифікації не цілочисельних та структурних параметрів в’язко-пружних моделей дозволяє досліджувати та розробляти нові композитні матеріали на основі деревини.

Розглянувши результати роботи програмного забезпечення, алгоритм ідентифікації параметрів моделей з урахуванням фрактальної структури матеріалу та практичні рекомендації щодо застосування їх у технологічному процесі, комісія встановила:

- Розроблене програмне забезпечення у вигляді пакету прикладних програм із графічним інтерфейсом для введення вхідних параметрів технологічного процесу дозволяє обчислити з прийнятною точністю значення температури та вологовмісту, величин компонент напружень та деформацій у деревині під час сушіння та отримати візуалізацію результатів досліджень;
- Розроблений алгоритм ідентифікації фрактальних параметрів реологічних моделей в’язко-пружної деформації за експериментальними даними повзучості деревини дозволяє отримати множину значень параметрів моделей у процесі сушіння.

**Висновок:** Вважаємо, що передані для впровадження програмне забезпечення для скінченно-різницевого розрахунку деформаційно-релаксаційних та тепломасообмінних процесів та алгоритм ідентифікації фрактальних параметрів під час сушіння капілярно-пористих матеріалів до котрих відноситься деревина, враховуючи ефекти “пам’яті”, просторової не локальності та мінливості реологічних властивостей матеріалу дають змогу

підвищити якість висушеної деревини за рахунок прогнозування залишкових значень напружень, розроблення композитних матеріалів на основі деревини.

Акт складений для пред'явлення до спеціалізованої вченої ради із захисту дисертацій і не є підставою для фінансових розрахунків.

Складений у трьох примірниках:

1-й примірник: ВКФ "Ледас-Україна"

2-й примірник – кафедрі інформаційних технологій, Національного університету України

3-й примірник – аспіранту Левкович М. В.

Директор  
ВКФ "Ледас-Україна"

  
В. В. Карпенко

Головний технолог  
ВКФ "Ледас-Україна"

  
І. М. Сливканич

Начальник сушильного господарства  
ВКФ "Ледас-Україна"

  
Я. П. Телепанич

Завідувач кафедри ІТ  
НЛТУ України, д.т.н., професор

  
Я. І. Соколовський