ДМИТРІВ І. В.

АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ. ТЕОРІЯ І ПРАКТИКА НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ „ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

ДМИТРІВ І. В.

АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ. ТЕОРІЯ І ПРАКТИКА НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ЛЬВІВ
СПОЛОМ
2019

УДК 519.242.7
ДМ 53

Рекомендовано до друку (гриф) Науково-методичною радою Національного університету „Львівська політехніка” Міністерства освіти і науки України (протокол № 42 від 23.05.2019 р.)

Рецензенти:

М. В. Брагінець, доктор технічних наук, професор (професор кафедри технічних систем і технологій тваринництва ім.. Б.П. Шабельника, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім.. Петра Василенка);

І. М. Зінь, доктор технічних наук, професор (завідувач відділу фізико-хімічних методів протикорозійного захисту металів Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України);

Б. І. Кіндрацький, доктор технічних наук, професор (завідувач кафедри експлуатації та ремонту автомобільної техніки, Національний університет „Львівська політехніка”);

Дмитрів, Ігор Васильович.

Автомобільний транспорт. Теорія і практика наукових досліджень: навч. посібн. / І.В. Дмитрів ; Національний університет „Львівська політехніка”. – Львів : СПОЛОМ, 2019. – 316 с. : рис., табл. – Бібліогр. : с. 310-317 (59 назв).

Висвітлено питання теорії планування факторного експерименту та програмно-апаратного забезпечення наукових досліджень. Розглянуто методи побудови математичних моделей технічного об’єкта, розв’язку дисперсійного, кореляційного та регресійного аналізу. Наведено теорію оброблення результатів багатофакторного експерименту з використанням програмного пакету STATISTICA. Розглянуто сучасні аналого-цифрові перетворювачі, мікропроцесори та приклади практичної реалізації вимірювальних стендів на їх основі.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за освітнім ступенем „Магістр” спеціальностей 274 – „Автомобільний транспорт” та 133 – „Галузеве машинобудування”.

ISBN 978-966-919-507-4

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна “Теорія та технологія наукових досліджень” спрямована на забезпечення підготовки висококваліфікованих інженерів-дослідників та формування у них сучасний інструментарій планування, виконання та оброблення результатів експериментальних досліджень. Головним завданням дисципліни є вивчення сучасних методів досліджень, оптимізації технічних процесів і багатофакторного планування експериментальних досліджень щодо проблем механізації й автоматизації технологічних процесів в АПК.

Метою вивчення навчальної дисципліни “Теорія та практика наукових досліджень” є формування базових знань з основ застосування математичного апарату для розв’язання теоретичних і практичних задач, отримання знань щодо головних принципів і способів статистичного дослідження, планування і проведення факторних експериментальних досліджень і опрацювання їх результатів.

Внаслідок вивчення дисципліни студент повинен ***знати*** як методично правильно організувати виконання експериментальних досліджень, які потрібно досліджувати показники і в якій послідовності проводити експериментальні дослідження, яке для цього потрібне матеріально-технічне оснащення (вимірювальні прилади й апаратура), як вибрати та проаналізувати потрібну інформацію, сформувати завдання досліджень, обробити та узагальнювати наукову інформацію математичними моделями із використанням методів математичного моделювання та планування експерименту.

Студент повинен ***вміти*** вибрати об’єкт, обґрунтувати мету та завдання досліджень, підібрати вимірювальні прилади та апаратуру для зняття фіксованих параметрів, вивчити вплив різних факторів на досліджувані показники, обґрунтувати методику експериментальних досліджень та опрацювати одержані результати й описати їх у формі математичних моделей і графічних залежностей, проаналізувати і знайти оптимальні значення досліджуваних показників.

Формування цієї дисципліни передбачає традиційні питання прикладної механіки, теорії та побудови машин, тракторів і автомобілів, обладнання для механізації та автоматизації технологічних процесів, експлуатації МТП, автоматики й автоматизації, АСУ ТП, надійності та технічного сервісу, теорії імовірності та математичної статистики, математичної теорії планування експериментів, теорії оптимізації систем та прийняття інженерних рішень.

1 ПРИНЦИПИ І МЕТОДИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

1.1 Поняття наукових досліджень

Наукове дослідження – цілеспрямоване вивчення, кінцевим результатом якого є одержання системи законів, моделей, теорії для розв'язання окресленої перед дослідником проблеми.

Загально прийнята структура наукового дослідження подана на рис. 1.1.

Формування **теми наукового дослідження** вимагає проведення всебічного аналізу стану проблеми, у межах якої буде проводитись дослідження.

До теми висунуто такі вимоги: актуальність, важливість, тобто вимагає невідкладного розв'язання, наявність наукової новизни та ефективне практичне застосування.

Тема повинна відповідати профілю наукового колективу, мати матеріально-технічне забезпечення і кадри для її виконання.

Розглянемо кілька прикладів наукових тем:

– „Обґрунтування режиму роботи і конструкційно-технологічних параметрів адаптивного пневмоелектромагнітного пульсатора доїльного апарата" – *тема успішно захищеної дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук, спеціальність 05.05.11 – „Машини і засоби механізації сільськогосподарського виробництва"*;

– **„Обґрунтування параметрів пневмоелектромагнітного пульсатора попарної дії доїльного апарата”** – *тема успішно захищеної дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук, спеціальність 05.05.11 – „Машини і засоби механізації сільськогосподарського виробництва”*;

– **„Обґрунтування конструкційних параметрів і режимних характеристик молокопровідної лінії доїльної установки”** – *тема успішно захищеної дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук, спеціальність 05.05.11 – „Машини і засоби механізації сільськогосподарського виробництва”*;

– **„Удосконалення параметрів ґрунтообробних сферичних дискових робочих органів з нахиленою віссю обертання”** – *тема успішно захищеної дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук, спеціальність 05.05.11 – „Машини і засоби механізації сільськогосподарського виробництва”*;

– **„Механіко-технологічні основи підвищення ефективності доїльних установок”** – *тема успішно захищеної дисертації на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук, спеціальність 05.05.11 – „Машини і засоби механізації сільськогосподарського виробництва”*;

Після вибору об’єкта досліджень потрібно встановити параметри, які підлягають вивченню. Через відсутність у літературі достатніх відомостей про питання, що вивчається, або за наявності суперечливої інформації, для правильної постановки задач потрібно провести попередні спостереження чи досліди (пошуковий експеримент).

Мета наукового дослідження – визначення конкретного об'єкта, всебічне вивчення його структури, характеристик, зв'язків на підставі наукових принципів і методів пізнання.

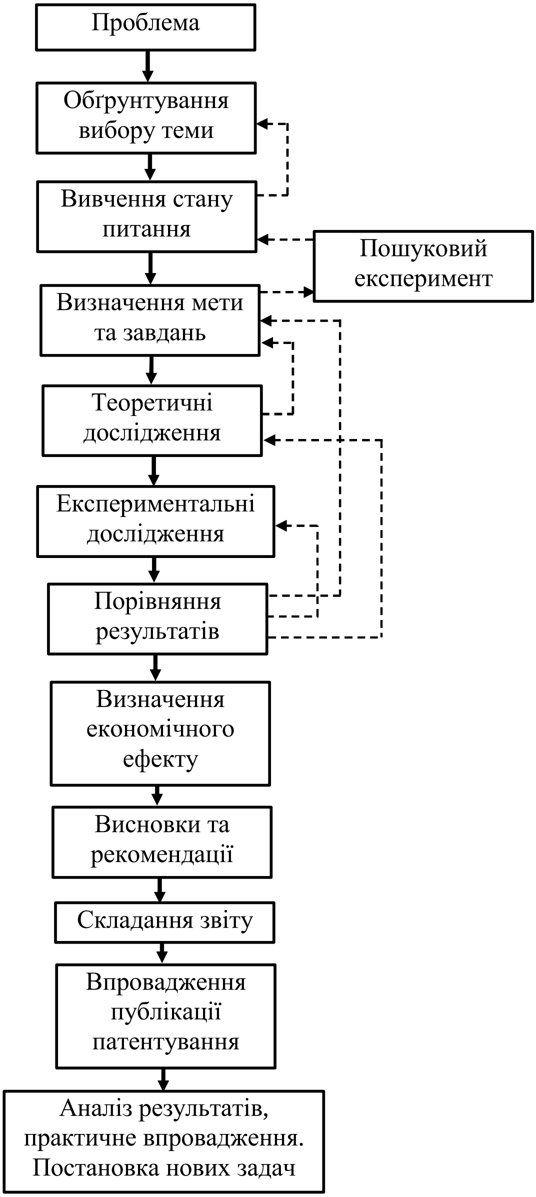


Рис. 1.1. Загальна структура наукового дослідження

Розглянемо кілька прикладів сформованої мети наукового дослідження:

– підвищення ефективності машинного доїння корів шляхом обґрунтування режиму роботи і конструкційно-технологічних параметрів адаптивного пневмоелектромагнітного пульсатора доїльного апарата, який забезпечує регулювання часових характеристик перехідних процесів роботи доїльного стакана;

– підвищення ефективності машинного доїння корів шляхом обґрунтування конструкційно-технологічних параметрів пневмоелектромагнітного пульсатора попарної дії;

– стабілізація режимних параметрів під час машинного доїння корів з максимальним збереженням вихідних якостей молока завдяки розробці доїльної установки з централізованою подачею повітря у молокопровідну лінію, оптимізації робочих характеристик досліджуваної технічної системи;

– підвищення ефективності роботи та скорочення питомих витрат енергії ґрунтообробних знарядь зі сферичними дисковими робочими органами (СДРО) з нахиленою віссю обертання.

Об'єкт наукового дослідження – частина матеріального світу – конкретний предмет або явище, на які спрямована наукова діяльність дослідника для пізнання його суті, закономірностей розвитку і можливостей використання у практичній діяльності. Процес вибору об'єкта дослідження складний, оскільки значно впливає на цілеспрямованість і результативність наукового дослідження загалом.

Розглянемо кілька прикладів правильно сформованого об’єкта наукового дослідження:

– технологічний процес роботи доїльного апарата з адаптивним пневмоелектромагнітним пульсатором та адаптивний пневмоелектромагнітний пульсатор;

– технологічний процес роботи доїльного апарата з пневмоелектромагнітним пульсатором попарної дії та пневмоелектромагнітний пульсатор попарної дії;

– процес машинного доїння корів з централізованою подачею повітря у молокоповітряну лінію доїльної установки;

– технологічний процес взаємодії СДРО з ґрунтом, їх параметри та режими роботи.

Аналітичний огляд, як частина наукового дослідження, потрібний для того, щоб установити, що вже зроблено у світовій науці у запропонованій до розробки тематиці, які питання залишилися нерозв'язаними чи недостатньо зрозумілими, і який прогнозований ефект може бути досягнутий з розв'язанням цих питань. Бажано також вияснити причини, які призвели до існуючого положення у цій ділянці дослідження (відсутність технічних можливостей для виконання відповідних робіт, або помилки попередніх досліджень). Результатами аналітичного огляду повинні бути висновки, в яких подано короткий підсумок стану сучасних знань щодо теми дослідження, уточнено мету, сформульовано часткові завдання. Завдання дослідження повинні бути чітко сформульовані у вигляді кількох вузлових питань з використанням науково-технічної термінології. Отже основою огляду повинен бути критичний аналіз стану питання, а не перерахування відомостей, отриманих з джерел інформації.

Після отримання в аналітичному огляді даних можна перейти до теоретичного дослідження, яке вимагає, зазвичай, експериментальної перевірки. Для формулювання заключних висновків і рекомендацій порівнюють результати теоретичних і експериментальних досліджень, встановлюють економічний ефект, який очікується від впровадження у практику пропозицій і рекомендацій. Заключний етап роботи, яка досліджується – складання звіту, його рецензування і обговорення. Після цього нові наукові та практичні результати можуть бути оформлені для публікації в наукових виданнях, патен-тування, впровадження у виробництво.

Склад звіту такий:

- вступ;

- характеристика (опис) об'єкта дослідження;
- історія питання і його сучасний стан;
- аналітичний огляд наукових розробок з цього питання;
- конкретна мета і завдання дослідження; методи дослідження;
- теоретичні дослідження об'єкта;
- технічні засоби і методика проведення, обробки експериментальних досліджень і даних;
- результати експериментальних досліджень та їх порівняння з теоретичними даними;
- аналіз і синтез результатів досліджень;
- висновки і рекомендації;
- перелік використаної літератури.

1.2 Методи проведення досліджень

На вибір методики наукових досліджень впливають: предмет досліджень, мета і завдання дослідження, наявні технічні та економічні можливості.

Методика проведення експериментальних досліджень має давати відповіді не лише на питання, як буде здійснюватися підготовка та проведення досліджень, але й як будуть опрацьовуватись та аналізуватись отримані результати.

Розробка методики проведення експериментальних досліджень є досить складним завданням. Існують також типові методики досліджень для розв’язання завдань, що часто зустрічаються. Існують міжнародні та державні стандарти для методів сертифікаційних випробувань, під час яких визначають головні характеристики автомобільних двигунів (потужність, економічність, токсичність)

Кожний вид людської діяльності передбачає використання деяких прийомів, способів, операцій для досягнення окресленої мети. Специфічні прийоми та способи використовуються також під час наукових досліджень. Сукупність цих прийомів визначають поняттям „**метод**".

Загалом **метод** – спосіб пізнання, дослідження явищ та природи і суспільного життя. Це також сукупність прийомів чи операцій практичного або теоретичного освоєння дійсності, підпорядкованих розв'язанню конкретного завдання. Різниця між методом та теорією має функціональний характер: формуючись як теоретичний результат попереднього дослідження, метод є вихідним пунктом та умовою майбутніх досліджень.

Метод дослідження – це сукупність способів і прийомів дослідження, застосування яких дає змогу отримати практичні результати у пізнанні. Метод дослідження відповідає на питання: як і яким шляхом проводити дослідження, визначає потрібне обладнання, кількість дослідів, план роботи, витрати часу і матеріальних ресурсів.

Методика – система методів послідовного і найефективнішого проведення досліджень.

Залежно від конкретного змісту досліджень методи можуть бути загальними, частковими, теоретичними, експериментальними та експериментально-теоретичними.

Загальні методи бувають універсальними і конкретно-науковими. У прикладних науках широко використовується загальнонауковий гіпотетичний метод, який ґрунтується на доведенні гіпотез. До конкретно-наукових методів належать методи формалізації, подібності, принцип розмірності і цілий ряд інших.

Теоретичні методи – комплекс логічних побудов, які ґрунтуються на визначених постулатах або гіпотезах.

Основний зміст теоретичних досліджень у технічних науках:

– вивчення фізичної природи об'єктів, які досліджуються, явищ і процесів;

– побудова принципових схем об'єктів, які досліджуються і схем технологічних процесів;

– побудова еквівалентних схем об'єктів, які досліджуються;

– побудова розрахункових моделей функціонування об'єктів дослідження;

– визначення параметрів об'єктів, які досліджуються.

Загальні теоретичні методи підрозділяються на аналітичні, імовірно-статистичні та методи системного аналізу.

Аналітичний метод (механіко-математичний) ґрунтується на головних фізичних (механічних) законах і встановлює математичну залежність між параметрами моделі об'єкта дослідження.

Цей метод дає змогу глибоко і всебічно вивчити процеси, які досліджуються, встановити точні кількісні зв'язки між аргументами і функціями. Основний аналітичний метод, який використовується у прикладних технічних науках – це метод формалізації. Варто також виділити методи аналогії і подібності, а також принцип розмірностей.

Імовірно-статистичні методи застосовують для дослідження процесів і явищ з безперервно змінною обстановкою. Ці методи ґрунтуються на випадкових подіях і як основний математичний апарат використовують теорію імовірностей. До цього класу теоретичних методів дослідження належать методи теорії надійності технічних систем і масового обслуговування, а також метод Монте-Карло.

Під **системним аналізом** розуміють сукупність прийомів і методів для вивчення складних об'єктів, для оптимізації процесів і керування динамічними системами. Основні методи системного аналізу – методи варіаційного числення, принцип максимуму, методи теорій розкладів.

Суть **методу формалізації** полягає у тому, що об'єкт дослідження розділяється на окремі елементи і між ними, за допомогою математичних виразів, встановлюють функціональні зв'язки. При цьому математичні операції виконуються у визначеному порядку.

Щодо механічних систем метод формалізації складається із таких етапів:

• складається спряжена розрахункова схема машини, робочого обладнання або технологічного процесу;

• на основі розрахункової схеми будується теоретична модель функціонування об'єкта;

• розв'язується задача аналізу і визначаються параметри об'єктів, які досліджуються;

• інтерпретуються результати досліджень.

Кожен з методів, попри споріднені особливості, використовує специфічний інструментарій.

Найхарактерніша особливість емпіричних досліджень полягає у пізнанні феноменів, їх зв'язків і відношень завдяки безпосередньому з'ясуванню їх параметрів.

Спостереження – метод пізнання дійсності, який ґрунтується на безпосередньому сприйнятті процесів, явищ, об'єктів за допомогою органів чуття, без втручання в їх буття дослідника.

Використання цього методу збагачує науку фактами безпосередньої дійсності. Полягає він у цілеспрямованому вивченні предметів із використанням таких чуттєвих властивостей людини як відчуття, сприйняття, уявлення предметів і явищ дійсності. Спостереження дає знання про зовнішні аспекти і властивості об'єкта. Пізнавальними результатами спостереження є опис мовними засобами предметів і явищ, а також схеми, таблиці, графіки, рисунки, діаграми тощо.

Результати спостережень виражають за допомогою якісних і порівняльних понять. Якісні поняття характеризують різні властивості предметів, завдяки яким їх залучають до певного класу. Дослідження нових сфер починаються із формулювання якісних понять, за допомогою яких класифікують предмети сфери дослідження, посилаючись на результати спостережень.

Вимірювання – метод подання властивостей реальних об'єктів у вигляді числової величини. Процес вимірювання полягає у встановленні величини об'єкта, явища, процесу в порівнянні цієї величини з одиницею вимірювання. Для розвитку емпіричного пізнання вимірювання є його вищим і досконалішим способом. Перехід від спостереження до вимірювання вимагає відповідних приладів та інструментарію, нових понять і припущень.

Порівняння – метод пізнання дійсності, покликаний встановити спільні й відмінні параметри між процесами, явищами, об'єктами. Основу цього методу складає порівняння окремих параметрів або сукупних ознак досліджуваних об'єктів, встановлення відмінностей і подібностей між ними.

Широко використовують порівняння для систематизації й класифікації понять, адже це дає змогу порівняти невідоме з відомим, пояснити нове через вже наявні поняття і категорії. Роль порівняння в пізнанні не варто переоцінювати, оскільки воно, зазвичай, має поверховий характер, відображаючи лише перші етапи дослідження. Водночас порівняння є передумовою для проведення аналогії. У XIX ст. було сформовано порівняльно-історичний метод, який головну увагу звертав на історичні аспекти (походження, розвиток) схожих та неоднакових ознак тощо.

Експеримент – метод пізнання об'єктивної дійсності завдяки науково організованому досліду, ініціюванню процесів, явищ. Суть цього методу полягає в ініціюванні дослідником процесів і явищ, до яких він має науковий інтерес. Він дає змогу з'ясувати конкретні особливості об'єкта наукового інтересу за певних важливих для дослідника умов, які можуть бути як штатними, так і штучно організованими, і дають змогу спрогнозувати його стан та поведінку в різних ситуаціях.

Суть емпіричних і теоретичних досліджень полягає у зорієнтованості на безпосередню дійсність й одночасному використанні абстрактних пізнавальних образів (уявлень, ідей, понять, концепцій), які стосуються цієї дійсності.

Абстрагування – це метод наукового дослідження, який полягає у мисленому виокремленні істотних ознак, аспектів, відношень предмета, процесу, явища. Часто досліднику доводиться із сукупності ознак, властивостей явища, процесу дійсності виокремлювати ті, що становлять для нього інтерес. Таку мислену процедуру називають абстрагуванням.

Процедурно це означає проникнення мислення дослідника вглиб об'єкта, з'ясування його суті, своєрідне його розчленування задля пізнання найістотнішого.

Аналіз і синтез – ці два мислені процеси органічно взаємопов'язані і взаємозумовлені.

Аналіз – метод мисленого або практичного розчленування цілого на частини. Аналіз полягає в розкладанні об'єкта, який досліджується, на складові частини, з'ясуванні тенденцій розвитку і способів функціонування з метою їх відносно самостійного вивчення. Він є засобом осягнення об'єкта лише тоді, коли виокремлює найсуттєвіше в об'єкті. Аналіз формує в дослідника здатність до структурування об'єкта дослідження, до визначення його складових без взаємодії з ним шляхом логічної абстракції. Відіграючи велику роль у пізнанні, аналіз, однак, не дає конкретного знання, тобто знання як єдності різноманітного. Це завдання виконує синтез, який є протилежною дією в мисленні.

Синтез – метод об'єднання раніше відокремлених частин у ціле, в якому протиріччя і протилежність послаблюються чи знімаються.

Особливість методів індукції та дедукції полягає у переході знання про одиничне й окреме у знання про загальне і навпаки.

Індукція – метод пізнання, згідно з яким на основі висновків про часткове роблять висновки про загальне. Цей метод часто застосовують для перевірки гіпотез (припущень). Індукція може бути повною, якщо на підставі властивостей елемента, який належить до окремого класу, роблять висновок про наявність аналогічних властивостей у всіх елементів цього класу. За неповної індукції роблять висновок про наявність усіх властивостей в елементів цього класу на підставі наявності лише деяких властивостей елементів цього класу. Індукція нерозривно пов'язана з дедукцією.

Дедукція – метод пізнання, заснований на висновках від загального до часткового (особливого). Реалізується вона як виведення певних тверджень (вірогідних висновків) на основі вихідних положень. Відповідно теорії називають дедуктивними.

Якщо недоліком індукції є неможливість за її допомогою чітко обґрунтувати загальне, адже розглядається лише частина сукупності, то недоліком дедукції вважають неможливість чіткого обґрунтування загальної передумови.

Аналогія – метод пізнання, заснований на перенесенні однієї або кількох характеристик із відомого явища на невідоме. Суттєвою особливістю цього методу пізнання вважають конструювання висновків про можливу подібність предметів за одними ознаками на підставі їх подібності за іншими ознаками.

Моделювання – метод пізнання явищ і процесів, що ґрунтується на заміні, теоретичній чи експериментальній, об'єкта досліджень (оригіналу) подібним на нього (моделлю). Застосовують цей метод пізнання, якщо безпосереднє вивчення предметів, процесів, явищ неможливе або недоцільне.

Особливість теоретичного дослідження полягає у використанні абстрактних уявлень, ідей, положень, концепцій, які безпосередньо стосуються процесу практичного пізнання.

Системний метод. Ґрунтується на ідеї про те, що навколишня дійсність є єдиним цілим, речі і явища пов'язані одне з одним багатьма відношеннями. Системному методу властивий розгляд деякої сукупності об'єктів (матеріальних або ідеальних), у процесі якого з'ясовується, що їх взаємозв'язок і взаємодія спричинюють виникнення нових інтегративних властивостей системи, відсутніх у її складових. У кожному конкретному випадку для характеристики системи потрібно виявити механізм, за допомогою якого здійснюється взаємодія між елементами системних властивостей. Для появи ринку потрібен систематичний обмін товарами, який супроводжується встановленням регулятивного цінового механізму.

Кожна система взаємодіє з тілами, явищами і подіями, які оточують її, і певним чином впливають на перебіг процесів у ній. Тому дослідження системи буде неповним без урахування її зовнішнього середовища. Часто вплив цього середовища буває настільки істотним, що еволюцію системи потрібно розглядати в тісному зв'язку з еволюцією самого середовища.

Системи класифікують за різними ознаками. Наприклад, розрізняють системи матеріальні та ідеальні. До матеріальних належать системи живої і неживої природи й соціальні системи, які існують незалежно від суб'єкта. Ідеальні системи відносно правильно відображають властивості і закономірності об'єктивно існуючих у природі й суспільстві матеріальних систем. Типовим прикладом ідеальної системи є наукова теорія, яка дає цілісне відображення конкретної галузі об'єктивного світу.

З погляду взаємодії з навколишнім середовищем системи можуть бути відкритими і закритими.

Прогнозування – сукупність засобів і прийомів мислення, що дають змогу на підставі аналізу ретроспективних, екзогенних (зовнішніх) та ендогенних (внутрішніх) даних, а також їх змін у деякому періоді часу вивести судження достовірності щодо майбутнього розвитку об'єкта. Як метод наукового пізнання він полягає у передбаченні майбутнього етапу процесу, явища, предмета на підставі аналізу його минулого і сучасного.

Методи прогнозування класифікують за різними ознаками. До найважливіших належать ступінь формалізації, загальний принцип дії, засіб отримання прогнозної інформації.

Дисперсійний аналіз. Користуються цим методом для оцінювання впливу різних факторів на результат експерименту, планування аналогічних експериментів. Започаткований він англійським математиком Р. Фішером для обробки результатів агрономічних дослідів, метою яких було з'ясування умов отримання максимального врожаю різних сортів сільськогосподарських культур. Сам термін "дисперсійний аналіз" було застосовано пізніше.

За кількістю факторів, вплив яких досліджується, розрізняють однофакторний і багатофакторний дисперсійний аналіз.

Кореляція та регресія. Застосування цих методів спричинене потребою розглядати природні та суспільні явища у взаємозв'язку і постійній зміні. Поняття „кореляція" (лат. ***correlatio*** – співвідношення, взаємозв'язок) і „регресія" (лат. ***regressio*** – рух назад) були запроваджені у науковий вжиток в середині XIX ст.

Суть методу кореляції полягає у встановленні кореляційної залежності між двома змінними величинами, яка виявляє себе як функціональна залежність між значеннями однієї з них і умовним математичним очікуванням іншої.

Регресійним аналізом називають встановлення форми залежності між змінними, оцінювання функції регресії, невідомих значень (прогноз значень) залежної змінної.

Наприклад, явище „регресії до середнього" відкрив Ф. Гальтон в процесі вивчення залежності між зростом батьків і їхніх дітей, переконавшись, що зріст дітей, які народилися у дуже високих батьків, має тенденцію наближення до середньої величини.

Факторний аналіз. Головним його завданням є перехід від первинної системи багатьох взаємопов'язаних факторів X_1, X_2,...X_m до відносно малої кількості латентних (прихованих) факторів F_1, F_2, F_k, $k<m$. Наприклад, продуктивність праці на підприємствах залежить від багатьох взаємопов'язаних факторів (рівня освіченості робітників, коефіцієнта зміни обладнання, електрифікації праці, термінів експлуатації обладнання тощо). Факторний аналіз дає змогу встановити вплив на динаміку продуктивності праці узагальнених факторів (наприклад, розміру підприємства, рівня організації праці, характеру продукції), які безпосередньо не спостерігались.

Кластерний аналіз. Цей метод передбачає розподіл деякої сукупності об'єктів на групи "схожих" об'єктів, які називають кластерами так, щоб об'єкти одного класу перебували "близько" один до одного, а об'єкти різних класів – на відносно віддалених відстанях.

Існують й інші спеціальні методи наукових досліджень. В науці найчастіше використовують математичні моделі й методи, спрямовані на формалізацію складних технічних процесів і взаємозв'язків, надання їм кількісного виразу через відповідні параметри. Будь-яке наукове дослідження, як і наука загалом, спирається на теорію, факти і методи досліджень. Цим обумовлена роль методології і методів наукових досліджень у пізнанні навколишньої дійсності.

1.3 Структура задач досліджень та стадії їх розв’язку

Дослідження робочих процесів має на меті їх вдосконалення, спрямоване на підвищення продуктивності машин.

Робочі органи машин мають просторовий характер взаємодії з різними матеріалами. Залежно від характеру процесу та умов взаємодії властивості матеріалу можуть бути визначальними чи незначними. Наприклад, зміна густини під дією зовнішнього навантаження має незначний вплив на процес їх руйнування, тому під час побудови відповідних аналітичних моделей нею нехтують.

У більшості випадків реальні матеріали моделюють поняттям суцільних середовищ, властивості яких вважають незмінними для об'ємів з нескінченно малими розмірами, для яких справджуються всі закони механіки.

Мета аналітичного дослідження – знайти залежності цих характеристик від параметрів, що визначають процеси, наприклад, форми та розміри робочого органу, властивості оброблюваного матеріалу, режим виконуваної роботи.

Оптимізація пошукових характеристик за заданими критеріями і дає змогу визначити потрібні умови проходження процесу.

Дослідників цікавить, головно, визначення таких умов, які забезпечували б проходження процесу із заданими вимогами до якості обробки матеріалів з мінімальними енергетичними затратами.

Тому найважливішими є завдання пошуку теоретичної залежності сили (енергії, потужності), реалізованої на робочому органі машини, від властивостей оброблюваного матеріалу, режиму роботи, розмірів та форми робочого органа.

Методологію такого пошуку визначає рівень знань про механізм процесу та явищ, які його супроводять, специфіка розв'язуваних задач, ступінь механіко-математичної підготовки дослідника.

Теоретичні дослідження робочих процесів машин – це дослідження, проведені на основі законів фізики, механіки та інших наук з використанням математичного апарату і графічних побудов.

Структура теоретичних досліджень: аналіз фізичної суті процесів та явищ, формування робочої гіпотези, розробка (побудова) фізичної моделі явища чи процесу, побудові математичної моделі та симуляційний експеримент.

Якщо неможлива формалізація моделі до математичного рівня, то використовується словесна форма гіпотез, таблиці, графіки, схеми та діаграми – тобто все, що може виразити хоча б якісні відношення між істотними факторами задачі.

З логіко-психологічного погляду, задача – це ін форма-ційна система, яка складається з неузгоджених, суперечливих між собою інформаційних підсистем, відношення між якими вимагають перетворень цих підсистем для усунення протиріч.

Структура науково-технічної задачі передбачає підсистему умов і вимог.

Умови – це частина інформаційної системи, що є підста-вою для дій (перетворень) щодо розв’язання суперечностей.

Вимоги – це підсистема, в якій формулюється мета, досягнення якої забезпечується усуненням суперечностей між головними підсистемами.

Вимоги і умови можуть бути вихідними, залученими і шуканими.

Вихідні умови – формулюються у первісному вигляді задачі (початкові дані). Якщо цих умов замало для розв'язку, то дослідник вимушений залучати нові дані, які називають залученими.

Шукані дані або шукані умови – це залучені умови, які визначають у процесі розв'язку задачі.

Розв'язком задачі є усунення багатократного зіткнення головних суперечностей підсистем умов і вимог.

Існує шість **стадій теоретичних досліджень** (стадії розв'язку теоретичних задач).

1. **Оперативна стадія** – починається з аналізу можливості розв'язку задачі, а також з пошуку відповідей на питання:

– як розв'язують подібні задачі в інших випадках;

– як розв'язують задачі, обернені до цього типу в природі (пошук природних аналогів).

2. **Синтетична стадія**. На цій стадії виявляють вплив змін одних частин системи на інші, визначаються потрібні зміни інших об'єктів, що функціонують разом з даним, оцінюється можливість використання зміненого об'єкта за новим призначенням, а знайденої ідеї – для розв'язку інших задач.

Перші дві стадії підготовчі для реалізації третьої.

3. **Постановка задачі.** Формулюється кінцева мета, виявляється змога її досягнення "обхідними" шляхами, визначається найефективніший шлях розв'язання задачі та визначаються потрібні кількісні показники. У разі потреби уточнюються вимоги щодо умов практичної реалізації результатів розв'язку задачі.

Перетворення початково неоформленої, нечіткої думки про суть задачі у чітко сформульовану набагато полегшує її розв'язання.

4. **Аналітична стадія.** Означення ідеального кінцевого результату в найсприятливішому разі щодо розв'язку задачі, виявлення перешкод, які заважають отриманню ідеального кінцевого результату.

5. **Розв'язок задачі.** Тут головними є логічні методи, правила і процедури формальних перетворень, критерії внутрішньої несуперечливості, незалежності умов, правильно сформульованої системи аксіом, гіпотез чи обмежень, що випливають із загальних фізичних чи математичних законів.

Дуже важливою на цій стадії є додаткова емпірична інформація, чи така, що залучена з інших галузей знань.

Розв'язок теоретичних задач, зазвичай, має творчий характер у тому розумінні, що евристичні рішення є розривом у ланцюжку звичних уявлень про задачу і поглядом на неї ніби під іншим кутом зору, "зі сторони".

6. **Аналіз розв'язків.** Перевірка відповідності розв'язків умовам задачі і вияснення того, чи не є ці розв'язки результатом залучених умов, які суперечать початковим, чи в процесі розв'язку задачі не відбулося неявне переформулювання мети.

1.4 Необхідність планування експериментів

Експериментальні дослідження ведуться у всіх галузях науки й техніки. Мета цих експериментів – або встановити нові факти про досліджуване явище, або порівняти вплив різних умов на процес, що розглядається. Припустимо, наприклад, що інженера-металурга цікавлять ефекти двох різних процесів загартування алюмінієвого сплаву: у мастилі й солоній воді. Метою експерименту в цьому випадку є визначення охолоджувального середовища, яке забезпечує найбільшу твердість цього сплаву. Інженер приймає рішення загартувати кілька зразків сплаву в кожній з рідин і виміряти твердість зразків після загартування. Середня твердість зразків, оброблених у кожному з охолоджувальних середовищ, буде використана для визначення кращого з них.

Якщо задуматися над цим експериментом, то виникає низка важливих питань:

1. Чи ці дві рідини є єдиними охолоджувальними середовищами, що викликають інтерес?

2. Чи існують інші фактори, які можуть впливати на твердість і повинні досліджуватися або контролюватися в цьому експерименті?

3. Скільки зразків сплаву потрібно обробити в кожній з охолоджувальних рідин?

4. Як потрібно розподіляти зразки по охолоджувальних рідинах і в якому порядку збирати дані?

5. Який метод аналізу даних потрібно використати?

6. Яка різниця між середніми спостереженими твердостями для двох охолоджувальних середовищ буде вважатися важливою?

На всі ці питання потрібно дати задовільну відповідь ще до того, як буде проведено експеримент.

Результати будь-якого експерименту й висновки, які з них можна зробити, залежать великою мірою від того, яким чином збираються дані. Для ілюстрації цього положення припустимо, що інженер-металург в описаному вище експерименті використовував зразки з однієї партії нагрівання для обробки в мастилі, а з іншої партії – у солоній воді. Тепер при порівнянні середньої твердості інженер не може сказати, якою мірою отримана різниця зумовлена охолоджувальним середовищем, а якою – відмінностями, властивими партіям нагрівання. Отже метод збору даних несприятливо вплинув на висновки, які можна зробити із цього експерименту.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте визначення поняттю „наукове дослідження"?

2. Наведіть та проаналізуйте головні етапи наукового дослідження.

3. Що характеризує „мета" наукових досліджень? Наведіть приклад правильно сформованої мети досліджень.

4. Що характеризує „об'єкт" наукового дослідження? Наведіть приклад.

5. Проаналізуйте головні методи проведення досліджень.

6. Проаналізуйте головні методи проведення теоретичних

досліджень.

7. Поясніть призначення методів аналізу, синтезу і аналогії в наукових дослідженнях.

8. Наведіть приклади використання дисперсійного аналізу.

9. Яке призначення кореляційного та регресійного аналізу?

10. Яке призначення факторного аналізу?

11. Чим зумовлене планування експериментів?

2 МОДЕЛІ ОПИСУ ТЕХНІЧНИХ ОБ’ЄКТІВ

2.1 Загальні принципи та класифікація моделей

Важко сьогодні назвати галузь знань, вказати сферу людської діяльності, де б не застосовувалися чи не впроваджувалися методи математичного моделювання. Моделювання охоплює сферу соціально-економічних, міжнародних відносин, складні економічні, екологічні, технічні та технологічні системи, фізичні процеси та явища.

Моделювання – це заміщення одного об'єкта іншим з метою отримання інформації про найважливіші властивості об'єкта-оригіналу шляхом здійснення експериментів з об'єктом-моделлю.

Моделлю називається об’єкт, який у деяких відношеннях збігається з оригіналом, і є засобом подання, пояснення та/або прогнозування його поведінки.

Загалом за формою подання розрізняють **абстрактні** та **реальні** моделі.

Реальними моделями є об’єкти, які в тій чи іншій формі поєднують в собі об’єкти-оригінали. Прикладами таких моделей є масштабні моделі авіаційної, автомобільної техніки, призначеної для випробувань, макети архітектурних споруд, еквівалентні електричні схеми напівпровідникових приладів.

До **абстрактних (ідеальних) моделей** належать рівняння, формули, схеми, що описують різноманітні процеси та об’єкти.

Абстрактне уявлення про модель, здебільшого, асоціюється з технічними засобами, які застосовуються для створення відповідного „**еквівалента**” об'єкта дослідження, максимально адекватного йому, але практично більш зручнішого для розв'язання поставлених задач.

Прикладом такої моделі можна назвати **математичну модель гармонійних коливань**. Система, що складається з матеріальної точки масою m та абсолютно пружної пружини з коефіцієнтом жорсткості k, у якій можливі вільні коливання, називають **пружинним маятником**.

З фізики відомо, що диференціальне рівняння вільного коливання пружинного маятника має вигляд:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t), \tag{2.1}$$

де $x(t)$ – відхилення центра мас пружинного маятника від положення рівноваги в момент часу t;

m – маса маятника;

k – коефіцієнт пружності пружини;

$kx(t)$ – сила, яка діє на маятник з боку пружини.

Позначивши у рівнянні (2.1):

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \; x(t) = z$$

отримаємо рівняння вільних коливань у загальній формі:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0{}^2 z = 0. \tag{2.2}$$

Розглянемо вільні коливання в електричному контурі. Позначивши ємність конденсатора – C, заряд у момент часу t – $q(t)$, а індуктивність котушки – L, рівняння коливань в електричному контурі набуде вигляду:

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = 0. \tag{2.3}$$

Ввівши позначення:

$$\frac{1}{LC} = \omega_0{}^2, \quad q(t) = z$$

отримаємо в кінцевому випадку рівняння (2.2).

Рівняння (2.2), яке описує різні за природою коливальні процеси, є математичною моделлю гармонійних коливань. Ця модель є абстрактною математичною моделлю, оскільки з її побудовою отримується звичайне диференціальне рівняння.

Проте поняття моделі принципово і суттєво ширше: функції моделі може виконувати не тільки спеціально створений експериментальний пристрій, але й явище, яке спостерігається, і символічне (знакове) описання оригіналу (текстове описання, математичне рівняння, креслення, схема тощо), і уявний образ. Тому у загальному випадку модель – це явище, технічний засіб, або інший абстрактний образ, що перебуває у деякій відповідності (схожості, подібності) до об'єкта-оригіналу, який вивчається. Модель може замінити оригінал у процесі дослідження, надаючи про нього необхвжну інформацію.

Використання сучасних методів моделювання **зумовлено**:

- розширенням та поглибленням фундаментальних наукових досліджень в реальному фізичному світі;
- складністю досліджень довготривалих процесів (екологічних, хіміко- та біотехнологічних);
- об’єктивною неможливістю отримування потрібної інформації шляхом безпосереднього дослідження об’єкта-оригіналу (мікро- та макросвіт);
- неповнотою достовірних даних про фізичний об'єкт, що реально існує;
- складністю протікання реальних процесів та високою вартістю експериментальних досліджень об'єкта-оригіналу;
- наявністю критичних режимів функціонування об'єкта, коли дослідження в деяких межах зміни екзогенних параметрів можуть бути небезпечними, а результати досліджень неможливо прогнозувати (характерні для багатьох процесів і агрегатів енергетики, машинобудування та інших);
- відсутність потрібних умов, а іноді недостатньою кваліфікацією персоналу для дослідження об'єкта-оригіналу;
- необхідністю проведення значної кількості експериментів з наступним опрацюванням результатів та багатофакторною оптимізацією (у випадках, коли тривале дослідження реального об'єкта економічно недоцільне);
- відсутністю фізичного об'єкта (виготовлення знаходиться на стадії ескізного або конструкторського проекту, при створенні технічних об'єктів (машин і апаратів) з використанням математичного моделювання в системах автоматизованого проектування (САПР)).

Основними **властивостями** будь-якої моделі є:

- **скінченність** – модель відображає лише певні характеристики та відношення властиві оригіналу.

Скінченність зумовлена обмеженістю ресурсів, потрібних для розробки та аналізу моделі;

- **наближеність** – модель відображає наближено, з деякою точністю, характеристики та відношення, властиві оригіналу;

Типовими прикладами наближень, що використовуються в математичному моделюванні, є заміна дискретних систем неперервними, заміна нелінійних залежностей лінійними, обмеження точності чисельних розрахунків;

- **повнота** – ґрунтується на основі скінченності та наближеності моделі;

Ступінь повноти моделі визначається метою та завданням досліджень. Варто зазначити, що неповнота моделі не обов'язково є недоліком, оскільки немає сенсу будувати модель, яка є точним повторенням оригіналу. Важливо, щоб модель достатньо повно відтворювала лише ті риси об'єкта дослідження, що вивчаються, й ті його складові, зв'язки та зовнішні впливи, які можуть істотно впливати на них;

- **адекватність** – характеризує здатність моделі реалізувати мету і завдання моделювання;
- **істинність** – відповідність моделі сукупності наявних знань про об’єкт наукових досліджень.

Особливо інтенсивного розвитку сьогодні набуває математичне моделювання з використанням сучасних математичних методів та засобів обчислювальної техніки; це дає змогу не тільки досягти нових кількісних результатів, пов'язаних із значним пришвидшенням обчислювальних експериментів, але, найголовніше, приводить до автоматизації творчого процесу дослідника, звільнивши його від надмірного тягаря рутинних операцій.

Під час складання моделі здійснюється ідеалізація реального об'єкта, коли виділяються його головні (визначальні) і відкидаються другорядні характеристики (фактори). Кожній моделі характерні обмеження і припущення. Таким чином, всі математичні моделі ідеалізовані і наближено описують властивості об'єкта-оригіналу. Якість моделі оцінюється достовірністю отриманих на моделі прогнозів поведінки реального об'єкта. Причому одна із можливих моделей може бути більш адекватною, ніж інші у визначеному діапазоні зміни факторів, але менш точною в іншому діапазоні.

Достовірність математичної моделі передусім залежить від того, наскільки правильно (точно) вона відображає фізичну суть об'єкта дослідження, від прийнятих припущень, коректності вибраного математичного апарату. Тому результати теоретичного дослідження, зазвичай, вимагають експериментальної перевірки. Достовірна оцінка ефективності (правильності) математичних моделей здійснюється під час порівняння експериментальних даних з результатами теоретичних розрахунків у всьому діапазоні припустимого практичного використання отриманих функціональних залежностей. Для цього найчастіше використовують методи графічної інтерпретації теоретичних залежностей з нанесенням на тих же графіках відповідних експериментальних даних, що дає змогу оцінити похибку математичної моделі.

Процес моделювання охоплює такі **основні етапи**:

- вивчення фізичної суті процесу, який досліджується;
- розробка розрахункової схеми;
- складання математичного опису;
- розв'язання рівнянь математичного опису;
- перевірка адекватності та ідентифікації моделі;
- вибір моделі (за наявності декількох моделей).

За **суттю** відповідності фізичної природи оригіналу і моделі моделювання може бути:

- **фізичним** – оригінал і модель відрізняються лише масштабами;
- **аналоговим** – фізична природа оригіналу і моделі різна, але параметри, що описують явища в оригіналі, та моделі зв'язані одними математичними співвідношеннями і між ними існує однозначна відповідність;
- **математичним** – фізичному оригіналу відповідають математичні конструкції (оператори).

Всі математичні моделі **поділяються на**:

– **аналітичні** (теоретичні), добре описують функціонування об'єкта за різних умов, але, зазвичай, досить складні;

– **емпіричні** (експериментальні), відносна простота отримання, але обмежені межі застосування.

Емпіричні поділяються на три типи: **регресійні**, **імовірнісні** та **імітаційні**.

Регресійні – результат безпосередніх експериментів.

Імовірнісні (стохастичні) – опис об'єктів за умов невизначеності.

Імітаційні – статистичний експеримент з використанням комп'ютера.

До того ж, усі моделі можуть бути умовно розділені на матеріальні і уявні. Фізичні моделі є об'єктами, що існують реально і створюються з реальних матеріалів. Вони представляють собою дійсне відтворення досліджуваного об'єкта.

Перший вид матеріальних моделей – геометрично подібні моделі. Прикладами таких моделей можуть бути макети різних машин та установок (макет теплової машини, біореактора, лабораторні установки технологічних ліній тощо). Вони використовуються у зменшеному масштабі найчастіше для того, щоб мати просторову уяву про об'єкт, компонування його елементів, правильно розмістити в просторі основні комунікації між елементами тощо.

Другий вид матеріальних моделей – фізично подібні моделі. Вони створюються з метою відтворення фізичних процесів, що вивчаються, їх кінетики та динаміки, різного виду зв'язків, виявлення найвагоміших фізичних закономірностей та функціональних залежностей. Наприклад, для вивчення гідродинамічних характеристик обтікання крила літака чи кузова автомобіля здійснюється серія досліджень в аеродинамічній трубі, продуваючи модель цього об'єкта, виконану заради економії коштів у зменшеному масштабі. В цьому разі найважливішим показником є фізична подібність процесів та конструктивних геометричних форм обтікання моделі та натурного зразка.

Третій вид матеріальних моделей – математично подібні моделі. Відомим прикладом таких моделей є аналогові моделі, побудовані на основі електрогідравлічних та електроакустичних аналогій. Зокрема, пульсуючий рух рідин чи газу в трубопроводах і коливальний процес, що супроводжується плинністю електричного струму в лінії, описується однаковими диференціальними рівняннями. Це дає змогу складні процеси транспортування рідин і газів вивчати за допомогою відповідних їх аналогів електричних моделей.

Уявні моделі існують в голові дослідника у вигляді деяких уявних образів, на папері, магнітних носіях у вигляді математичних формул, знаків, графіків, схем, таблиць тощо. Можна схематично виділити два головних види уявних моделей: знакові, образні та їх похідні – образно-знакові.

Образні моделі побудовані із чуттєво-наглядних ідеальних елементів, що використовуються для наближеного опису і схематизації фізичних процесів та явищ (пружні кульки і важелі, потоки ідеальної рідини та вихори, рух тіла по якійсь траєкторії, абсолютно чорні тіла, ідеальні кінетичні схеми хімічних та біологічних перетворень тощо). Прикладом таких моделей можуть слугувати часто використовувана в молекулярній фізиці уявна модель ідеального газу, коли молекули газу подають у вигляді пружних кульок; ідеальні кінетичні схеми експоненціального росту, які використовуються для схематизації біохімічних перетворень, ферментативних реакцій, процесій біосинтезу тощо.

Знакові моделі відрізняються повною відсутністю подібності між їх елементами і відповідними елементами досліджуваного об'єкту чи системи. Згадаймо розв'язок тривіальної задачі про зустріч двох потягів: Із міста ***A*** в місто ***B*** вийшов потяг...". Цю задачу схематично можна зобразити на папері у вигляді двох точок ***A*** і ***B*** та лінії між ними. Між точками ***A*** і ***B*** та містами немає ніякої схожості, а пряма лінія, що зображає шлях із міста в місто, не має жодної подібності з реальною залізною дорогою.

Одним із підвидів знакових моделей є математичні моделі. Математична модель фізичного об'єкта (системи, процесу) є сукупність математичних співвідношень (рівнянь, формул, графічних співвідношень, нерівностей), що пов'язують вихідні характеристики стану фізичного об'єкта з вхідною інформацією, початковими даними, геометричними (просторовими та іншими) обмеженнями, що накладаються на функціонування об'єкта.

Математична модель перебуває у деякій відповідності з фізичним об'єктом і здатна замінити його для того, щоб вивчення та дослідження моделі давало нову інформацію про поведінку об'єкта (механізм протікання процесів, динаміку, поведінку об'єкта як в минулому, так і в майбутньому тощо).

2.2 Класифікація видів подібності та моделей

З побудовою моделей часто виникає потреба у встановленні подібності між моделлю та оригіналом.

Поняття подібності було взято з геометрії. **Геометрична подібність** у найпростішому випадку подібності багатокутників полягає в тому, що багатокутники з однаковою кількістю сторін подібні, якщо в них відповідні кути рівні, а відповідні сторони – пропорційні.

Тобто, якщо

$$l_{1_A}, l_{2_A}, ..., l_{n_A}; \alpha_{1_A}, \alpha_{2_A}, ..., \alpha_{n_A}$$

– сторони й кути n-кутника A,

$$l_{1_B}, l_{2_B}, ..., l_{n_B}; \alpha_{1_B}, \alpha_{2_B}, ..., \alpha_{n_B}$$

– сторони й кути n-кутника B, то мають виконуватися такі співвідношення:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l_{1_A}}{l_{1_B}} = \frac{l_{2_A}}{l_{2_B}} = ... = \frac{l_{n_A}}{l_{n_B}} = m_l; \\ \frac{\alpha_{1_A}}{\alpha_{1_B}} = \frac{\alpha_{2_A}}{\alpha_{2_B}} = ... = \frac{\alpha_{n_A}}{\alpha_{n_B}} = m_\alpha = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Подібність, таким чином, означає існування деяких масштабних співвідношень типу (2.4) для параметрів відповідних елементів об'єктів, які порівнюються – багатокутників. Ці співвідношення визначають правила переходу від параметрів одного з об'єктів до відповідних параметрів іншого. Масштабні коефіцієнти (масштаби) m_1 і m_α, які характеризують пропорційність відповідних параметрів, у теорії подібності називають також *коефіцієнтами подібності*. У співвідношеннях (2.4) – це m_1 і m_α. Умови вигляду (2.4) можна сформулювати інакше, якщо ввести систему прямокутних координат *Oxy*: за геометричною подібністю всі координати x_{iA}, y_{iA} першого багатокутника пропорційні відповідним координатам x_{iB}, y_{iAB} другого багатокутника

$$\frac{x_{i_A}}{x_{i_B}} = m_x, \frac{y_{i_A}}{y_{i_B}} = m_y, m_x = m_y , \qquad (2.5)$$

де x_i і y_i – координати відповідних точок, які знаходяться на відрізках, що складають контури відповідного (*A* чи *B*) багатокутника.

Для геометричної подібності у тривимірному просторі до співвідношень (2.5) додається

$$\frac{z_{i_A}}{z_{i_B}} = m_z , \qquad (2.6)$$

і при цьому:

$$m_x = m_y = m_z$$

Афінна подібність. Подальшим розвитком і узагальненням поняття геометричної подібності є поняття ***афінної подібності***, за якою допускається нерівність масштабів по окремих координатах *x, y, z*. У цьому разі геометричні фігури чи тіла деформуються: круг перетворюється на еліпс, паралелепіпед з нерівними ребрами – на куб тощо. Для відповідних точок (x_{iA}, y_{iA}, z_{iA}) і (x_{iB}, y_{iB}, z_{iB}) за афінної подібності замість (2.5) і (2.6) будуть справедливими співвідношення:

$$\frac{x_{i_A}}{x_{i_B}} = m_x, \frac{y_{i_A}}{y_{i_B}} = m_y, \frac{z_{i_A}}{z_{i_B}} = m_z$$

і, наприклад, $m_x \neq m_y = m_z$.

Абсолютна подібність. Встановлення такої подібності дозволяє порівнювати між собою процеси в різних системах. Такі процеси є абсолютно подібними, якщо подібними є і процеси, і системи, у яких вони відбуваються. Пропорційність (2.7) відповідних параметрів систем і процесів у них можлива за m_i = const, m_i = var, $m_i = g(P_{i-r}, P_{i+k}, \ldots)$ тощо.

$$\frac{P_1}{R_1} = m_1, \frac{P_2}{R_2} = m_2, ..., \frac{P_n}{R_n} = m_n, \qquad (2.7)$$

Отже оригінал і його модель будуть абсолютно подібними, якщо подібними є системи, з яких вони складаються, а також процеси, які в них відбуваються.

Якщо і оригінал, і модель є матеріальними об’єктами, то вони за абсолютної подібності мають бути структурно і фізично ідентичними; різними в них можуть бути лише значення параметрів, які характеризують елементи структури оригіналу й моделі.

Абсолютна подібність на практиці значною мірою є абстрактним поняттям. Повною мірою вона реалізується лише під час математичного моделювання процесів. У цьому разі оригінал і модель описуються однаковими функціональними залежностями чи рівняннями, відповідні змінні в яких є пропорційними.

Практична подібність. Застосуванням теорії подібності в технічних задачах спричинює потребу введення практичної подібності. Розрізняють повну, неповну й наближену практичні подібності.

Повна практична подібність (або повна подібність) – це подібність протікання в часі й у просторі тільки тих процесів, які є суттєвими для даного дослідження і з достатньою повнотою характеризують явище, що вивчається, згідно з конкретною постановкою задачі дослідження.

Відповідно, якщо під час моделювання забезпечена повна практична подібність, то має місце **повне моделювання**.

Неповна практична подібність (або неповна подібність) – це подібність протікання процесів або тільки в часі, або тільки у просторі.

Цій подібності відповідає **неповне моделювання**.

Наближена практична подібність (або наближена подібність) характеризується існуванням спрощувальних припущень, які призводять до певної відмінності процесів, що розглядаються як подібні. Ця відмінність вважається припустимою на основі попередніх оцінок, які отримують під час додаткових досліджень. Цій подібності відповідає **наближене моделювання**. Воно, як і наближена подібність, також може бути як повним, так і неповним. Класифікацію типів моделювання наведено на рис. 2.1.

Існує багато різноманітних **класифікацій** математичних моделей. Зокрема, вирізняють моделі: статичні й динамічні, диференціальні й інтегральні, детерміновані та статистичні, лінійні та нелінійні, геометричні, топологічні, імітаційні, оптимізаційні тощо.

Статичні моделі характеризують конкретний стан об'єкта у заданий момент часу. Як правило, їх застосовують для подання стійких рівноважних чи стаціонарних станів систем, або таких нерівноваговагомих й нестаціонарних станів, змінюванням яких з часом під час дослідження або роботи системи можна знехтувати.

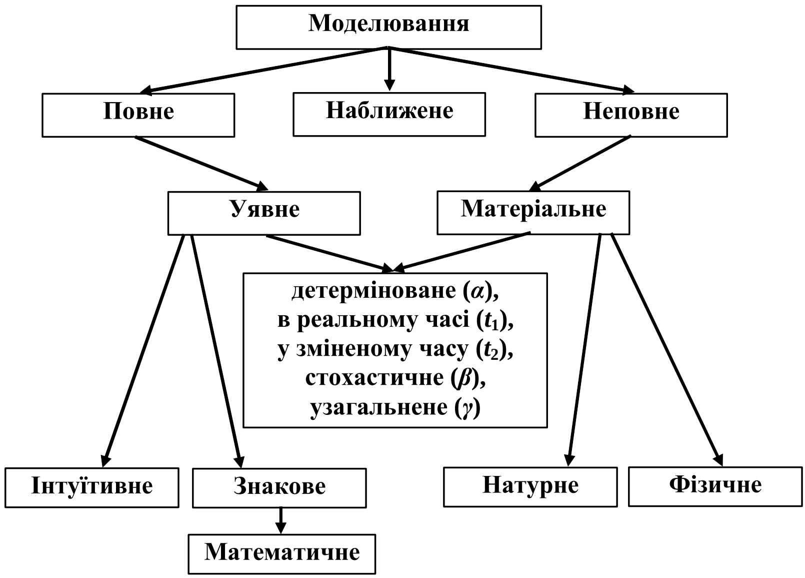


Рис. 2.1. Класифікація типів моделювання

Прикладами статичних математичних моделей систем є відомі з курсу фізики рівняння стану ідеального газу, закон Кулона, формула Планка тощо.

Якщо ж метою моделювання є опис не одного конкретного стану системи, а різниці між станами, динаміки змінювання стану з часом, деяких процесів, що відбуваються у системі, й таке інше, то виникає потреба в моделях, які б відображали ці процеси. Відповідні математичні моделі називають **динамічними.**

Прикладами є: рівняння дифузії j = $\boldsymbol{grad}$ c (j – потік компонента, що дифундує, а c – його концентрація), рівняння руху, закон Ома у диференціальній формі, закон радіоактивного розпаду.

Загальна математична модель динаміки системи задає множини входів, виходів та станів системи, а також зв'язків між ними.

Детерміновані (жорсткі) моделі передбачають, що зв'язок між входами та виходами системи може бути описаний за допомогою відомих детермінованих функцій, а вхідні значення є точно визначеними. Поведінку детермінованої моделі в більшості випадків можна передбачити однозначно, але у зв'язку із складністю багатьох детермінованих моделей під час їх досліджень застосовують чисельні та статистичні методи. Зазвичай, детерміновані моделі призводять до отримання систем алгебраїчних, диференціальних, диференціально-інтегральних або скінчено різницевих рівнянь.

Типовими завданнями, для розв’язання яких застосовують ці моделі, є дослідження динаміки систем, балансу, оптимізація систем та ін.

Стохастичні (статистичні) моделі будують, якщо параметри об'єкта дослідження піддаються впливу неконтрольованих випадкових факторів, або він характеризується власною невизначеністю поведінки.

Прикладами об'єктів першого типу є нестійкі технологічні процеси, екосистеми тощо. Типовими прикладами об'єктів другого типу є квантові частинки, а також системи, що складаються з багатьох однотипних елементів, які мають власну поведінку.

В обох випадках однозначно передбачити властивості таких об'єктів, їх зміну у часі та реакцію на зовнішні впливи неможливо, тому, вивчаючи їх, застосовують методи теорії ймовірностей і математичної статистики. У цьому разі зв'язок між входами та виходами подають через випадкові чи кореляційні функції, або через рівняння регресії, а невідомі точно параметри і вхідні змінні характеризують за допомогою відповідних функцій розподілу або математичних сподівань і стандартних відхилень.

Окремими випадками статистичних моделей є моделі факторного аналізу, що встановлюють зв'язок між факторами, які впливають на досліджувану систему і дають змогу зменшити розмірність простору ознак, а також класифікаційні моделі, за допомогою яких у сукупності досліджуваних об'єктів чи ознак виділяють групи подібних один до одного елементів. Прикладами статистичних моделей є відомі з курсу фізики розподіл Максвела, що характеризує розподіл молекул ідеального газу за швидкостями їх руху, та рівняння Шредінгера, яке дає змогу визначити густину імовірності знаходження квантової частинки у певній точці простору. Поділ моделей на дискретні й неперервні визначається характером області допустимих значень їх параметрів. Якщо остання є неперервною, то модель називають **неперервною.**

Неперервні ознаки можуть набувати будь-яких значень у певному заданому діапазоні. Прикладами таких ознак є час, потрібний учню або студенту на виконання деякого завдання, довжина, вага, температура тощо. Практично усі математичні моделі, що розглядаються у курсі фізики, є прикладами неперервних математичних моделей.

Якщо ж область допустимих значень параметрів дискретна, то модель називають **дискретною.** Параметри дискретних моделей можуть набувати лише окремих визначених значень. Дискретними ознаками зокрема є кількість студентів у групі, кількість комп'ютерів в установі, обсяг пам'яті у комп'ютерних пристроях та ін.

Прикладами дискретних моделей є різноманітні розклади; моделі даних для застосування у базах даних; моделі, що використовуються для розв’язання завдань оптимізації маршрутів перевезень, призначень виконавців робіт тощо.

У фізиці дискретні математичні моделі використовуються зокрема під час вивчення структури й деяких структурно чутливих властивостей кристалів.

Лінійні моделі характеризуються лінійним зв'язком між вхідними та вихідними змінними.

У **нелінійних моделях** усі або деякі зв'язки є нелінійними.

Найчастіше таку класифікацію застосовують для моделей, що подаються алгебраїчними та диференціальними рівняннями. Потреба у ній пов'язана з тим, що для лінійних моделей, зазвичай, є стандартні процедури їх аналізу, а у багатьох випадках відомими є й головні властивості таких моделей. Тому для отримання потрібних результатів за допомогою таких моделей часто буває достатньо підставити задані числові значення до готових формул чи комп'ютерних програм. Для нелінійних моделей така можливість є лише в окремих найпростіших випадках.

Прикладами лінійних математичних моделей є закон Гука, другий закон Ньютона, моделі факторного аналізу, більшість моделей, що використовуються у кореляційному аналізі даних тощо. Прикладом нелінійних моделей є закон всесвітнього тяжіння.

З погляду практичного використання важливою є класифікація моделей за методами їх подальшого аналізу. Вирізняють моделі, які досліджують **аналітично, чисельно** та за допомогою **апаратурного моделювання** (аналогових обчислювальних машин).

У першому випадку вихідну математичну модель необхідно перетворити до такої системи співвідношень, яка дозволяє отримати необхідний результат аналітичними методами.

Результатом аналітичного дослідження, зазвичай, є: побудова формул, що задають шукані величини в явній формі; перетворення рівнянь до вигляду, для якого аналітичний розв’язок є відомим тощо.

Результатами аналітичного дослідження також можуть бути якісні висновки про наявність особливих точок, асимптотичну поведінку, монотонність та однозначність залежності, стійкість розв’язку та інші.

Важливі аналітичні методи дослідження математичних моделей вивчають у курсі вищої математики, зокрема у таких його розділах, як математичний аналіз, лінійна алгебра, диференціальні рівняння й теорія імовірності.

Серед них можна назвати методи диференціювання, інтегрування й дослідження функцій, методи Гауса та Крамера розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, аналітичні методи розв'язування і якісні методи аналізу звичайних диференціальних рівнянь та їх систем тощо.

2.3 Фізичне моделювання, теорія розмірностей

Фізичне моделювання – це заміна вивчення досліджуваного явища в реалі вивченням аналогічного явища на масштабованій моделі в спеціальних лабораторних умовах зі збереженням фізичної природи явищ.

Фізична модель дає змогу провести досліди з метою вивчення фізичної суті явищ і отримання практичних уявлень про характер здійснення процесу. Цей вид експериментальних досліджень базується на подібності явищ, що супроводжують роботу натурної і модельної установок, і його найчастіше застосовують у разі постановки лабораторних експериментів для значного зменшення витрат на їх проведення. В основі фізичного моделювання лежить теорія подібності. Необхідними умовами фізичного моделювання є геометрична і фізична подібність моделі й натури. Розрізняють геометричне та динамічне фізичне моделювання.

Фізичне моделювання може бути реалізоване двома способами:

1) шляхом натурного виробничого експерименту, коли вимірювання даних та їх аналіз виконується на діючій заводській установці без внесення в неї будь-яких змін;

2) на спеціальних стендах.

Необхідна умова фізичного моделювання – рівність всіх критеріїв подібності для моделі й натури.

Визначають найсуттєвіші для досліджуваного процесу критерії подібності та визначають границі їх зміни на моделі і в оригіналі. На підставі цих границь зміни критеріїв визначають масштаби моделювання окремих блоків моделі.

Однак домогтися цієї рівності можна не завжди, тому що не завжди вдається одночасно задовольнити всі критерії подібності.

Існує декілька найпоширеніших критеріїв подібності в механіці:

- критерій Ньютона для поступального руху $N_e = \frac{F \cdot l}{m \cdot v^2} = idem$;
- критерій Ньютона для обертального руху $N_e = \frac{M \cdot t}{I \cdot \omega} = idem$;
- критерій Фруда для руху під дією сил тяжіння $F_r = \frac{v^2}{g \cdot l} = idem$;
- критерій Ейлера руху під дією тиску $E_u = \frac{p}{\rho \cdot v^2} = idem$;
- критерій Коші для поширення хвиль в пружному середовищі $C_a = \frac{v}{\sqrt{\varepsilon \cdot E / \rho}} = idem \cdot$

Усі фізичні величини поділяються на розмірні і безрозмірні, основні і похідні (табл. 2.1). Числові значення розмірних величин залежать від вибраної системи одиниць вимірювання, тоді як числові значення безрозмірних величин не мають такої залежності. Основною фізичною величиною називається величина, яка умовно прийнята в якості незалежної від інших величин. Фізичні величини, які визначаються через основні, називаються похідними. Розмірні величини ділять на величини з незалежними (базові) і залежними одиницями, а самі одиниці на незалежні і залежні. Наприклад, шлях, швидкість і прискорення мають залежні одиниці тому, що одиниці будь-якої із них можна виразити через одиниці двох інших.

Таблиця 2.1

Основні та похідні одиниці системи СІ

Величина	Позначення	Одиниця	Розмірність
Довжина	L	метр	м
Маса	M	кілограм	кг
Час	T	секунда	с
Температура	Q	кельвін	К
Площа	L^2	квадратний метр	$м^2$
Об'єм	L^3	кубічний метр	$м^3$
Швидкість	LT^{-1}	метр в секунду	м/с
Прискорення	LT^{-2}	метр на секунду в кв.	$м/с^2$
Щільність	ML^{-3}	кілограм на куб. м.	$кг/м^3$
Сила	MLT^{-2}	ньютон	Н
Напруження, тиск	$ML^{-1}T^{-2}$	паскаль	Па
Енергія, робота	ML^2T^{-2}	джоуль	Дж
Потужність	ML^2T^3	ват	Вт

Вираз похідної одиниці вимірювання через основні одиниці називається ***розмірністю.*** Під час вивчення механічних явищ основними фізичними величинами є метр, кілограм, секунда (відповідно довжина, маса, час). У теплотехніці четвертою основною фізичною величиною може бути температура.

Якщо фізичні величини позначити, наприклад, через $\boldsymbol{X_i}$, то їх одиниці виміру позначають через $[\boldsymbol{X_i}]$. У загальному випадку зв'язок між фізичними величинами характеризується рівнянням зв'язку у вигляді степеневого комплексу:

$$X_{n+1} = CX_1^{\alpha_1} \cdot X_2^{\alpha_2} \ldots \cdot X_n^{\alpha_n}, \tag{2.8}$$

де α_1, α_2, ... α_n – деякі показники степеня.

Імовірно, що між одиницями виміру цих фізичних величин існує така залежність:

$$K_{n+1} = K_1^{\alpha_1} \cdot K_2^{\alpha_2} \ldots \cdot K_n^{\alpha_n} . \quad (2.9)$$

Наведена формула виражає одиницю похідної величини [$\boldsymbol{X_{n+1}}$] залежно від одиниць основних фізичних величин і називається розмірністю похідної величини. Розмірності основних величин часто позначаються великими буквами без квадратних дужок.

Якщо розмірна величина є функцією ряду незалежних між собою розмірних величин, тоді цю функцію можна виразити через безрозмірні комбінації, складені із визначених розмірних величин. Цю функцію записують у вигляді:

$$\pi = f\left(\pi_1, \ldots, \pi_{n-k}\right), \quad (2.10)$$

де π, π_1, $\pi_{n\text{-}k}$ – безрозмірні комбінації, які складені із n+1 розмірних величин;

k – кількість розмірних величин, які мають незалежну розмірність.

Отже відповідно ***π-теоремі*** будь-яке співвідношення між різними фізичними величинами можна подати у вигляді функціонального зв’язку між розмірними параметрами. Це і є ***π-теорема*** принципу аналізу розмірностей.

Принцип аналізу розмірностей допомагає виявити визначені параметри механічної системи і сприяє грамотній постановці експерименту і обробці дослідних даних. Однак за допомогою тільки одного принципу аналізу розмірностей неможливо визначити всі рівняння, які зв'язують безрозмірні параметри.

Теорія подібності дає загальні методичні вказівки, як діяти у кожному окремому випадку під час аналізу рівнянь, які описують явище, під час постановки та обробки дослідних даних та розповсюдженні результатів досліду на інші явища.

Два явища вважаються подібними, якщо вони мають однакову фізичну природу і, якщо за заданими характеристиками одного можна отримати характеристики іншого за допомогою перехідних масштабних коефіцієнтів (коефіцієнтів подібності).

У механіці основними величинами вважають довжину ***l***, час ***t*** і масу ***m***. Коефіцієнти подібностей для всіх похідних величин можна виразити через коефіцієнти подібності основних величин.

Наприклад, для похідної величини – швидкості ($v=l/t$), коефіцієнт подібності $k_v = \frac{v_н}{v_м}$ (індекс „н" у величин для реального об'єкта, „м" – для моделі), можна виразити через коефіцієнти подібності довжини $k_l = \frac{l_н}{l_м}$ і часів $k_t = \frac{t_н}{t_м}$ у вигляді $k_v = \frac{k_l}{k_t}$.

Розглянемо дві механічні системи з масами $\boldsymbol{M_н}$, і $\boldsymbol{M_м}$, одна з яких є натурною, а інша – моделлю. Ці дві системи подібні, якщо їх розміри, швидкості руху, маси і проміжки часу руху пов'язані наступними співвідношеннями:

$$l_н : l_м = \mu_l\,, \tag{2.11}$$

$$\vartheta_н : \vartheta_м = \mu_\vartheta\,, \tag{2.12}$$

$$M_н : M_м = \mu_M\,, \tag{2.13}$$

$$t_н : t_м = \mu_t\,, \tag{2.14}$$

$$F_н : F_м = \mu_F\,, \tag{2.15}$$

де μ_l, μ_υ, μ_M, μ_t, μ_F – коефіцієнти подібності відповідно довжин, швидкостей, мас, часу і сил.

2.4 Математичне моделювання

Математичне моделювання – моделювання, за якого модель є системою математичних співвідношень, що описують деякі технологічні, технічні чи інші процеси.

В основу методу покладено ідентичність форми рівнянь і однозначність співвідношень між змінними в рівняннях оригіналу і моделі, тобто, їх аналогії. Математичні моделі досліджуються, зазвичай, за допомогою аналогових обчислювальних машин, цифрових обчислювальних машин, комп'ютерів.

Наприкінці XX ст. було розроблено один із методів математичного моделювання – квазіаналогове моделювання. Цей метод полягає в дослідженні не досліджуваного явища, а явища або процесу іншої фізичної природи, яке описується співвідношеннями, еквівалентними щодо отримуваних результатів.

Математичне моделювання тією чи іншою мірою застосовують всі природничі і суспільні науки, що використовують математичний апарат для отримання спрощеного опису реальності за допомогою математичних понять. Математичне моделювання дає змогу замінити реальний об'єкт його моделлю і потім її вивчати. Як і у разі будь-якого моделювання, математична модель не описує явище абсолютно адекватно, що залишає актуальним питання про застосовність отриманих таким шляхом результатів. Математичне моделювання широко застосовується у металургії, геології, для вивчення і аналізу процесів переробки корисних копалин.

Найчастіше в процесі теоретичних досліджень намагаються створити математичну модель явища, процесу чи технічного об'єкта, що є головним поняттям методу математичного моделювання.

Математична модель об'єкта дослідження – це система математичних співвідношень (формул, рівнянь чи систем рівнянь), які описують основні елементи та їх взаємодію в об'єкті.

Під час математичного моделювання вивчається не сам реальний фізичний процес, а деяка його модель, від якої вимагається, щоб вона зберігала головні риси процесу, що розглядається, і, водночас, була настільки простою, щоб піддаватися вивченню математичними методами.

Так, наприклад, були виведені основні рівняння математичної фізики. Моделювання процесів поширення тепла в нерівномірно нагрітому середовищі, коливань закріпленої на кінцях струни дозволило отримати такі основні рівняння математичної фізики, як рівняння теплопровідності, хвильове рівняння, рівняння Лапласа й Пуассона, а також сформулювати для них крайові та змішані задачі.

Основні **вимоги** до математичних моделей такі:

– **універсальність** – означає можливість її застосування для аналізу групи об'єктів;

– **точність** – оцінюється мірою збігу даних, отриманих за математичною моделлю, із реальними даними;

– **адекватність** – здатність відображати властивості об'єкта із похибкою не вище заданої:

– **економічність** – характеризується затратами обчислюваних ресурсів на її реалізацію.

Математичні моделі отримують двома шляхами. Перший полягає у глибокому вивченні об'єкта для виявлення механізму і основних теоретичних закономірностей його функціонування, а другий ґрунтується на експериментальному дослідженні об'єкта. У першому випадку моделі ґрунтуються на законах механіки, тому вони якісно правильно характеризують поведінку об'єкта, навіть якщо точність недостатня у зв'язку з прийнятими потрібними гіпотезами і припущеннями. Це дає змогу прогнозувати функціонування об'єкта у різних умовах, що є перевагою таких моделей. Ці моделі називають аналітичними. Інші моделі називають, зазвичай, статистичними або емпіричними. Головна їх перевага – це простота їх отримання у тих випадках, коли процес, який досліджується, недостатньо вивчений чи дуже складний для того, щоб можна було отримати його теоретичний опис. Однак ці моделі мають вузьку область застосування, яка обмежена діапазоном проведення експерименту.

Статичні моделі можуть бути регресійними, стохастичні та імітаційними.

Для побудови регресійних моделей використовують регресійний аналіз, за допомогою якого здійснюється оцінка кількісних зв'язків між змінними зовнішніх дій (факторами) і вихідною змінною (параметром оптимізації), які не залежать від часу. Регресійні моделі описуються поліномами першого і другого порядку. Метод отримання регресійних моделей – це теорія планування експерименту.

Стохастичні моделі містять випадкові параметри. Тому результат розрахунку за такою моделлю – це, або імовірність здійснення визначеної події, або статистична оцінка деяких випадкових величин, які змінюються з часом, у вигляді, так названих, динамічних характеристик. Ділянка основного застосування стохастичних моделей – опис об'єктів в умовах невизначеності, тобто за відсутності деяких відомостей про умови їх функціонування.

Виділяють декілька **етапів створення** математичної моделі:

- **Створення математичної моделі** – постановка адекватної математичної задачі, визначення об'єкта і мети моделювання, а також факторів, які вивчаються і способів керування ними.

Побудова моделі починається зі словесно-змістового описання об'єкта чи явища. Окрім знань загального характеру про природу об'єкта і мету його дослідження, ця стадія може містити також деякі припущення (невагомий стрижень, товстий шар речовини, прямолінійне поширення світла тощо). Цей етап можна назвати формулюванням протомоделі.

Важливо виокремити об'єкт з оточення, визначити його межі, тобто визначити області значень основних факторів (змінних).

- **Вибір основної величини** (кількох основних величин), яка характеризує процес – завершення ідеалізації об'єкта. Відкидаються всі фактори та ефекти, які вважаються не найсуттєвішими для його поведінки. За можливості припущення, які використовуються при ідеалізації, записуються в математичній формі. Це необхідно, щоб справедливість цих припущень піддавалась кількісному контролю.
- **Вибір типу математичної моделі**. Виводиться визначальне рівняння для основної величини, яка характеризує процес. Можна переходити до вибору чи формулювання закону (варіаційного принципу, аналогії тощо), якому підлягає об'єкт, і його запису в математичній формі. За необхідності використовуються додаткові дані про об'єкт, які також записуються математично. Варто мати на увазі, що навіть для простих об'єктів вибір відповідного закону є зовсім не тривіальною задачею.

Тут важливо мати попередню інформацію про об'єкт, а саме воявити в пошукових дослідах характер об'єкта, його лінійність чи нелінійність, динамічність чи статичність, детермінований чи стохастичний (імовірнісний) характер.

Система визначена як статична на малих проміжках часу залишається статичною і зі збільшенням їх тривалості. Але, навпаки, статичність визначена на великих проміжках часу не завжди забезпечується для малих.

Формулювання моделі завершує її "оснащення". Наприклад необхідно задати дані про початковий стан об'єкта або інші його характеристики, без знання яких неможливо визначити поведінку об'єкта. І, нарешті, формулюється мета дослідження моделі.

- **Вибір математичного апарата**, яким представлятиметься модель об'єкта.

Якщо об'єкт характеризується факторами, які змінюються безперервно в часі, то його належить описувати неперервними функціями і диференціальними рівняннями.

Якщо параметри стану об'єкта дискретні, то для нього варто використати методи теорії автоматів, матричні та операторний методи аналізу.

Для об'єктів, динамічних лише у часі, математичні моделі формулюються у класі диференціальних чи інтегрованодиференціальних рівнянь. Для об'єктів, зміна яких розгортається у часі і просторі (не обов'язково фізичному) – рівняння у часткових похідних.

Так як диференціальне рівняння має безліч розв'язків, то його не досить для описання конкретного процесу. Тому виводяться так звані умови однозначності, які з безлічі розв'язків визначального рівняння дозволяють виділити єдиний розв'язок, що характеризує процес, який моделюється. Нагадаємо, що для рівнянь математичної фізики такими додатковими умовами є граничні та початкові умови.

Отже математична модель процесів, які вивчаються за допомогою рівнянь математичної фізики, складається з диференціального рівняння для основної величини, яка характеризує процес, і додаткових умов, які дають змогу отримати єдиний розв'язок цього рівняння – розв'язок, що описує конкретний фізичний процес.

Відомо багато методів розв'язку диференціальних рівнянь, наприклад, розділення змінних, інтегруючого множника, метод підстановки, розкладу на базисі ортонормованих функцій тощо. Наближені розв'язки знаходять, використовуючи засоби якісної теорії диференціальних рівнянь, або різного типу числові процедури.

- **Дослідження моделі**. У результаті дослідження моделі не тільки досягається окреслена мета, але має бути встановлена, усіма можливими способами (порівнянням з практикою, з іншими підходами), адекватність моделі – відповідність моделі до об'єкта та сформульованих припущень. Неадекватна модель може дати результат, який буде як завгодно відрізнятися від істинного. Така модель має бути відкинута чи відповідно модифікована.

Побудована модель вивчається всіма доступними методами, зокрема перевіркою з використанням різних підходів. Більшість моделей не підлягають чисто теоретичному аналізові і тому потрібно широко застосовувати обчислювальні методи. Ця обставина особливо важлива для вивчення нелінійних об'єктів, оскільки їх якісна поведінка заздалегідь, як правило, невідома.

Немає універсального методу побудови модельних систем рівнянь. У кожному випадку необхідно ґрунтуватись на вивченні конкретної системи і на сформульованих вище загальних правилах.

Під час аналізу сформульованої математичної моделі об'єкта важливо узгодити адекватність моделі об'єкту (ступінь її наближення до об'єкта) і прийнятну точність математичного аналізу самої моделі. Оптимальним варіантом є співмірність цих двох наближень, оскільки немає сенсу отримувати точний розв'язок складної математичної моделі (задачі), якщо вона грубо описує реальний об'єкт.

Математична модель описує реальний об'єкт чи процес завжди наближено і з деякою точністю. Наближеність математичної моделі пояснюється прийнятими для її побудови припущеннями і обмеженнями, метою яких є спростити модель, зробити її зручною для використання та обчислень, полегшити обчислювальну роботу.

Неточності вимірів під час отриманні експериментальних даних, що використовуються в моделі, також є причиною наближеності математичної моделі.

В процесі розробки математичної моделі об'єкта або процесу намагаються враховувати тільки найсуттєвіші чинники, що впливають на результат моделювання. Несуттєві чинники, що спричиняють незначний вплив на поведінку досліджуваного об'єкта або протікання процесу, з огляду на поставлену задачу, в математичній моделі, як правило не враховуються. Створити просту модель, вміти виділити і врахувати головне – це і є мистецтво моделювання. Серед фахівців у галузі математичного моделювання з використанням комп’ютера побутує така думка, що **ступінь розуміння дослідником сутності досліджуваного об'єкта обернено пропорційний числу змінних, що використовуються в математичній моделі.**

Надмірне спрощення моделі може призвести до втрати точності, а іноді взагалі зробити модель непотрібною. Бажання отримати детальнішу модель, врахувати більшу кількість чинників призводить до ускладнення математичної моделі і ресурсозатратного чисельного експерименту на комп’ютері. Тому дослідник повинен знаходити розумний компроміс між вигодами простоти моделі, повноти врахування основних чинників і точності моделі.

Математичні моделі мають деяку обмеженість застосування. Ця особливість зумовлена прийнятими допущеннями, відкиданням другорядних для окресленої задачі чинників, що може бути справедливо в одному випадку і неприпустимо в іншому. Математична модель розробляється для деяких цілей і може бути використана за певних умов і потребує її уточнення для застосування в інших умовах.

Закон фундаментальної науки має характер абсолютної категорії на деякому рівні знань. Він може бути або безумовно вірним, або безумовно хибним і тоді відкидається. Математична модель не є такою абсолютною категорією. Одні й ті ж сторони явищ чи процесів, що вивчаються, можна описувати різними математичними моделями. Одна з них може бути кращою, а інша гіршою, з деякого погляду, в одних умовах і, навпаки, в інших. Іншими словами, математичні моделі одного й того ж процесу можуть мати мало спільного, якщо вони створені з різною метою.

Ефективність, успішність використання результатів математичного моделювання, головним чином, залежить від якості математичної моделі, від того, наскільки вдало вона побудована. Тому основною вимогою є перевірка математичної моделі на адекватність поставленої перед дослідником задачі. Під адекватністю математичної моделі розуміють: правильний якісний опис об'єкта (процесу) за вибраними характеристиками стану; правильний кількісний опис об'єкта (процесу) за вибраними характеристиками з деяким розумним ступенем точності. Адекватність моделі не треба ототожнювати з точністю моделі. Поняття точності є ширшим, оскільки передбачає ще й ступінь повноти врахування фізичних чинників процесу. Адекватність математичної моделі поставленій задачі дослідження повинна бути перевірена практикою з використанням даних фізичного експерименту.

Найпоширеніший метод побудови математичних моделей полягає в застосуванні фундаментальних законів природи до конкретної ситуації. Ці закони загальновизнані, багаторазово підтверджені досвідом, слугують основою великої кількості науково-технічних досягнень. Тому їх обґрунтованість не викликає сумніву, що, крім усього іншого, надає досліднику сильну психологічну підтримку.

Закон збереження енергії. Цей закон відомий упродовж двохсот років. Покладаючись на нього, експерт з балістики, який хоче визначити швидкість кулі і не має поблизу спеціальної лабораторії, може скористатися відносно простим пристроєм типу маятника –вантажем, підвішеним на легкому недеформованому стержні, який може вільно обертатися (рис.

2.2).

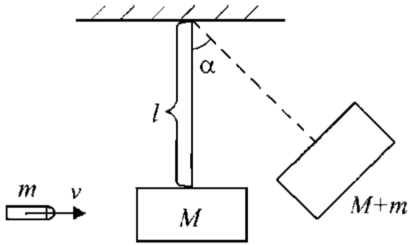


Рис. 2.2. Схема пристрою „маятник – вантаж”

Куля, яка застрягає у вантажі, надає системі „куля-вантаж” свою кінетичну енергію, яка в момент найбільшого відхилення стрижня від вертикалі повністю переходить у потенціальну енергію системи. Ці трансформації описуються ланцюгом рівностей:

$$\frac{mv^2}{2} = (M+m)\frac{V^2}{2} = (M+m)\cdot g\cdot l(1-\cos\alpha), \qquad (2.16)$$

де $\frac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія кулі масою m за її швидкості v;

M – маса вантажу;

V – швидкість системи „куля-вантаж” одразу після зіткнення;

g – прискорення вільного падіння;

l – довжина стержня;

α – кут найбільшого відхилення.

Шукана швидкість кулі v визначається за формулою:

$$\frac{mv^2}{2} = (M+m)\cdot g\cdot l(1-\cos\alpha), \rightarrow v = \sqrt{\frac{2(M+m)\cdot g\cdot l(1-\cos\alpha)}{m}}. \qquad (2.17)$$

Модель (2.17) є доволі точною, за умови, що втрати енергії на нагрівання кулі й вантажу, на подолання опору повітря, розгін стержня є невеликими. Процеси, які відбуваються під час зіткнення кулі та маятника, уже не є чисто механічними. Тому закон збереження механічної енергії, який був застосований для обчислення величини v, не є справедливим повною мірою: зберігається повна, а не механічна енергія системи. Закон збереження механічної енергії дає лише нижню межу для оцінки швидкості кулі.

Використання варіаційних принципів. Ще один підхід до побудови моделей полягає у використанні так званих варіаційних принципів. Цей підхід за широтою та універсальністю його можливостей можна порівняти з використанням фундаментальних законів природи при побудові математичних моделей. Варіаційні принципи є досить загальними твердженнями про об'єкт, що розглядається (система, явище), вони стверджують, що з усіх можливих варіантів поведінки об'єкта (руху, еволюції) вибирають лише ті, що задовольняють певну умову. Зазвичай, згідно з цією умовою деяка величина, яка пов'язана з об'єктом, досягає свого екстремального значення при переході об'єкта з одного стану в інший.

Приклад. Припустимо, що автомобіль, який рухається зі сталою швидкістю v, має потрапити з точки A в точку B і при цьому торкнутися деякої прямої лінії C. На рис. 2.3 показані різні траєкторії руху з точки A в точку B з дотиком до прямої C. Суцільною лінією виділено найкоротший шлях.

Водій автомобіля дуже поспішає й вибирає з багатьох траєкторій шлях, який вимагає мінімальних затрат часу. Зобразимо витрачений час як функцію величини кута α між прямою C і відрізком шляху від точки A до прямої C:

$$t(\alpha) = \frac{a}{v\sin\alpha} + \frac{b}{v\sin\beta(\alpha)}. \tag{2.18}$$

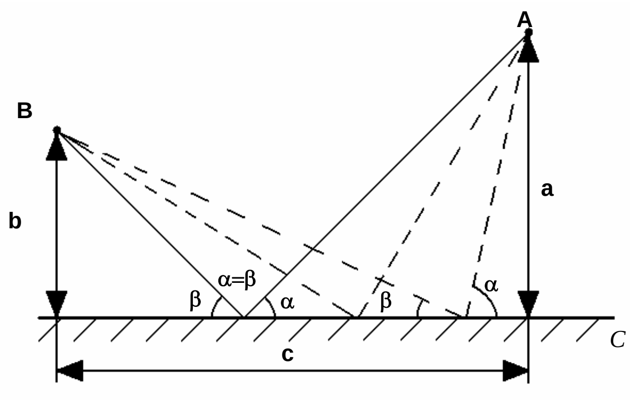


Рис. 2.3. Приклад використання варіаційних принципів

У рівнянні (2.18) a і b – довжини перпендикулярів, які опущені з точок A і B на пряму C; $\beta(\alpha)$ – кут між прямою C і відрізком шляху з точки дотику до точки B.

Умова екстремальності $t(\alpha)$ за аргументом α означає, що

$$\left.\frac{dt(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{ext}} = 0, \tag{2.19}$$

або

$$\frac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{b\cos\beta(\alpha)}{\sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0. \tag{2.20}$$

Для будь-яких значень α є справедливою рівність:

$$c = \frac{a}{tg\alpha} + \frac{b}{tg\beta(\alpha)}, \tag{2.21}$$

де c – відстань між проекціями точок A і B на пряму C (ця відстань є однаковою для всіх траєкторій).

Диференціюючи залежність (2.21), отримаємо співвідношення:

$$\frac{a}{\sin^2 \alpha} + \frac{b}{\sin^2 \beta(\alpha)} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0\,, \tag{2.22}$$

яке разом з умовою мінімальності (2.20) (порівняємо (2.20) і (2.22)) дає

$$\cos \alpha = \cos \beta\left(\alpha\right), \tag{2.23}$$

тобто рівність кутів α і β.

Далі неважко знайти самі значення $\alpha_{\min}, t_{\min}$ через задані величини *a*, *b*, *c*. Однак зараз для нас важливо інше – умова мінімальності витрат часу диктує вибір відповідної траєкторії за правилом **кут падіння дорівнює куту відбивання**. Однак такому ж закону підкоряється і хід променя світла, який потрапляє на дзеркальну поверхню. Може, і промені світла рухаються траєкторіями, які забезпечують найшвидше потрапляння сигналу з однієї точки в іншу? Так, саме так і відбувається згідно з відомим варіаційним принципом Ферма, спираючись на який можна отримати всі основні закони геометричної оптики.

Про нелінійність математичних моделей. Простота розглянутих математичних моделей значною мірою пов’язана з їх лінійністю. У математичному сенсі це важливе поняття означає, що є справедливим принцип суперпозиції, тобто будь-яка лінійна комбінація розв’язків (напр., їх сума) теж є розв’язком задачі. Користуючись принципом суперпозиції, не важко, знайшовши розв’язок у якомусь частинному випадку, побудувати розв’язок у більш складній ситуації. Тому про якісні властивості загального випадку можна міркувати за властивостями частинного – різниця між двома розв’язками має лише кількісний характер. Наприклад, збільшення у два рази швидкості витікання ракетного палива призводить також до дворазового збільшення швидкості ракети, зменшення кута падіння світлового променя на дзеркальну поверхню означає таку саму зміну кута відбивання тощо. Іншими словами, у випадку лінійних моделей відгук об’єкта на зміну якихось умов є пропорційним величині цієї зміни.

Для нелінійних явищ, математичні моделі яких не задовольняють принцип суперпозиції, знання про поведінку частини об’єкта ще не гарантує знання поведінки всього об’єкта, а його відгук на зміну умов може якісно залежати від величини цієї зміни.

2.5 Застосування теорії подібності для побудови математичних моделей

Головні положення теорії подібності визначають властивості подібних об’єктів дослідження й указують вимоги, задовольняючи які один з об’єктів може розглядатися як модель (оригінал) щодо інших.

Нагадаємо, що диференційне рівняння є математичною моделлю класу процесів. Згідно з цим під час інтегрування будь-якого диференційного рівняння отримуємо нескінченну множину розв’язків, які задовольняють це рівняння. Щоб отримати з цієї множини можливих розв’язків один частинний, який відповідає конкретному процесу, необхідно мати додаткові дані, які не містяться у визначальному диференційному рівнянні. Додаткові умови, які дозволяють з нескінченної множини розв’язків диференційного рівняння виділити один, який відповідає конкретному процесу, називаються умовами однозначності. Якщо конкретний процес відбувається і в часі, і в просторі, то умови однозначності містять просторові характеристики системи у початковий момент часу (початкові умови), а також умови на тій межі, де система контактує, взаємодіє з навколишнім середовищем (межові умови).

Перехід від класу явищ до одиничного явища відбувається приєднанням до диференційного рівняння умов однозначності. Отже конкретний процес описується диференційним рівнянням, розв’язки якого задовольняють певні умови однозначності.

Говорячи про подібність фізичних явищ під час їх математичного моделювання, то належить пам’ятати, що подібними називаються фізичні явища одного класу, у яких подібні всі характерні величини, тобто всі векторні величини геометрично подібні, а всі скалярні – відповідно пропорційні.

Наведемо кілька прикладів фізичної подібності:

- **Просторова (геометрична) подібність** – виражається рівністю всіх відповідних кутів і пропорційністю всіх відповідних лінійних розмірів:

$$\frac{l_1'}{l_1} = \frac{l_2'}{l_2} = \frac{l_3'}{l_3} = M_l = \text{const}. \tag{2.24}$$

- **Часова подібність (гомохронність)** – виражається пропорційністю інтервалів між відповідними моментами часу:

$$\frac{t_1'}{t_1} = \frac{t_2'}{t_2} = \frac{t'}{t} = M_t = \text{const}. \tag{2.25}$$

Частинним випадком гомохронності є синхронність, за якої

$$\frac{t'}{t} = 1, \text{ або } t' = t,\ t_1' = t_1,\ t_2' = t_2, \ldots \tag{2.26}$$

- **Кінематична подібність**, тобто геометрична подібність полів швидкості (а також полів прискорення), виражається відповідністю напрямків і пропорційністю всіх швидкостей (прискорень):

$$\frac{v_1'}{v_1} = \frac{v_2'}{v_2} = \ldots = \frac{v_i'}{v_i} = M_v = \text{const}. \tag{2.27}$$

- **Динамічна подібність**, тобто геометрична подібність силових полів виражається відповідністю напрямків сил і їх пропорційністю:

$$\begin{gathered} \frac{l_1'}{l_1} = \frac{l_2'}{l_2} = \ldots = \frac{l_i'}{l_i} = M_l = \text{const}, \\ \frac{f_1'}{f_1} = \frac{f_2'}{f_2} = \ldots = \frac{f_i'}{f_i} = M_f = \text{const}. \end{gathered} \tag{2.28}$$

- **Температурна подібність**, тобто геометрична подібність температурних полів, виражається відповідною пропорційністю всіх температур:

$$\frac{u_1'}{u_1} = \frac{u_2'}{u_2} = ... = \frac{u_i'}{u_i} = M_u = \text{const}\,. \qquad (2.29)$$

Виходячи зі сказаного, подібність фізичних величин математично виражається у формі пропорцій наступним чином:

- **Подібність скалярних величин** (наприклад, температур):

$$\frac{u_1'}{u_1} = \frac{u_2'}{u_1} = ... = \frac{u_i'}{u_i} = M_u = \text{const}\,. \qquad (2.30)$$

- **Подібність векторних величин** (наприклад, швидкостей) виражається відповідністю напрямків і пропорційністю їх абсолютних значень:

$$\frac{u_i'}{u_i} = M_u = \text{const} \qquad (2.31)$$

або пропорційністю координат відповідних векторів:

$$\frac{u_{ix}'}{u_{ix}} = \frac{u_{iy}'}{u_{iy}} = \frac{u_{iz}'}{u_{iz}} = M_u = \text{const}\,. \qquad (2.32)$$

У цих рівностях M_u – це сталий коефіцієнт пропорційності, так званий масштаб подібності (або стала подібності, множник подібного перетворення); позначення без верхнього індексу належать до першого фізичного явища чи натури, індекс ' – до другого фізичного явища або моделі; 1, 2, 3, ..., належать і до відповідних точок простору (поля), і до відповідних моментів часу; індекси x, y, z позначають компоненти векторної величини на відповідних координатних осях.

Під час моделювання фізичних явищ масштаби подібності є масштабами моделі:

– M_l є лінійним масштабом;

– M_t – часу;

– M_v – швидкості;

– M_f – сил;

– M_u – температур тощо.

Для подібності фізичних явищ необхідно й достатньо:

- **Незмінність** (інваріантність) системи визначальних рівнянь математичної моделі при подібних перетвореннях змінних (заміні всіх змінних пропорційними їм величинами), тобто сумісність рівнянь

$$\begin{cases} f(u_1, u_2, ..., u_n) = 0, \\ f(M_1 u_1, M_2 u_2, ..., M_n u_n) = 0, \end{cases} \tag{2.33}$$

де $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – розмірні змінні;

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ – відповідні масштаби подібності;

- **Подібність** усіх фізичних параметрів системи визначальних рівнянь математичної моделі;
- **Просторова** (геометрична) подібність;
- **Стаціонарність** фізичного явища (процесу) або подібність полів усіх змінних у початковий момент часу (тільки для нестаціонарних явищ);
- **Подібність межових умов**, які входять до умов однозначності математичної моделі.

Розглянемо детальніше першу умову. У загальній теорії подібності доведено, що необхідною й достатньою умовою незмінності основних рівнянь математичної моделі щодо подібного перетворення змінних величин є незмінність деяких безрозмірних комплексів масштабів цих змінних. Переконаємося у справедливості цього твердження на прикладі.

Розглянемо подібне перетворення змінних рівняння теплопровідності. Нехай два процеси поширення тепла у твердих середовищах описуються диференціальними рівняннями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = a'^2 \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}\right). \tag{2.35}$$

де u, u' – температура;

t, t' – час;

x, y, z і x', y', z' – просторові координати точок середовищ;

a, a' – коефіцієнти теплопровідності.

Позначення без верхнього індексу належать до першого процесу (оригіналу), позначення з індексом ’ – до другого (моделі).

За припущенням процеси, що розглядаються, – подібні, тому між змінними, що характеризують процеси поширення тепла, і між фізичними параметрами a і a', що характеризують властивості середовища, у якому поширюється тепло, існує такий зв’язок:

$$\frac{u'}{u} = M_u, \frac{t'}{t} = M_t, \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = M_l, \frac{a'}{a} = M_a. \quad (2.36)$$

і, відповідно,

$$\begin{gathered} u' = M_u u,\ t' = M_t t,\ x' = M_l x, \\ y' = M_l y,\ z' = M_l z,\ a' = M_a a \end{gathered}. \quad (2.37)$$

Підставимо в рівняння (2.35) отримані значення змінних другого явища (моделі), тобто виконаємо подібне перетворення змінних у диференційному рівнянні (2.35):

$$\frac{M_u}{M_t}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{M_a{}^2 M_u}{M_l{}^2} a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \quad (2.38)$$

Ми очікуємо, що після виконаного подібного перетворення одержане рівняння (2.38) стане подібним з рівнянням (2.34), яке описує процес (оригінал). Для цього необхідно, щоб коефіцієнти рівняння (2.38), які є степеневими комплексами масштабів перетворення, були рівними між собою, тобто:

$$\frac{M_u}{M_t} = \frac{M_a{}^2 M_u}{M_l{}^2}. \quad (2.39)$$

Помножимо цю рівність на $\dfrac{1}{\dfrac{M_u}{M_t}}$, звідки матимемо

$$\frac{M_a{}^2 M_t}{M_l{}^2} = 1,$$

або, якщо позначити

$$M_{\left(\frac{a^2 t}{l^2}\right)} = \frac{M_a{}^2 M_t}{M_l{}^2}, \tag{2.40}$$

то матимемо

$$M_{\left(\frac{a^2 t}{l^2}\right)} = 1. \tag{2.41}$$

Отже для інваріантності рівняння теплопровідності (2.34) до подібних перетворень необхідно, щоб масштаб подібності для безрозмірного комплексу $a^2 t / l^2$, $M_{\left(\frac{a^2 t}{l^2}\right)}$ дорівнював одиниці. Це означає, що безрозмірний комплекс $a^2 t / l^2$ має залишатися незмінним для подібних процесів теплопровідності. Дійсно, підставляючи у (2.41) замість масштабів подібності їх значення, матимемо

$$\frac{\frac{a'^2}{a^2} \frac{t'}{t}}{\frac{l'^2}{l^2}} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{a'^2 t'}{l'^2} = \frac{a^2 t}{l^2} = inv. \tag{2.42}$$

Тут має місце незмінність (інваріантність – ***inv***), а не сталість (**const**), оскільки одержані комплекси змінних однакові тільки для відповідних точок системи (полів), а для нестаціонарних процесів – і для відповідних моментів часу. Для різних точок системи й різних моментів часу отримані комплекси змінних можуть бути різними.

Безрозмірні комплекси, незмінність яких є кількісною ознакою подібності фізичних явищ, називаються критеріями подібності.

На конкретному прикладі ми переконались, що необхідною умовою незмінності визначальних рівнянь математичної моделі щодо подібного перетворення змінних є незмінність критеріїв подібності. Нескладно також переконатись, що така умова є також і достатньою.

Отже, у тих випадках, коли математичні описання групи (двох або більше) якісно однакових процесів однієї й тієї ж фізичної природи є відомими і ці описання можуть бути перетвореними до однакового вигляду, тобто процеси, що розглядаються, є подібними, то такі процеси повинні мати однакові критерії подібності, які встановлюються безпосередньо з математичного описання шляхом приведення його до безрозмірного вигляду.

Отже для знаходження **критеріїв подібності фізичного явища** за наявності диференціальних рівнянь, які слугують його математичною моделлю, належить виконати такі дії:

- вибрати одиниці виміру (масштаби) для всіх змінних величин, які входять у систему визначальних диференційних рівнянь фізичного явища та умов їх однозначності;
- усі змінні величини в рівняннях системи треба замінити їхніми безрозмірними значеннями, тобто їх відношеннями до вибраних масштабів;
- степеневі комплекси з масштабів змінних величин і параметрів системи визначальних рівнянь, які при цьому утворюються, також приводяться до безрозмірного вигляду діленням усіх степеневих комплексів у рівнянні на один з них.

Безрозмірні степеневі комплекси, які при цьому отримуються, є шуканими критеріями подібності фізичного явища.

Розглянемо виконання вказаних дій під час знаходження критерію подібності явища поширення тепла в однорідному нерівномірно нагрітому твердому середовищі – явища, яке моделюється рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \qquad (2.43)$$

де $u = u(x, y, z, t)$ – температура середовища;

a – коефіцієнт температуропровідності;

x, y, z – координати точок простору;

t – час.

За масштаби розмірних величин u, x, y, z, t вибираються деякі характерні величини, які на цьому першому етапі не обов'язково пов'язувати з конкретним явищем поширення тепла, яке моделюється. Позначимо відповідно U, T, L масштаби температури u, часу t і координат x, y, z. Ці масштаби використовуються для запровадження безрозмірних змінних u', x', y', z', t':

$$u' = \frac{u}{U},\ t' = \frac{t}{T},\ x' = \frac{x}{X},\ y' = \frac{y}{Y},\ z' = \frac{z}{Z}\ . \qquad (2.44)$$

Звідси розмірні змінні, які визначають явище теплопровідності, набувають вигляду

$$u = u'U,\ t = t'T,\ x = x'L,\ y = y'L,\ z = z'L\ . \qquad (2.45)$$

Підставляння їх у рівняння теплопровідності дає

$$\frac{U}{T}\frac{\partial u'}{\partial t'} = a^2\,\frac{U}{L^2}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}\right). \qquad (2.46)$$

Два степеневі комплекси масштабів визначальних змінних явища теплопровідності UT^{-1} і a^2UL^{-2}, один з яких містить у своєму складі коефіцієнт температуропровідності середовища a, зводяться до безрозмірного вигляду діленням отриманого рівняння на степеневий комплекс UT^{-1}. Рівняння теплопровідності набуває такого вигляду:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = \frac{a^2 T}{L^2}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}\right). \qquad (2.47)$$

Єдиний безрозмірний степеневий комплекс a^2TL^{-2}, який залишився в рівнянні, є критерієм подібності явища теплопровідності. Він має історичну назву – **критерій подібності Фур'є**:

$$Fo = \frac{a^2 T}{L^2}\,.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте визначення терміну „моделювання”.
2. Наведіть приклад еквівалентної моделі.
3. Назвіть та проаналізуйте головні властивості моделі.
4. Наведіть класифікацію моделей.
5. Назвіть головні положення теорії подібності.
6. Які критерії подібності Вам відомі?
7. Які причини зумовлюють потребу в застосуванні критеріїв подібності?
8. На яких теоремах базуються положення теорії подібності?
9. Наведіть приклади фізичної подібності.
10. Назвіть вимоги, які висувають до математичних моделей?
11. Що таке фізичні, математичні та натурні моделі?
12. Наведіть приклади фізичних та математичних моделей.
13. В чому полягає суть фізичного та математичного моделювання?

3 ФІЗИЧНІ ВЕЛИЧИНИ В НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

3.1 Поняття фізичної величини

Фізична величина – це властивість, загальна в якісному відношенні, для багатьох фізичних об'єктів, але індивідуальна для кожного з них в кількісному відношенні.

Якісна сторона визначення „**фізична величина**" визначає природу величини (електричний опір, як загальна властивість провідника), кількісна – її розмір (опір конкретного провідника, який досліджується).

Фізична величина відображає властивості об'єктів, які можна виражати кількісно в прийнятих одиницях. Будь-який процес вимірювання реалізує операцію порівняння однорідних властивостей фізичних величин за ознакою «більше-менше». В результаті порівняння кожному розміру вимірюваної величини приписується позитивне дійсне число:

$$x = q \cdot [x], \tag{3.1}$$

де q – числове значення величини;

$[x]$ – розмірність величини, яка називається одиницею величини.

Відповідно, **одиницею величини** називається її частка з числовим значенням рівним одиниці.

Числове значення величини знаходять за формулою:

$$q = \frac{x}{[x]}, \qquad (3.2)$$

Отже можна зробити висновок, що числове значення залежить від прийнятої одиниці вимірювання.

Загальна класифікація фізичних величин наведена на рис. 3.1.

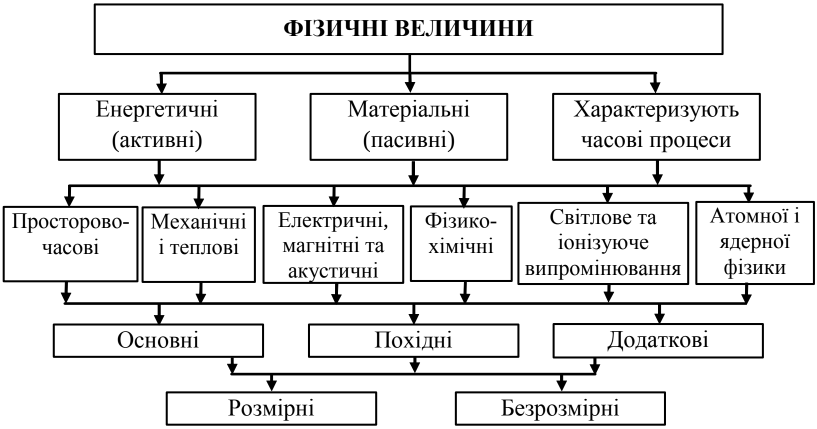


Рис. 3.1. Класифікація фізичних величин

За видами явищ фізичні величини поділяються на такі групи:

– **Енергетичні (активні)** – описують енергетичні характеристики процесів перетворення, передачі і використання енергії.

До такого роду величин можна віднести енергію, заряд, струм, напругу, потужність. Формування інформаційного вимірювального сигналу не потребує додаткового джерела енергії.

– **Матеріальні (пасивні)** – описують фізичні та фізико-хімічні властивості речовин, матеріалів.

Формування інформаційного вимірювального сигналу для такої величини потребує додаткового джерела енергії, тоді пасивні фізичні величини перетворюються в активні та підлягають вимірюванню.

– **Характеризуючи часові процеси** – різного виду спектральні та поляризаційні характеристики, кореляційні функції та інші.

Вказані фізичні величини за приналежністю до різних груп фізичних процесів поділяються на:

- просторово-часові;
- механічні;
- теплові;
- електричні;
- магнітні;
- акустичні; фізико-хімічні;
- світлові;
- іонізуючих випромінювань;
- атомної та ядерної фізики.

За ступенем умовної незалежності від інших величин цієї групи фізичні величини можуть бути:

- основними;
- похідними;
- допоміжними.

За розмірності фізичні величини поділяються на:

- розмірні;
- безрозмірні.

Вимірювання фізичної величини неможливе без наявності еталонного значення фізичної величини. Отже виникає необхідність мати множину еталонів для всіх фізичних величин.

Еталонні значення існують лише для головних фізичних величин (довжина, час, маса й інші), які прийняті за основні одиниці. Одиниці вимірювання всіх інших фізичних величин встановлюють за допомогою основних одиниць, беручи за основу фізичний закон, який пов’язує між собою нові фізичні величини з еталонними.

Відомі **абсолютні системи одиниць**, в основу яких покладені різні набори величин, які прийняті за основні та для яких встановлені спеціальні еталони. Прикладом такої системи одиниць є так звана системи ***LMT***, яка набула найбільшого поширення у фізиці. В основу такої системи покладені одиниці довжини (***L***), маси (***M***) і часу (***T***). Всі інші одиниці виводяться з цих трьох основних.

Отже, **система одиниць** – це сукупність незалежних і похідних одиниць, які охоплюють всі чи деякі частини вимірів, створена так, що співвідношення між одиницями визначають рівняннями залежності, за винятком відносин між одиницями вибраними незалежними.

Розглянемо деякі основні визначення.

Значення фізичної величини – оцінка розміру фізичної величини у вигляді деякого числа прийнятих для неї одиниць вимірювання.

Істинне значення фізичної величини – значення фізичної величини, яке ідеальним чином відображає у якісному і кількісному відношенні відповідну фізичну величину.

Експериментально визначити істинне значення фізичної величини неможливо внаслідок присутності різного роду похибки вимірювання.

Дійсне значення фізичної величини – близьке до реального (істинного) значення фізичної величини, знайдене експериментальним шляхом. У вимірюваннях може замінити істинне значення фізичної величини.

Одиниця фізичної величини – фізична величина фіксованого розміру, якій умовно присвоєне стандартне значення рівне одиниці. Використовується для кількісного виразу однорідних фізичних величин.

Сукупність головних та похідних одиниць називають **системою одиниць фізичних величин**.

В процесі експериментальних досліджень науковці найчастіше зустрічаються з чотирма типами фізичних величин:

випадковими, постійними, змінними та нестабільними величинами.

Випадкова величина – це фізична величина, пов’язана з випадковими процесами, тому результат окремого вимірювання не може бути передбачений завчасно.

Проте проведення достатньо великої кількості вимірювань випадкової величини дає змогу встановити вплив деяких статистичних закономірностей на результати вимірювань. Виявлення та вивчення цих закономірностей є невід’ємним атрибутом будь-якого наукового експерименту.

Постійна величина – постійні фізичні величини (заряд електрона, швидкість світла у вакуумі). З деяким припущенням постійною величиною можна вважати окремі характеристики конкретного об’єкта, який перебуває під дією фіксованих умов.

Цей тип фізичних величин найчастіше використовують у експериментах, коли визначають довжину зразка, його масу.

Багаторазові вимірювання постійної величини можуть дати не однакові результати. Зумовлено це неконтрольованим впливом багатьох факторів навколишнього середовища. На точність результатів багаторазових вимірювань також впливають неконтрольовані процеси, що мають місце в об’єктах дослідження і у вимірних приладах. Внаслідок цього постійна величина найчастіше проявляє себе як випадкова величина. І, відповідно, результати її вимірювань відображають випадкову природу впливу і відповідають деяким статистичним закономірностям.

Змінна величина – закономірно змінюється з часом внаслідок процесів, що відбуваються в процесі дослідження (наприклад, швидкість складної хімічної реакції).

Вимірювання такої величини в різні моменти часу фіксують величину в нових умовах. Як наслідок, набір результатів одноразових вимірювань є результатом принципово неповторних вимірювань.

Нестабільна величина – змінюється в часі без будь-яких статистичних закономірностей.

Нестабільні величини характеризуються відсутністю, у дослідника, інформації про її залежність від часу. Вимірювання такої величини дають набір даних, які не мають корисної інформації.

Якщо експериментально чи теоретично встановити закономірність зміни нестабільної величини в часі, то її можна перевести в розряд змінних у часі.

3.2 Основні поняття теорії вимірювань

Розглянемо основні визначення теорії вимірювань, які безпосередньо пов'язані з теорією і технологією наукових досліджень.

Вимірювання – інформаційний процес отримання дослідним шляхом чисельного відношення між даною фізичною величиною і деяким її значенням, прийнятим за одиницю порівняння. Вимірювання зменшує вихідну невизначеність значення фізичної величини до рівня неминучої залишкової невизначеності, зумовленої похибкою вимірювання.

При вимірюваннях фізичних величин інформація називається **вимірною**. Зазвичай, інформація про об'єкт вимірювання відома до проведення досліджень і називається **апріорною** інформацією.

Повна відсутність цієї інформації робить неможливим вимірювання взагалі, оскільки невідомо, що треба виміряти і, як наслідок, неможливо вибрати необхідні методики і засоби вимірювання.

Наявність апріорної інформації про об'єкт досліджень в повному обсязі (відомі значення вимірюваної величини) роблять вимірювання непотрібними. Апріорна інформація визначає досяжну точність вимірювань та їх ефективність.

Принцип вимірювання – фізичне явище або сукупність фізичних явищ, покладених в основу вимірювання.

За приклад може слугувати вимірювання температури з використанням термоефекту та інші фізичні явища, що використовуються для проведення експерименту, які повинні бути обрані з врахуванням отримання необхідної точності вимірювання.

Засіб вимірювань – технічний пристрій, який використовується в експерименті для вимірювань і для якого характерною є нормативна точність

Кількісна інформація, отримана шляхом вимірювання, являє собою вимірювальну інформацію.

Вимірювальна інформація – кількісні відомості про властивість або властивості матеріального об’єкта, явища або процесу, отримані з використанням засобів вимірювань внаслідок взаємодії з об’єктом.

Кількість вимірювальної інформації – чисельна міра зменшення невизначеності кількісної оцінки властивостей об’єкта. Взаємодія об’єкта дослідження і засобів вимірювань у процесі експерименту припускає наявність сигналів, що є носіями інформації. Важливими носіями інформації є електричний струм, напруга, імпульси та інші електричні параметри.

Вимірювальний сигнал – сигнал, функціонально пов'язаний з вимірюваною фізичною величиною із заданою точністю.

Метод вимірювання – сукупність прийомів використання принципів і засобів вимірювань. Важливе значення у вимірювальній техніці має єдність вимірів.

Єдність вимірювань – стан вимірювань, за якого результати виражені в зазначених одиницях, а похибки вимірювань відомі із заданою імовірністю.

Єдність вимірювань дає змогу порівнювати результати різних експериментів, проведених у різних умовах, виконаних у різних місцях з використанням різних методів і засобів вимірювань.

Результат вимірювання фізичної величини – значення фізичної величини отримане шляхом її вимірювання.

Відтворюваність результатів вимірювань –

повторюваність (у межах встановленої похибки) результатів вимірювань однієї і тієї ж величини, отриманих у різних місцях, різними засобами, різними операторами, у різний час, але приведені до тих самих умов вимірювань (температури, тиску, вологості та ін.).

Розмах результатів вимірювань R_n – одна з найпростіших оцінок розсіювання результатів одиничних вимірювань фізичної величини x, що утворять ряд з n послідовних вимірів, які обчислюються за формулою

$$R_n = x_{\max} - x_{\min}. \tag{3.3}$$

Збіжність результатів вимірювань – характеристика якості вимірів, яка відображає близькість один одному результатів вимірювань однієї і тієї ж величини, виконаних повторно тими самими засобами, тим же методом, в однакових умовах і з однаковою старанністю

Правильність результату вимірювань – характеристика якості виміру, яка відображає близькість до нуля систематичних похибок результату.

Похибка вимірювання – це відхилення результату вимірювання від істинного значення вимірюваної величини. Похибка вимірювання є безпосередньою характеристикою точності виміру. Значення похибка вимірювання залежить від досконалості технічних пристроїв, способу їхнього використання й умов проведення експерименту.

Точність вимірювання – ступінь близькості результату вимірювання до істинного значення вимірюваної фізичної величини і характеризує близькість до нуля похибки його результату.

Вимірювальний експеримент – науково обґрунтований дослід для отримання кількісної інформації з очікуваною або можливою точністю визначення результату вимірювань. Проведення вимірювального експерименту припускає наявність технічних пристроїв, що можуть забезпечити задану точність отримання результату. Технічні пристрої, що беруть участь в експерименті, заздалегідь нормуються за показниками точності і належать до засобів вимірювання.

3.3 Методи вимірювань

Сукупність прийомів використання принципів і засобів вимірювання називається – **метод вимірювання**. Методи вимірювань визначаються фізичним характером вимірюваної фізичної величини, необхідною точністю вимірювань, необхідною швидкістю вимірювань, умовами.

Відомі такі методи вимірювання:

- безпосередньої оцінки;
- порівняння з мірою;
- диференційний;
- нульовий;
- заміщення;
- збігу.

Методом **безпосередньої оцінки** результат вимірювання визначається за допомогою шкали пристрою засобу вимірювання. Цей метод найбільше поширений у вимірювальній техніці, на ньому ґрунтуються всі стрілкові пристрої. Проте недоліком цього методу є низька точність, зумовлена використанням мір обмеженої точності.

Метод **порівняння з мірою –** вимірювану величину з певною періодичністю або в кожному досліді порівнюють з мірою. Результат вимірювання (порівняння) оцінюється за допомогою пристрою, який порівнює, наприклад, вимірювання маси на вагах за допомогою гир, або вимірювання за допомогою компенсаційних приладів, у яких періодично встановлюється точне значення міри (робочий струм у компенсаторах).

Диференціальний метод – на вхід засобу вимірювання подається різницевий сигнал між вимірюваною величиною та мірою. Для методу характерна достатньо висока точність. Сферою застосування є перевірочні схеми та установки.

Для цього методу, якщо різниця між вимірюваною величиною та мірою становить 0,1 % і використовуються засоби вимірювання з похибкою 1 %, то загальна похибка дорівнює 0,001 %.

Нульовий метод – різницю між вимірюваною величиною та мірою за допомогою спеціального пристрою доводять до нульового значення за допомогою порівнювального пристрою.

Метод заміщення – вимірювана величина визначається шляхом заміщення її відомим еталоном.

Метод збігу (або метод «ноніуса») застосовується тоді, коли вимірювана величина менша ціни поділки заданої міри. Застосовують дві міри з різними цінами поділки, що відрізняються на розмір оцінюваного розряду відліку.

3.4 Похибки вимірюваного параметру

Будь-яка числова інформація має цінність тільки тоді, коли відома **величина похибки вимірювання**.

Похибки вимірних приладів можуть класифікуватися як випадкові та систематичні.

Випадкові похибки – похибки, які можуть змінюватися випадковим чином при послідовному вимірюванні однієї і тієї ж величини.

Систематичні похибки – похибки, які не змінюються від вимірювання до вимірювання.

Розглянемо основні джерела таких похибок у вимірних системах.

Випадкові похибки:

- **Інструментальні похибки.** Цей вид похибок проявляється у багатьох випадках, наприклад, під час зчитування показу із шкали, якщо шкала і стрілка не знаходяться в одній площині.

- **Похибки, зумовлені впливом навколишнього середовища.** Ці похибки можуть збільшуватись внаслідок зміни навколишніх умов (зміна температури, поява електромагнітного впливу).

- **Стохастичні похибки.** З’являються внаслідок стохастичних процесів, таких як шум. Стохастичні процеси є однією з причин випадкових збуджень.

Систематичні похибки:

– **Конструкційні похибки –** зумовлені технологією виробництва на заводі-виготовлювачі і пов'язані з допустимим розмахом у розмірах деталей і значеннях електричних компонентів, що використовуються в приладі;

– **Похибки апроксимації –** виникають внаслідок зроблених припущень щодо залежностей між величинами.

Наприклад, лінійна залежність між двома величинами часто лише припускається, а на практиці це припущення може виявитись лише апроксимацією до істинного значення;

– **Похибка старіння –** виникає внаслідок старіння приладів, оскільки деталі зношуються і їх характеристики змінюються;

– **Похибки підключення –** виникають, якщо включення приладів у вимірне коло спричинює зміну значення вимірної величини.

Наприклад, включення амперметра в електричне коло, для вимірювання струму в ньому, призводить до зміни струму в цьому колі через опір самого амперметра.

– **Похибка вимірювання** – відхилення результату вимірювання від істинного значення вимірюваної величини. Оскільки істинне значення вимірюваної величини невідоме, то для кількісної оцінки похибки користуються дійсним значенням фізичної величини.

За **формою кількісного вираження** похибки вимірювання поділяються на **абсолютні**, **відносні** та **приведені**.

Абсолютна похибка – відхилення результату вимірювань від істинного значення, що виражається в одиницях вимірюваної величини:

$$\Delta = Y(x) - x \,. \tag{3.4}$$

Абсолютна похибка характеризує величину і знак отриманої похибки, але не визначає якість самого вимірювання.

Приклад. Істинне (справжнє) значення досліджуваної величини $\boldsymbol{U}$ = 145 В. В процесі вимірювань отримано значення $\boldsymbol{U}$ = 143,5 В, абсолютна похибка вимірювання досліджуваної величини дорівнює:

$$\Delta = 143{,}5 - 145 = -1{,}5 \text{, В.}$$

Щоб отримати можливість порівнювати якість вимірювань, використовують відносну похибку.

Відносна похибка – відношення абсолютної похибки результату вимірювань до істинного значення вимірюваного значення:

$$\delta = \frac{\Delta}{x}, \left(\delta = \frac{\Delta}{x} \cdot 100\%\right). \qquad (3.5)$$

Приклад. В процесі досліджень було виконано три вимірювання. В першому випадку вимірювали відстань між містами $\boldsymbol{h_1}$ = 50 км з похибкою $\boldsymbol{\Delta_1}$ = 0,5 км, в другому – товщину сталевої пластини $\boldsymbol{h_2}$ = 0,5 мм м з похибкою $\boldsymbol{\Delta_2}$ = 10 мкм, в третьому – висоту приміщення $\boldsymbol{h_3}$ = 4 м з похибкою $\boldsymbol{\Delta_3}$ = 1 см.

Розв'язок. Абсолютні похибки дають змогу оцінити, в якому випадку точність вимірювання була вищою. Для цього необхідно знайти відносні похибки проведених вимірювань:

– відстань між містами $\delta = \dfrac{0{,}5км}{50км} \cdot 100\% = 1{,}0\%$;

– відстань між містами $\delta = \dfrac{10 \cdot 10^{-3} мм}{0{,}5мм} \cdot 100\% = 2{,}0\%$;

– відстань між містами $\delta = \dfrac{1 \cdot 10^{-2} км}{4м} \cdot 100\% = 0{,}25\%$;

Аналіз отриманих результатів дозволив констатувати, що з найвищою точністю були проведені вимірювання висоти кімнати ($\boldsymbol{\delta}$ = 0,25%).

Мірою точності вимірювання слугує показник, зворотний модулю відносної похибки:

$$k_T = \frac{1}{|\delta|}. \qquad (3.6)$$

Приведена похибка – виражає потенційну точність вимірювань, називається відношенням абсолютної похибки до деякого нормуючого значення (кінцеве значення шкали приладу, межа вимірювань):

$$\gamma = \frac{\Delta}{x_N}100\% . \qquad (3.7)$$

Приклад. Встановити межі приведеної похибки для амперметра на $\boldsymbol{I_к}$ = 5А, класу точності 0,5.

Розв'язок. Клас точності 0,5 – межі приведеної (для нормальних умов) похибки до $\boldsymbol{I_к}$ = 5А становлять ±0,5%. Відповідно, незалежно від показів амперметра:

$$\Delta = \pm\frac{0{,}5\% \cdot 5A}{100\%} = \pm 0{,}025A \cdot$$

Основна похибка цифрових приладів. Для цифрових приладів клас точності, зазвичай, відображений двома числами записаними через косу риску: ***c/d***, звичайно (***c***>***d***).

Числа відображають виражені у відсотках межі приведеної похибки відповідно: ***d*** – *н*а початку (нульовий показ *x = 0*), та *c* – вкінці межі вимірювання (показ $\boldsymbol{x_n = X_N}$):

$$d = \left|\frac{\Delta(x_n = 0)}{X_N}\right| \cdot 100\% ; \quad c = \left|\frac{\Delta(x_n = X_N}{X_N}\right| \cdot 100\% . \qquad (3.8)$$

Для проміжних показів ($0 < x_n < X_N$) межі приведеної похибки приладу змінюються лінійно. Таке нормування зумовлено тим, що для цифрових приладів характерна як адитивна (незалежна від значення вимірюваної величини), так і мультиплікативна (що лінійно, прямо пропорційно залежить від значення вимірюваної величини) похибки.

Відповідно до означення зведеної похибки за класом точності (***c/d***), показом $\boldsymbol{x_n}$ межею вимірювання $\boldsymbol{X_N}$ в явному вигляді можна встановити межі похибок:

– абсолютної:

$$\Delta = \pm\frac{d \cdot X_N + (c-d) \cdot x_n}{100\%} ; \qquad (3.9)$$

– відносної

$$\delta = \pm\left[c + d \cdot \left(\frac{X_N}{x_n} - 1\right)\right], \% \qquad (3.10)$$

Отже якщо клас точності цифрового приладу нормується у формі приведеної похибки двома числами, межі його основної абсолютної похибки лінійно зменшуються зі зменшенням показу. Межі відносної похибки хоча зростають зі зменшенням показу, але не так швидко, як у аналогових приладах.

Приладом класу точності ***c/d*** неможливо виміряти величину з відносною похибкою, меншою за ***c***.

За **характером прояву** похибки вимірювань поділяються на три класи:

- систематичні;
- випадкові;
- грубі (промахи).

Систематичні похибки – складові похибок вимірювань, залишаються постійними чи закономірно змінюються в процесі багаторазових вимірювань однієї і тієї ж величини в однакових умовах.

Випадкові похибки – складові похибок вимірювання, змінюються випадковим чином за значення і за знаком в процесі повторних вимірювань однієї і тієї ж фізичної величини в однакових умовах.

Випадкові похибки практично незворотні, їх неможливо усунути і вони завжди присутні в результатах вимірювань. Проте їх можна зменшити шляхом багаторазового вимірювання фізичної величини і наступного статистичного опрацювання отриманих результатів.

Грубі похибки (промахи) – похибки, що перевищують очікувані за даних умов вимірювань. Грубі похибки виникають внаслідок помилок оператора чи неврахованих зовнішніх впливів. Внаслідок багаторазових вимірювань промахи виявляються в процесі опрацювання результатів і виключаються із розгляду, використовуючи деякі правила.

Якщо не враховувати промахи, абсолютна похибка вимірювання має систематичну та випадкову складові:

$$\Delta = \Delta_{сист} + \Delta_{вип} . \tag{3.11}$$

За **причинами виникнення** похибки вимірювання поділяються на:

- методичні;
- інструментальні;
- зовнішні;
- суб’єктивні.

Методичні похибки – виникають внаслідок недосконалості методу вимірювання, некоректності алгоритмів чи методик, за якими проводиться розрахунок результатів вимірювань, відмінності прийнятої моделі об’єкта вимірювань від тієї, яка правильно описує його властивості, що визначаються за допомогою вимірювань. А також через вплив вибраного засобу вимірювання на змінні параметри сигналів.

Інструментальні похибки – виникають внаслідок недосконалості засобів вимірювання. Джерелами інструментальних похибок можуть бути: зміщення нуля, варіації показів приладу в процесі експлуатації.

Зовнішня похибка – складова похибки вимірювання, пов’язана з відхиленням однієї чи декількох величин, які впливають на процес, від нормального значення чи їхній вихід за межі нормальної області (температура, вологість, нестабільність джерел енергії).

Суб’єктивна похибка – виникає внаслідок помилок оператора в процесі роботи з показниками засобів вимірювання.

За **характером поведінки** вимірюваної величини в процесі вимірювання розрізняють:

- статичні похибки;
- динамічні похибки.

Статичні похибки – виникають в процесі вимірювання сталого значення вимірюваної фізичної величини.

Динамічні похибки – виникають в процесі динамічних вимірювань, коли вимірювана величина змінюється в часі і потрібно встановити закон її зміни.

Причина виникнення динамічних похибок криється у невідповідності швидкісних (часових) характеристик приладу і швидкості зміни вимірюваної величини.

3.5 Формування результату вимірювання математичної моделі

Результат вимірювань являє собою випадкову величину структури:

$$Y(x) = kx + kF + H\ . \qquad (3.12)$$

де kx – мультиплікативна складова результату вимірювання (k – коефіцієнт чутливості засобів вимірювання СІ);

kF – адитивна випадкова складова результату вимірювання, зумовлена збудженням, що діє на вимірювану величину x на вході засобів вимірювання;

H – адитивна складова, зумовлена збудженням, що діє на вимірювану величину x на виході засобів вимірювання (заокруглення (квантування) результатів вимірювань, суб'єктивні помилки оператора).

Формування результату вимірювання, поданого за виразом (3.12), можна зобразити у вигляді структурної схеми (рис. 3.2).

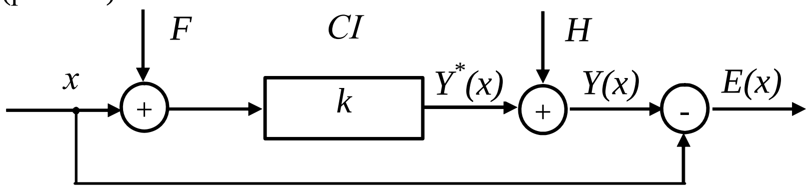


Рис. 3.2. Структурна схема формування результату похибки вимірювання

Похибка результату вимірювання, сформованого за виразом (3.9) для схеми рис. 3.2, рівна:

$$E(x) = Y(x) - x = kx + kF + H - x = (k-1)x + kF + H\ . \qquad (3.13)$$

де $(k$-$1)x$ – мультиплікаційна складова похибки;

kF – адитивна випадкова складова, зумовлена випадковим збудженням, що діє на вході засобів вимірювання;

H – адитивна складова, зумовлена випадковим збудженням, що діє на виході засобів вимірювань.

Особливість мультиплікативної похибки полягає в її залежності від значення вимірюваної величини. Причина появи полягає в тому, що розмір одиниці величини, відтворюваної засобом вимірювання, не рівний одиниці.

Особливості адитивних складових похибки полягають в тому, що вони не залежать від вимірюваної величини. Причинами їх появи є адитивні збудження, що діють на вході і виході засобів вимірювання. Вони визначаються адитивними складовими результату вимірювання.

3.6 Визначення мінімальної кількості вимірювань

Першочерговим завданням, яке стоїть перед дослідником, в процесі планування експериментальних досліджень є встановлення достатньої мінімальної кількості вимірювань, за яких забезпечується одержання з необхідною точністю достовірної інформації про об’єкт дослідження.

Завдання зводиться до встановлення мінімальної кількості вимірювань $\boldsymbol{N_{\min}}$ при заданих значеннях довірчого інтервалу $\boldsymbol{2\mu}$ і довірчої імовірності $\boldsymbol{P_{д}}$.

Довірчим інтервалом називається інтервал значень $\boldsymbol{x_i}$, у який потрапляє істинне значення $\boldsymbol{x_{iст}}$, вимірюваної величини з заданою імовірністю.

Довірчою імовірністю (вірогідністю) вимірювання називається імовірність того, що істинне значення вимірюваної величини потрапляє в даний довірчий інтервал, тобто в зону $\boldsymbol{x_{\min} \le x_{iст} \le x_{\max}}$. Довірчий інтервал $\boldsymbol{\mu}$ похибки вимірювання величини $\boldsymbol{x_{iст}}$ може бути визначений з використанням інтегральної функції Лапласа (3.14):

$$\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_0^{t_i} \left[\exp\left(-\frac{t^2}{2} \right) \right] \cdot dt\,, \qquad (3.14)$$

де t – аргумент функції Лапласа дорівнює відношенню значення довірчого інтервалу μ до середньоквадратичного відхилення σ, тобто:

$$t = \frac{\mu}{\sigma}. \qquad (3.15)$$

При виконанні вимірювань необхідно знати їхню похибку:

$$\delta = \frac{\sigma_0}{m_x} = \frac{\sigma}{m_x \cdot \sqrt{n}}, \qquad (3.16)$$

де σ_0 – середньоарифметичне значення середньо квадратичного відхилення σ, рівне $\sigma_0 = \sigma / \sqrt{n}$.

Значення $\boldsymbol{\sigma_0}$ називають середньою похибкою. Довірчий інтервал похибки вимірювання $\boldsymbol{\delta}$ визначається аналогічно для вимірювань ($\mu = t \cdot \sigma_0$). За допомогою $\boldsymbol{t}$ легко визначити довірчу імовірність похибки вимірювання з таблиці 3.1.

Збільшуючи кількість вимірювань $\boldsymbol{n}$ навіть з незмінною їхньою точністю, можна збільшити надійність довірчих оцінок або звузити довірчий інтервал для істинного значення вимірюваної величини. Необхідну кількість вимірів для досягнення потрібної точності ($1 - \varepsilon / x_{іст}$) і надійності $\boldsymbol{P_д}$ можна визначити заздалегідь тільки в тому разі, коли відома середня квадратична похибка вимірювань (вимірювання передбачаються рівноточними і незалежними).

Таблиця 3.1

Значення інтегралу імовірності Ф(*t*)

t	Ф(*t*)	*t*	Ф(*t*)	*t*	Ф(*t*)	*t*	Ф(*t*)	*t*	Ф(*t*)
0,1	0,0398	1,1	0,3643	2,1	0,4821	3,1	0,49903	4,1	0,499979
0,2	0,0793	1,2	0,3849	2,2	0,4861	3,2	0,49931	4,2	0,499987
0,3	0,1179	1,3	0,4032	2,3	0,4893	3,3	0,49952	4,3	0.499991
0,4	0,1554	1,4	0,4192	2,4	0,4918	3,4	0,49966	4,4	0,499995
0,5	0,1915	1,5	0,4332	2,5	0,49379	3,5	0,499767	4,5	0,4999966
0,6	0,2257	1,6	0,4452	2,6	0,49534	3,6	0,499841	4,6	0,4999979
0,7	0,2580	1,7	0,4554	2,7	0,49653	3,7	0,499892	4,7	0,4999987
0,8	0,2881	1,8	0,4641	2.8	0,49744	3,8	0,499927	4,8	0,4999992
0,9	0,3159	1,9	0,4713	2,9	0,49813	3,9	0,499952	4,9	0,4999995
1,0	0,3413	2,0	0,4772	3,0	0,49865	4,0	0,499968	5,0	0,4999997

У цьому випадку кількість вимірювань для отримання довірчої оцінки похибки ($\varepsilon > |x_{іст} - x_{ср}|$) із заданою надійністю $\boldsymbol{P_д}$

визначається за допомогою формули:

$$\left| x_{i\text{ст}} - x_{\text{ср}} \right| < \sigma \cdot \frac{t(P_{\text{д}})}{\sqrt{\text{n}}}, \tag{3.17}$$

або

$$\left| x_{i\text{ст}} - x_{\text{ср}} \right| < \sigma \cdot \frac{\alpha_{\text{ст}}}{\sqrt{\text{n}}}, \tag{3.18}$$

де t ($P_{\text{д}}$) – знаходить з таблиці 3.3 значень інтегральної функції Лапласа;

$\alpha_{\text{ст}}$ – коефіцієнт Стьюдента, прийнятий з таблиці 3.2 залежно від значення довірчої імовірності $P_{\text{д}}$ і кількості вимірювань n.

Таблиця 3.2

Розподіл Стьюдента. Значення $t = t$ ($P_{\text{Д}}$, k)

k	$P_{\text{Д}}$				
	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
1	2	3	4	5	6
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,812	2.228	2,764	3,169	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
18	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
35	1,689	2,030	2,437	2,724	3,591

продовження таблиці 3.2

1	2	3	4	5	6
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
45	1,679	2,014	2,412	2,689	3,522
50	1,676	2,008	2,403	2,677	3,497
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
70	1,667	1,995	2,381	2,648	3,436
80	1,664	1,990	2,374	3,639	3,416
90	1,662	1,987	2,368	2,632	3,401
100	1,660	1,984	2,364	2,626	3,391
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Інтегральна функція Лапласа використовується за кількісті вимірювань ***n*** > 30, а при ***n*** < 30 – функція Стьюдента (див. табл. 3.2). Використовуючи (3.17) отримуємо вираз для визначення мінімально необхідної кількості вимірювань:

$$N_{\min д} \geq \left[t(P) \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon} \right]^2 . \qquad (3.19)$$

Якщо середня квадратична похибка вимірювань заздалегідь невідома, але відомий хоча б її порядок, то необхідну кількість вимірювань можна визначити в залежності від надійності $\boldsymbol{P_д}$ і відношення (q = ε/s, де ***s*** – майбутній емпіричний стандарт похибки). Для визначення кількості $\boldsymbol{N_{\min}}$ в залежності від $\boldsymbol{P_д}$ і ***q*** застосовується табл. 3.4.

Наприклад, щоб гарантувати отримання довірчої оцінки істинного значення з надійністю $\boldsymbol{P_д}$ = 0,99 у діапазоні $0{,}5 \cdot s$, треба зробити 31 вимірювання.

На практиці часто можна обмежитися меншою кількістю вимірювань, якщо застосувати такий прийом. Спочатку потрібно зробити порівняно невелику кількість вимірювань (у 3-4 рази меншу зазначеної в таблиці). За результатами цих вимірювань розрахувати довірчий інтервал. Потім уточнити потрібну кількість вимірювань з тих міркувань, що зменшення довірчого інтервалу в $\boldsymbol{\lambda}$ разів забезпечується збільшенням кількості вимірювань у λ^2 разів (наприклад, зменшення довірчого інтервалу в 2 рази забезпечується збільшенням кількості вимірювань у 4 рази).

Таблиця 3.3

Інтегральна функція Лапласа

t	$P_Д$	t	$P_Д$	t	$P_Д$	t	$P_Д$
1	2	3	4	5	6	7	8
0,10	0,0797	0,90	0,6319	1,70	0,9109	2,748	0,994
0,15	0,1192	0,95	0,6579	1,75	0,9199	2,807	0,995
0,20	0,1585	1,00	0,6827	1,80	0,9281	2,878	0,996
0,25	0,1974	1,05	0,7063	1,85	0,9357	2,968	0,997
0,30	0,2357	1,10	0,7287	1,90	0,9426	3,000	0,9973
0,35	0,2737	1,15	0,7419	1,95	0,9488	3,090	0,998
0,40	0,3108	1,20	0,7699	1,96	0,9500	3,291	0,999
0,45	0,3473	1,25	0,7887	2,00	0,9545	3,320	0,9991
0,50	0,3829	1,30	0,8064	2,054	0,960	3,353	0,9992
0,55	0,4177	1,35	0,8230	2,170	0,970	3,390	0,9993
0,60	0,4515	1,40	0,8385	2,250	0,9756	3,432	0,9994
0,65	0,4843	1,45	0,8529	2,326	0,980	3,481	0,9995
0,70	0,5161	1,50	0,8664	2,500	0,9876	3,540	0,9996
0,75	0,5467	1,55	0,8789	2,612	0,991	3,615	0,9997
0,80	0,5763	1,60	0,8904	2,652	0,992	3,720	0,9998
0,85	0,6047	1,65	0,9011	2,697	0,993	3,891	0,9999

Таблиця 3.4

Мінімальна кількість вимірювань N_{min} в залежності від $P_д$ та q

$q = \varepsilon / s$	Значення імовірності надійності $P_д$				
	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
1,0	5	7	9	11	17
0,5	13	18	25	31	50
0,4	19	27	37	46	74
0,3	32	46	64	78	127
0,2	70	99	139	171	277
0,1	273	387	545	668	1089
0,05	1084	1540	2168	2659	4338

Приклад. Для наведених у таблиці 3.5 результатів експериментального визначення витрати палива довірча оцінка істинного значення $\boldsymbol{x}_{\text{іст}}$ деякої величини за результатами $\boldsymbol{n}$ = 10 середнє значення $\boldsymbol{x}_{\text{ср}}$ = 11,27 л/100 км. Стандарт s^* становить:

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} \left(x_i - x_{\text{ср}}\right)^2} = 0{,}452, \text{ л/100 км.}$$

За таблицею 4.2 визначаємо коефіцієнт Стьюдента з довірчою імовірністю $\boldsymbol{P}_{\text{д}}$ = 0,99 $\boldsymbol{\alpha}_{\text{ст}}$ = 3,35 і отримуємо довірчу оцінку істинного значення $\boldsymbol{x}_{i\text{ст}}$ у вигляді:

$$\left|x_{i\text{ст}} - x_{\text{ср}}\right| = \left|x_{i\text{ст}} - 11{,}27\right| < \frac{3{,}35 \cdot 0{,}452}{10^{1/2}} = 0{,}479, \text{ л/100 км.}$$

Таблиця 3.5

Результати експериментального визначення витрати палива

№	Qi, л/100км	№	Qi, л/100км	№	Qi, л/100км	№	Qi, л/100км	№	Qi, л/100км	№	Qi, л/100км
1	10,8	6	11,9	11	10,6	16	11,5	21	11,4	26	11,1
2	11,2	7	11,0	12	12,2	17	10,5	22	12,0	27	11,3
3	11,4	8	11,7	13	11,3	18	11,8	23	11,5	28	11,5
4	10,3	9	11,4	14	11,0	19	11,4	24	11,3	29	10,9
5	11,3	10	11,7	15	12,0	20	10,9	25	11,6	30	11,8

Таким чином, з надійністю $\boldsymbol{P}_{\text{д}}$ = 0,99 можна вважати, що значення $\boldsymbol{x}_{i\text{ст}}$ знаходиться в інтервалі (10,79…11,75).

Обчислимо середньоквадратичне відхилення результатів визначення витрати палива для 10 вимірювань:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{10-1} \cdot \sum_{i=1}^{10} \left(x_i - x_{\text{ср}}\right)^2} = 0{,}476, \text{ л/100 км.}$$

У даному випадку для відношення:

$$q = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{0{,}479}{0{,}476} = 1{,}006.$$

мінімальна кількість вимірювань з $\boldsymbol{P}_{\text{д}}$ = 0,99 $\boldsymbol{N}_{\text{min}}$ = 11.

Якщо за цією ж надійністю ми хочемо оцінити $\boldsymbol{x}_{i\text{ст}}$ із похибкою до $0{,}5 \cdot \boldsymbol{\sigma}$, тобто зменшити довірчий інтервал у 2 рази, то ми повинні довести кількість вимірювань до $\boldsymbol{N}_{\text{min}}$ = 31.

Зауважимо, що більший ефект дає збільшення точності окремих вимірювань.

У дослідженнях часто за заданою похибкою $\boldsymbol{\delta}$ і довірчою імовірністю вимірювань $\boldsymbol{P}_{д}$ визначають мінімальну кількість вимірювань, що гарантують необхідні значення $\boldsymbol{\delta}$ і $\boldsymbol{P}_{д}$.

Для визначення $\boldsymbol{N}_{\mathbf{min}}$ застосовується така послідовність розрахунків:

- проводиться попередній експеримент із кількістю вимірювань, що становить в залежності від трудомісткості досліду від 20 до 50;
- обчислюється середньоквадратичне відхилення $\boldsymbol{\sigma}$ за формулою:

$$s = h \cdot \sqrt{\left(\frac{s^*}{h}\right)^2 - \frac{1}{12}},$$

де h – довжина інтервалу (у 2-3 рази менша, ніж s).

- відповідно до поставлених завдань експерименту встановлюється припустима похибка вимірювань $\boldsymbol{\delta}$, яка не повинна перевищувати клас точності вимірювального приладу;
- встановлюється нормоване відхилення $\boldsymbol{t}$, значення якого звичайно задається (залежить також від точності методу);
- за формулою (3.19) визначають $\boldsymbol{N}_{\mathbf{min}}$, і надалі в процесі експерименту кількість вимірювань не повинна бути меншою за $\boldsymbol{N}_{\mathbf{min}}$.

3.7 Подання результату вимірювання

Отримані експериментальні результати, присутні похибки, емпіричні результати, як і будь-яка інша вимірювальна інформація, супроводжуються точністю вимірювання.

Поширена помилка оцінки результатів і похибок вимірювань – запис з великим числом значущих цифр. Цьому сприяє використання для розрахунків обчислювальної техніки, що дає змогу отримувати результати розрахунку з чотирма і більше значущими цифрами. Проте похибки вимірювань не завжди потрібно знати з такою точністю.

Для технічних вимірювань допустимою вважається похибка оцінки похибки в межах 15-20%. Для прикладу, похибка 0,4359 для результату 12,7254. В числових показниках точності вимірювань та похибці повинно бути не більше двох значущих цифр. У процесі запису найменші розряди числових значень результату вимірювань і числових показників точності повинні бути однакові.

У наведеному прикладі оцінка похибки повинна бути записана як 0,44 чи 0,4, а результат вимірювань – 12,73 або 12,7 відповідно. Похибка заокруглення похибки у першому випадку складе 1,4%, в другому – 8,2%.

Існують правила заокруглення отриманих результатів і похибок вимірювань:

1. Результати вимірювань заокруглюються до того ж десятого знаку, яким закінчується заокруглення значення абсолютної похибки. Зайві цифри в цілих цифрах замінюються нулями. Якщо десятковий дріб в числовому значенні результату вимірювань закінчується нулями, то нулі відкидаються до того розряду, який відповідає розряду числового значення похибки. Наприклад, результат 4,08000, похибка 0,003, результат заокруглюємо до 4,080.

2. Якщо цифра старшого із розрядів, що відкидається менша 5, то інші цифри числа не змінюються. Зайві цифри в цілих числах замінюються нулями, в десяткових дробах відкидаються. Наприклад, число 286744 зі збереженням чотирьох значущих цифр повинне бути заокруглене до 286700, число 286,744 – до 286,7.

3. Якщо цифра старшого із розрядів, що відкидається більша чи рівна 5, і за нею наступні цифри відрізняються від нуля, то останню збережену цифру збільшують на одиницю. Наприклад, зберігаючи три значущі цифри число 28675 заокруглюють до 28700, число 28,675 – до 28,7.

4. Якщо цифра, що відкидається 5, а наступні за нею цифри невідомі чи нулі, то останню збережену цифру не змінюють, якщо вона парна, і збільшують на одиницю, якщо вона непарна. Наприклад, число 232,5 при збереженні трьох значущих цифр заокруглюють до 232, а число 233,5 до 234.

5. Похибка результату вимірювань вказується двома значущими цифрами, якщо перша з них рівна 1 чи 2, і однією значущою цифрою, якщо цифра рівна 3 і більше.

6. Заокруглення здійснюють лише в кінцевому варіанті, а всі попередні розрахунки проводять з одним чи двома зайвими знаками.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте визначення фізичної величини.

2. Перерахуйте основні типи фізичних величин. Дайте характеристику кожному типу.

3. Перерахуйте методи вимірювань. Дайте характеристику кожному методу.

4. Що називається похибкою вимірювань?

5. Наведіть класифікацію похибок за формою кількісного вираження.

6. Наведіть класифікацію похибок за характером їх поведінки в часі.

7. Наведіть класифікацію похибок за причиною виникнення.

8. Наведіть математичну модель результату вимірювання.

9. Наведіть математичну модель похибки вимірювання.

10 Які особливості адитивної та мультиплікативної складових похибки вимірювання?

11. Як скласти алгоритм встановлення мінімальної кількості вимірювань під час проведення наукових досліджень ?

12. Поясніть причину виникнення під час проведення наукових досліджень похибок вимірювань і наведіть їх класифікацію.

4 ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ОПРАЦЮВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

4.1 Випадкові величини та їх характеристики

Під **випадковою величиною** розуміють величину, яка в результаті експериментальних досліджень приймає значення, яке принципово неможливо передбачити з огляду на умови досліду. Випадкова величина володіє набором допустимих значень, але в результаті кожного окремого досліду приймає лише одне з них. На відміну від невипадкових величини, які змінюють своє значення лише зі зміною умов експерименту, випадкова величина може приймати різні значення за незмінного комплексу головних факторів.

Для того, щоб охарактеризувати випадкову величину, необхідно задати набір її допустимих значень. Між випадковими подіями та випадковими величинами існує тісний зв'язок. Випадкова подія є якісною характеристикою випадкового результату досліду, а випадкова величина – його кількісною характеристикою. Розрізняють **дискретні** та **неперервні** випадкові величини. Можливі значення дискретних випадкових величин можна завчасно перерахувати. Значення неперервної випадкової величини неможливо завчасно перерахувати, вони безперервно заповнюють деякий проміжок.

Найбільш загальною характеристикою випадкової величини є закон її розподілу.

Нехай випадкова величина $\boldsymbol{X}$ приймає значення $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n}$. Відношення числа дослідів $\boldsymbol{m}$, в процесі проведення яких випадкова величина $\boldsymbol{У}$ прийняла значення $\boldsymbol{x_i}$, до загальної кількості дослідів $\boldsymbol{n}$ називається частотою повторення події.

Частота $\boldsymbol{m/n}$ є випадковою величиною та змінюється залежно від числа проведених дослідів. Велика кількість дослідів дає змогу стабілізувати частоту біля деякого значення $\boldsymbol{P_i}$ – **імовірності події** $\boldsymbol{X = x_i}$ (статистичне визначення):

$$P_i = P(X = x_i) \approx m_i / n. \tag{4.1}$$

Сума імовірностей усіх можливих значень дискретної випадкової величини рівна одиниці, оскільки імовірність того, що випадкова величина в результаті дослідження прийме одне із своїх значень – достовірна подія.

Імовірність події $\boldsymbol{X < x_i}$:

$$P(X < x_i) = F(x). \tag{4.2}$$

називається **функцією розподілу** випадкової величини.

Густина розподілу імовірностей випадкової величини X називається функція:

$$P(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{4.3}$$

Зв'язок між функцією розподілу $\boldsymbol{F(x)}$ та густиною розподілу визначається за виразом:

$$F(x) = P(-\infty \le X \le x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx. \tag{4.4}$$

Опис випадкових величин з використанням законів розподілу $\boldsymbol{P(x)}$ є найповніший, проте експериментальне визначення цих законів вимагає значних затрат часу.

В більшості практичних випадків немає потреби описувати випадкову величину повністю, достатньо охарактеризувати числами лише окремі її властивості. Такі числові характеристики в теорії імовірності та математичній статистиці називають **моментами**.

Для аналізу закону розподілу ***P***(***x***) використовують, найчастіше, моменти 1-го та 2-го порядків.

Початковий момент 1-го порядку (**математичне сподівання** випадкової величини) характеризує центр розподілу ***P***(***x***) та визначається за виразом:

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \,. \tag{4.5}$$

Центральний момент 2-го порядку (**дисперсія** випадкової величини) характеризує розсіювання випадкової величини та розраховується:

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^2 \, p(x)dx \,. \tag{4.6}$$

Оскільки дисперсія має розмірність квадрату випадкової величини, тому використовується **середнє квадратичне відхилення** (СКВ) $\sigma = \sqrt{D}$, що має розмірність випадкової величини.

4.2 Закони розподілу випадкових величин

Розглянемо найбільш важливі для теорії планування експерименту закони розподілу.

4.2.1 Нормальний закон розподілу випадкової величини

Випадкова величина ***X*** розподілена за нормальним законом (законом Гауса), якщо її густина імовірності має вигляд:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left[-(x-m_1)^2/(2\sigma^2)\right]}. \qquad (4.7)$$

Необхідно ввести в рівняння (5.7) випадкову величину ***t***:

$$t = \frac{x - m_1}{\sigma}. \qquad (4.8)$$

З врахуванням (4.8) рівняння (4.7) набуде вигляду:

$$P(x) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \cdot e^{\left(-t^2/2\right)}. \qquad (4.9)$$

Крива нормального розподілу (графік функції p(t)) приведена на рис. 4.1. Здійснене перетворення зберігає нормальний закон розподілу, але приводить його до часткового вигляду, який відповідає випадку $\boldsymbol{m_1}$ = 0 і $\boldsymbol{\sigma}$ = 1. Густина нормального розподілу ***P***(***x***) є нормованою (площа під кривою ***P***(***x***) рівна одиниці, зцентрованою (максимум знаходиться при ***t*** = 0), стандартизованою ($\boldsymbol{\sigma}$ = 1).

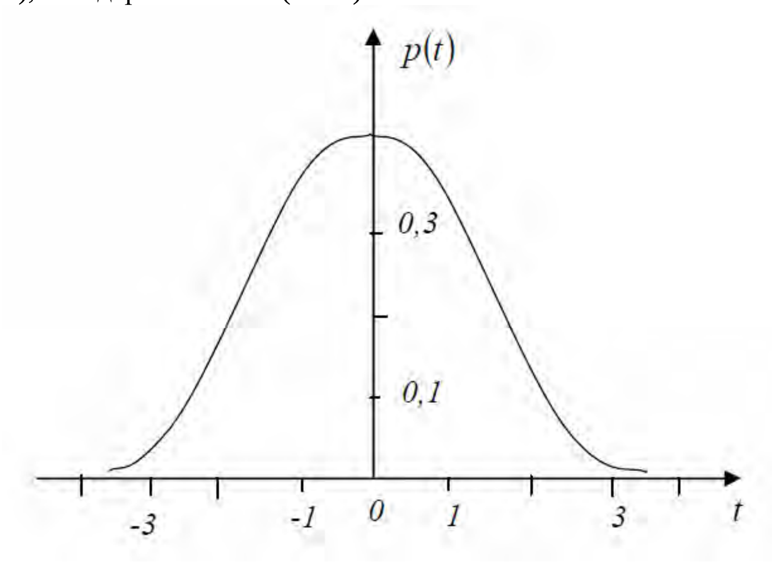


Рис. 4.1. Крива густини нормального розподілу

Для стандартного нормального розподілу (t = 0 і σ = 1) функція розподілу описується інтегралом:

$$F_u(z) = \int_{-\infty}^{z} P_u(x)dx = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} + \Phi(x) \quad (4.10)$$

де $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot$

Таблиця 4.1

Значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,0	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669

продовження таблиці 4.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,004	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0008	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця 4.2

Значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

X	*Ф(x)*	*X*	*Ф(x)*	*X*	*Ф(x)*	*X*	*Ф(x)*
1	2	3	4	5	6	7	8
0,00	0,0000	0,29	0,1141	0,58	0,2190	0,87	0,3078
0,01	0,0040	0,30	0,1179	0,59	0,2224	0,88	0,3106

продовження таблиці 4.2

1	2	3	4	5	6	7	8
0,02	0,0080	0,31	0,1217	0,60	0,2257	0,89	0,3133
0,03	0,0120	0,32	0,1255	0,61	0,2291	0,90	0,3159
0,04	0,0160	0,33	0,1293	0,62	0,2324	0,91	0,3186
0,05	0,0199	0,34	0,1331	0,63	0,2357	0,92	0,3212
0,06	0,0239	0,35	0,1368	0,64	0,2389	0,93	0,3238
0,07	0,0279	0,36	0,1406	0,65	0,2422	0,94	0,3264
0,08	0,0319	0,37	0,1443	0,66	0,2454	0,95	0,3289
0,09	0,0359	0,38	0,1480	0,67	0,2486	0,96	0,3315
0,10	0,0398	0,39	0,1517	0,68	0,2517	0,97	0,3340
0,11	0,0438	0,40	0,1554	0,69	0,2549	0,98	0,3365
0,12	0,0478	0,41	0,1591	0,70	0,2580	0,99	0,3389
0,13	0,0517	0,42	0,1628	0,71	0,2611	1,00	0,3413
0,14	0,0557	0,43	0,1664	0,72	0,2642	1,01	0,3438
0,15	0,0596	0,44	0,1700	0,73	0,2673	1,02	0,3461
0,16	0,0636	0,45	0,1736	0,74	0,2703	1,03	0,3485
0,17	0,0675	0.46	0,1772	0,75	0,2734	1,04	0,3508
0,18	0,0714	0,47	0,1808	0,76	0,2764	1,05	0,3531
0,19	0,0753	0,48	0,1844	0,77	0,2794	1,06	0,3554
0,20	0,0793	0,49	0,1879	0,78	0,2823	1,07	0,3577
0,21	0,0832	0,50	0,1915	0,79	0,2852	1,08	0,3599
0,22	0,0871	0,51	0,1950	0,80	0,2818	1,09	0,3621
0,23	0,0910	0,52	0,1985	0,81	0,2910	1,10	0,3643
0,24	0,0948	0,53	0,2019	0,82	0,2939	1,11	0,3665
0,25	0,0987	0,54	0,2054	0,83	0,2967	1,12	0,3686
0,26	0,1026	0,55	0,2088	0,84	0,2995	1,13	0,3708

Продовження таблиці 4.2

1	2	3	4	5	6	7	8
0.27	0,1064	0,56	0,2123	0,85	0,3023	1,14	0,3729
0,28	0,1103	0,57	0,2157	0,86	0,3051	1,15	0,3749
1,16	0,3770	1,54	0,4382	1,92	0,4726	2,60	0,4953
1,17	0,3790	1,55	0,4394	1,93	0,4732	2,62	0,4956
1,18	0,3810	1,56	0,4406	1,94	0,4738	2,64	0,4959
1,19	0,3830	1,57	0,4418	1,95	0,4744	2,66	0,4961
1,20	0,3849	1,58	0,4429	1,96	0,4750	2,68	0,4963
1.21	0,3869	1,59	0,4441	1,97	0,4756	2,70	0,4965
1,22	0,3883	1,60	0,4452	1,98	0,4761	2,72	0,4967
1,23	0,3907	1,61	0,4463	1,99	0,4767	2,74	0,4969
1,24	0,3925	1,62	0,4474	2,00	0,4772	2,76	0,4971
1,25	0,3944	1,63	0,4484	2,02	0,4783	2,78	0,4973
1,26	0,3926	1,64	0,4495	2,04	0,4793	2,80	0,4974
1,27	0,3980	1,65	0,4505	2,06	0,4803	2,82	0,4976
1,28	0,3997	1,66	0,4515	2,08	0,4812	2,84	0,4977
1,29	0,4015	1,67	0,4525	2,10	0,4821	2,86	0,4979
1,30	0,4032	1,68	0,4535	2,12	0,4830	2,88	0,4980
1,31	0,4049	1,69	0,4545	2,14	0,4838	2,90	0,4981
1,32	0,4066	1,70	0,4554	2,16	0,4846	2,92	0,4982
1,33	0,4082	1,71	0,4564	2,18	0,4854	2,94	0,4984
1,34	0,4099	1,72	0,4573	2,20	0,4861	2,96	0,4985
1,35	0,4115	1,73	0,4582	2,22	0,4868	2,98	0,4986
1,36	0,4131	1,74	0,4591	2,24	0,4875	3,00	0,49865
1,37	0,4147	1,75	0,4599	2,26	0,4881	3,20	0,49931
1,38	0,4162	1,76	0,4608	2.28	0,4887	3,40	0,49966

Продовження таблиці 4.2

1	2	3	4	5	6	7	8
1,39	0,4177	1,77	0,4616	2,30	0,4893	3,60	0,499841
1,40	0,4192	1,78	0,4625	2,32	0,4898	3,80	0,499928
1,41	0,4207	1,79	0,4633	2,34	0,4904	4,00	0,499968
1,42	0,4222	1,80	0,4641	2,36	0,4909	4,50	0,499997
1,43	0,4236	1,81	0,4649	2,38	0,4913	5,00	0,499997
1,44	0,4251	1,82	0,4656	2,40	0,4918		
1,45	0,4265	1,83	0,4664	2,42	0,4922		
1,46	0,4279	1,84	0,4671	2,44	0,4927		
1,47	0,4292	1,85	0,4678	2,46	0,4931		
1,48	0,4306	1,86	0,4686	2,48	0,4934		
1,49	0,4319	1,87	0,4693	2,50	0,4938		
1,50	0,4332	1,88	0,4699	2,52	0,4941		
1,51	0,4345	1,89	0,4706	2,54	0,4945		
1,52	0,4357	1,90	0,4713	2,56	0,4948		
1,53	0,4370	1.91	0,4719	2,58	0,4951		

Приклад. Записати густину розподілу нормально розподіленої випадкової величини із математичного сподівання m_x = -1 мкВ та стандартним відхиленням σ_x = 2 мкВ, а також знайти значення густини та функції розподілу для значення величини x = 1,5 мкВ.

Розв'язок.

1. Оскільки центр розподілу $t = m_x$, то відповідно до (4.7) густина розподілу:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-t)}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x+1)}{8}} \left(\frac{1}{\text{мкВ}}\right), -\infty < x < \infty$$

2. Для відомих математичного сподівання, стандартного відхилення та x = 1,5 мкВ за залежністю (4.8) знайдемо нормальне значення аргументу:

$$t = \frac{1{,}5-(-1)}{2} = 1{,}25 \cdot$$

3. Для отримання значення аргументу значення густини розподілу знайдемо з табл. 4.1:

$$P(1{,}5) = P_u(1{,}25) = 0{,}1826 \cdot$$

4. Згідно з (4.10) та таблицею 4.2 значення функції розподілу:

$$F(1{,}5) = F_u(1{,}25) = \frac{1}{2} + \Phi(1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944 \cdot$$

4.2.2 Розподіл Пірсона (χ^2 – розподіл)

Розглянемо ***n*** незалежних випадкових величин $\boldsymbol{u_1}$, … , $\boldsymbol{u_n}$, кожна з яких розподілена нормально з параметрами (0,1) (рис. 4.2). Сума квадратів цих випадкових величин називається χ_f^2 – сумою:

$$\chi_f^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2, \quad \left(0 \le \chi_f^2 < \infty\right), \tag{4.11}$$

де $f = n$ – число ступенів вільності χ^2.

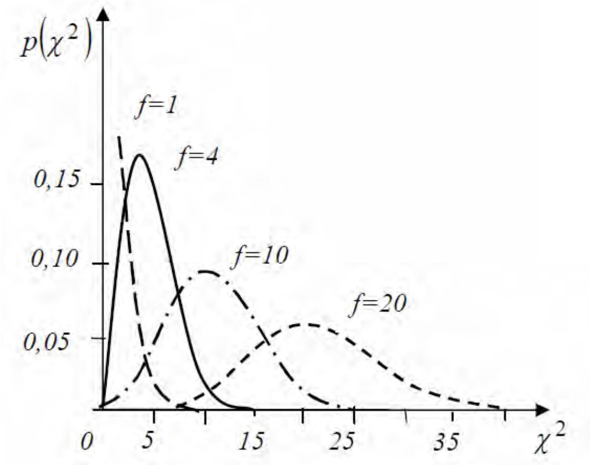


Рис. 4.2. χ^2 – розподіл для різних f

Функція χ^2 володіє розподілом, який через нормованість u_1 залежить лише від f. Густина χ^2 – розподілу, яка характеризує імовірність знаходження значень в інтервалі $\lfloor \chi^2, \chi^2 + d\chi^2 \rfloor$, має вигляд:

$$P(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{f}{2}} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{f}{2}-1} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right), \qquad (4.12)$$

де Γ – гамма-функція.

Криві густини χ^2 – розподілу для різних f приведені на рисунку 4.2. Відповідно до (4.12), $m_1(\chi^2) = f$; $D(\chi^2) = 2f$. При f > 1 розподіл перетворюється в нормальний. Табличні значення критерію Пірсона (χ^2 – критерію) приведені в таблиці 4.3.

Таблиця 4.3

Значення критерію Пірсона (χ^2 – критерію)

Число ступенів свободи	Рівень значимості α					
	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	2	3	4	5	6	7
1	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	6,626	9,236	11,071	12,833	15,086	16,750
6	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,299
13	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801

Продовження таблиці 4.3

1	2	3	4	5	6	7
16	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	23,828	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	26,039	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	27,141	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	28,241	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	29,339	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	30,435	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	31,528	36,741	40,113	43,194	46,963	49,645
28	32,620	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	33,711	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	34,800	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
40	45,616	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
50	56,334	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
60	66,981	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	77,577	85,527	90,531	95,023	104,43	104,22
80	88,130	96,578	101,88	106,63	112,33	116,32
90	98,650	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30
100	109,14	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17

4.2.3 Розподіл Фішера (*F* – розподіл)

Розглянемо випадкову величину (рис. 4.3):

$$F(f_1, f_2) = {\frac{\chi_1^2}{f_1}} \Big/ {\frac{\chi_2^2}{f_2}}, \quad \left(0 \le F < \infty\right), \tag{4.13}$$

де $\chi_{1,2}^2$ – визначають за формулами (4.11) та (4.12).

Густина розподілу $\boldsymbol{P(F)}$ описується співвідношенням Фішера:

$$P(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{f_2}{2}\right)} \cdot f_1^{\frac{f_1}{2}} \cdot f_2^{\frac{f_1}{2}} \cdot \frac{(F)^{\frac{f_1}{2}-1}}{(f_2 + f_1 \cdot F)^{\frac{f_1+f_2}{2}}}, \quad (4.14)$$

Криві густини $\boldsymbol{F}$ – розподілу для різних $\boldsymbol{f_1}$ та $\boldsymbol{f_2}$ приведено на рисунку 4.3. Відповідно до (4.14), середнє значення $\overline{F} = f_2/(f_2 - 2)$, якщо $f_2 > 2$.

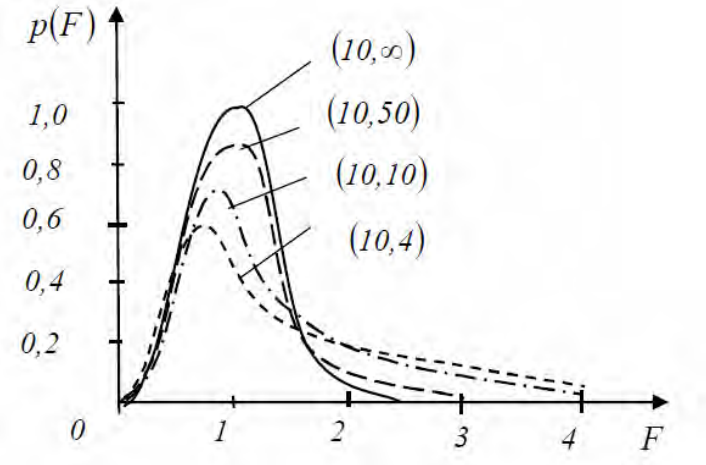


Рис. 4.3. F – розподіл для різних f_1 і f_2

Приклад. Внаслідок вимірювання двох випадкових величин з нормальним розподілом отримали незалежні вибірки із кількістю 23 та 28 результатів спостережень, на основі яких розрахували незміщені вибіркові оцінки дисперсії S_1 = 0,371 та S_2 = 0,257. Для рівня істотності α = 0,05 перевірити гіпотезу, що обидві дисперсії належать до однієї генеральної сукупності, тобто отримані оцінки дисперсії відрізняються несуттєво.

Розв'язок.

1. Розрахуємо відношення дисперсій (більшої до меншої):

$$F_{роз} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0{,}371^2}{0{,}257^2} \cong 1{,}444 \cdot$$

2. Кількості ступенів свободи є на одиницю меншими за

кількість спостережень, тобто $v_1 = n_1 - 1 = 23 - 1 = 22$, $v_2 = n_2 - 1 = 28 - 1 = 27$. Для рівня істотності $\alpha = 0{,}05$ знаходимо табличне значення відношення дисперсії $F_{таб} = 1{,}95$.

3. Порівнявши розрахункове значення $F_{роз} \cong 1{,}444$ з табличним $F_{таб}$ (0,05, 22, 27) = 1,95, робимо висновок, що розрахункове менше табличного, тобто немає змоги стверджувати, що вибіркові дисперсії істотно відрізняються між собою. Тобто на рівні істотності $\alpha = 0{,}05$ немає підстав відхилити гіпотезу про те, що ці дві дисперсії належать одній генеральній сукупності.

Табличні значення критерію Фішера (F – критерію) подано в таблиці 4.4.

Таблиця 4.4

Значення критерію Фішера (*F* – критерію)

f_2	f_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,557	9,277	9,117	9,013	8,941	8,845	8,744	8,638	8,526
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,041	5,912	5,774	5,628
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,818	4,678	4,527	4,365
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,147	4,000	3,841	3,669
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,726	3,575	3,410	3,230
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,438	3,284	3,115	2,928
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,230	3,073	2,900	2,707
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,072	2,913	2,737	2,538
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	2,948	2,788	2,609	2,404
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,849	2,687	2,505	2,296
13	4,667	3,806	3,411	3,197	3,025	2,915	2,767	2,604	2,420	2,206
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,699	2,534	2,349	2,131
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,641	2,475	2,288	2,066
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,591	2,425	2,235	2,010
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,548	2,381	2,190	1,960
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,510	2,342	2,150	1,917
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,477	2,308	2,114	1,878
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,447	2,278	2,082	1,843
21	4,325	3,467	3,077	2,840	2,685	2,573	2,420	2,250	2,054	1,811

продовження таблиці 4.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,397	2,226	2,028	1,783
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,375	2,204	2,005	1,757
24	4,260	3,403	3,009	2,777	2,621	2,508	2,355	2,183	1,984	1,733
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,337	2,165	1,964	1,711
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,321	2,148	1,946	1,691
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,305	2,132	1,930	1,672
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,291	2,118	1,915	1,654
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,278	2,104	1,901	1,638
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,266	2,092	1,887	1,622
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,180	2,003	1,793	1,509
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,097	1,917	1,700	1,389
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,016	1,834	1,608	1,254
∞	3,841	2,996	2,605	2,372	2,214	2,098	1,938	1,752	1,517	1,000

4.2.4 Розподіл Стьюдента (*t* – розподіл)

Нехай ми маємо випадкову величину (рис. 4.4):

$$t = u \Big/ \sqrt{\frac{\chi^2}{f}}, \ \left(-\infty < t < \infty\right), \tag{4.15}$$

де u та χ^2 визначають за допомогою (4.11), (4.12).

Ця величина має розподіл Стьюдента:

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot f}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}}, \tag{4.16}$$

який можна отримати безпосередньо з (4.14) перетворенням $t = \pm\sqrt{F(1, f)}$, де f – розподіл симетричний відносно нуля.

При $f \to \infty$ розподіл прямує до нормального з параметрами (0,1) (рис. 4.4). Табличні значення критерію Стьюдента для ступенів вільності наведені в таблиці 4.5.

Приклад. Експериментально внаслідок проведених n = 10 результатів спостережень знайдено оцінку стандартного відхилення показів омметра, значення якого s = 1,68 Ом. Також відомо, що відхилення показів омметра підпорядковуються нормальному закону із нульовим математичним сподіванням. Необхідно знати довірчі межі можливих показів омметра для довірчої імовірності P = 0,95. Порівняти отримані межі із межами, знайденими за нормальним розподілом.

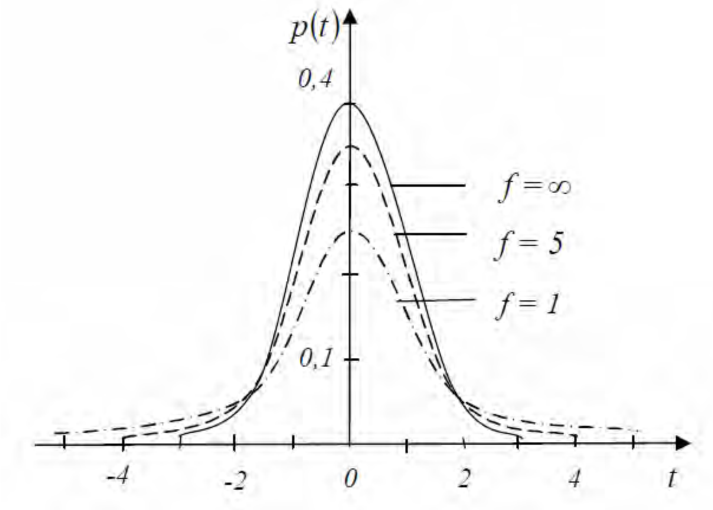


Рис. 4.4. Криві густини t-розподілу

Розв'язок.

1. Стандартне відхилення змін показів омметра знайдено експериментально, та враховуючи, що розподіл показів нормальний, довірчі межі необхідно шукати, використовуючи розподіл Стьюдента. Для n = 10 результатів кількість ступенів свободи становить f = 10-1=9. Згідно таблиці 4.5 знаходимо коефіцієнт $t_p(n\text{-}1) = t_{0,95}(9) = 2,262$. Відповідно, довірчі межі змін показів:

$$t_p(f) \cong z_p, \quad f \geq 30-50,$$

де z_p – квантиль нормального розподілу.

За збільшення ступенів свободи понад 30-50 розподіл Стьюдента наближається до нормального.

$$f_R = \pm t_p(n-1) \cdot s/\sqrt{n} = \pm 2,262 \cdot 1,68/\sqrt{10} \approx \pm 1,2 \text{ Ом.}$$

Таблиця 4.5

Значення коефіцієнтів критерію Стьюдента (*t* – критерію)

Число ст. св. f	P				Число ст. св. f	P			
	0,9	0,95	0,99	0,999		0,9	0,95	0,99	0,999
1	6,314	12,760	63,657	636,619	18	1,734	2,101	2,878	3,922
2	2,920	4,303	9,925	31,598	19	1,729	2,093	2,861	3,883
3	2,353	3,182	5,841	12,994	20	1,725	2,086	2,845	3,850
4	2,132	2,776	4,604	8,610	21	1,721	2,080	2,831	3,819
5	2,015	2,571	4,032	6,859	22	1,717	2,074	2,819	3,792
6	1,943	2,447	3,707	5,959	23	1,714	2,069	2,807	3,767
7	1,895	2,365	3,499	5,405	24	1,711	2,064	2,797	3,745
8	1,860	2,306	3,355	5,041	25	1,708	2,060	2,787	3,725
9	1,833	2,262	3,250	4,781	26	1,706	2,056	2,779	3,707
10	1,812	2,228	3,169	4,587	27	1,703	2,052	2,761	3,690
11	1,796	2,201	3,106	4,437	28	1,701	2,048	2,763	3,674
12	1,782	2,179	3,055	4,318	29	1,699	2,042	2,756	3,659
13	1,771	2,160	3,012	4,221	30	1,697	2,042	2,750	3,646
14	1,716	2,145	2,977	4,140	40	1,684	2,021	2,704	3,551
15	1,753	2,131	2,947	4,073	60	1,671	2,000	2,660	3,460
16	1,746	2,120	2,921	4,015	120	1,658	1,980	2,617	3,373
17	1,740	2,110	2,898	3,965	∞	1,645	1,960	2,576	3,291

2. Якщо б стандартне відхилення було відоме до початку експерименту, то довірчі межі треба було б знаходити, використовуючи відповідний квантиль нормального розподілу:

$$z_{0,90} \approx 1{,}65,\ z_{0,95} \approx 1{,}96,\ z_{0,99} \approx 2{,}58,\ z_{0,9973} \approx 3{,}00,\ z_{0,999} \approx 3{,}29$$

$$t_{Rннор} = \pm z_p \cdot s / \sqrt{n} = \pm 1{,}96 \cdot 1{,}68 / \sqrt{10} \approx \pm 1{,}0 \text{ Ом.}$$

Тобто отримані межі відрізняються приблизно на 20% від отриманих за експериментальними даними.

4.3 Вибірка та її характеристика

Повний набір усіх можливих значень, які може приймати випадкова величина в процесі експерименту називають **генеральною сукупністю**, яка поділяється на кінцеву і реально існуючу чи безкінечну, гіпотетичну.

Генеральна сукупність володіє деякими невипадковими властивостями, виявити які можливо лише в процесі експерименту.

Розглянуті вище функції розподілу $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ описують поведінку генеральної сукупності. Проте, внаслідок того, що реальне число $\boldsymbol{n}$ спостережень фізичної величини завжди обмежене, результати спостережень допустимо вважати дискретними величинами.

Вибірка – деякий набір значень випадкової величини (x_1, x_2, x_3, … , x_n).

Об'єм вибірки – число отриманих експериментальних результатів $\boldsymbol{n}$.

Основне завдання математичної статистики полягає в обґрунтованому аналізі властивостей генеральної сукупності на основі результатів експерименту (за даними вибірки).

Вибірка повинна достатньо точно характеризувати генеральну сукупність, тобто бути репрезентативною. Репрезентативність забезпечується виконанням двох умов:

– усі елементи генеральної сукупності повинні бути присутні у вибірці з однаковою імовірністю;

– спостереження мають бути незалежними; поява кожного з елементів вибірки не повинна впливати на імовірність появи інших елементів.

Враховуючи випадковість елементів вибірки, усі зроблені висновки та отримані результати, що ґрунтуються на основі вибіркових даних, мають імовірнісний характер.

Вибір містить лише частину генеральної сукупності. Ця частина дає змогу оцінити числові характеристики усієї генеральної сукупності. Існує два типи оцінок – **точкові** та **інтервальні**.

Точкова оцінка – число, яке використовується в якості оцінки параметра генеральної сукупності. Розглянемо деякі з них.

Вибіркове середнє є точковою оцінкою математичного сподівання $\boldsymbol{m_1}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \qquad (4.17)$$

Точкова оцінка **дисперсії**:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 . \qquad (4.18)$$

Медіана – характеристика центру групи значень випадкової величини, яку знаходять як значення серединного елементу впорядкованої вибірки.

$$x_{med} = \frac{x_{cn/2} + x_{cn/2+1}}{2} . \qquad (4.19)$$

Впорядкована вибірка – це вибірка посортована за зростанням чи спаданням, яку прийнято називати **варіаційним рядом**.

$$x_{c1} \le x_{c2} \le x_{c3} \le \ldots \le x_{cn} \,. \qquad (4.20)$$

Можливі різноманітні оцінки однієї числової характеристики, наприклад, для математичного сподівання, як оцінки, використовують вибіркове середнє, вибіркову медіану.

Якість оцінки в статистичному аналізі оцінюється за допомогою таких критеріїв:

– Незміщеність оцінки – якщо значення вибірки розміщуються симетрично відносно істинного значення параметра, який оцінюється.

Відповідно до **центральної граничної (межевої) теореми** (*теорема теорії імовірностей про збіжність розподілу суми незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону*) розподіл середніх вибірки є нормальним, а відповідно, симетричним;

– Ефективність – оцінка володіє найменшою дисперсією порівняно з іншими оцінками даної числової характеристики.

Відносно середнього вибіркового дисперсія та середній квадрат відхилень володіють властивостями мінімальності;

– Консистентна оцінка – це точкова оцінка, що збігається за імовірністю до оцінюваного параметра.

Оцінка істинного значення параметра є консистентною, якщо із збільшенням об’єму вибірки її значення наближається до істинного значення параметра;

– Достатність – оцінка є достатньою, якщо для її розрахунку було використано усю інформацію, що міститься у вибірці.

Вибіркове середнє задовольняє усім чотирьом критеріям, а відповідно, є найкращою оцінкою математичного сподівання.

В якості інтервальної оцінки використовують **довірчий інтервал**.

Довірчий інтервал – це інтервал з нижньою $\boldsymbol{x_н}$ та верхньою $\boldsymbol{x_в}$ межею, у який випадкова величина потрапляє із заданою імовірністю $\boldsymbol{P_{дов}}$, до того ж функція розподілу $P(x)$ випадкової величини у точках нижньої $\boldsymbol{x_н}$ та верхньої $\boldsymbol{x_в}$ меж набуває симетричного значення.

Іншими словами, **довірчий інтервал** – це відрізок, центром якого є точкова оцінка числової характеристики, яка містить істинне значення цієї числової характеристики із заданою імовірністю. Ця імовірність називається **довірчою імовірністю**.

Інтервал є мірою точності оцінки, а довірча імовірність характеризує достовірність оцінки. Розмір довірчого інтервалу залежить від значення довірчої імовірності вибраного експериментатором. Чим більша довірча імовірність, тим ширшим має бути інтервал числової характеристики.

Для більшості досліджень значення довірчої імовірності обирають $\boldsymbol{P_{дов}}$ = 0,95. У разі відповідальних досліджень, приймають $\boldsymbol{P_{дов}}$ = 0,99 та 0,999.

Побудова довірчого інтервалу передбачає наступні етапи:

– потрібно записати імовірнісне твердження відносно деякої випадкової функції, що включає різницю чи відношення оцінки числової характеристики до її істинного значення; ця функція містить інформацію про ступінь близькості цих величин; потрібною умовою є відомості про закон розподілу цієї функції;

– імовірнісне твердження приводиться до виду, за якого межі довірчого інтервалу числової характеристики представлені у явному вигляді.

Побудуємо довірчий інтервал для математичного сподівання за відомої дисперсії. Імовірнісна функція у цьому разі має вигляд (4.21) та розподілена нормально.

$$t = \frac{\overline{x} - m_1}{\sigma / \sqrt{n}}. \tag{4.21}$$

Для побудови довірчого інтервалу можна використовувати відповідну таблицю нормального розподілу для визначеного значення $\boldsymbol{t_\alpha}$, такого, що за межами $\boldsymbol{-t_\alpha}$ і + $\boldsymbol{t_\alpha}$ залишається частина площі, рівна $\boldsymbol{\alpha}$, тоді як в межах [$-t_\alpha$, + t_α] розміщена частина площі, і рівна 1– α (рис. 4.5).

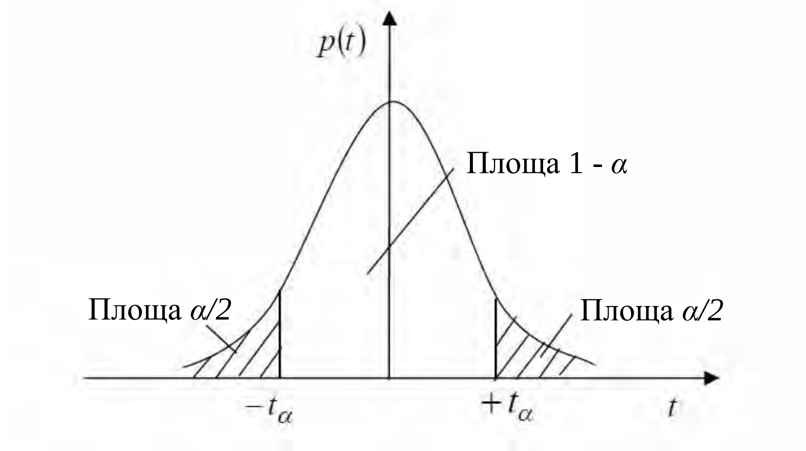


Рис. 4.5. Довірчий інтервал випадкової величини

Відповідно, запишемо імовірнісне твердження:

$$P\left\{-t_\alpha \le \frac{\overline{x} - m_1}{\sigma / \sqrt{n}} \le t_\varepsilon\right\} = 1 - \alpha. \tag{4.22}$$

Перетворимо вираз в дужках:

$$P\left\{\overline{x} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m_1 \le \overline{x} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha. \tag{4.23}$$

Величина 1 – α = $P_{дов}$ – **довірча імовірність**. За цієї довірчої імовірності довірчий інтервал для математичного сподівання $\boldsymbol{m_1}$ задається межами $\left[\bar{x} - t_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

Величина $\Delta_{\bar{x}} = t_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = t_\alpha S_{\bar{x}}$ – випадкова помилка спостережень.

4.4 Перевірка статистичних гіпотез

Припущення про властивість генеральної сукупності, яке можна підтвердити, ґрунтуючись на даних вибірки, називається **статистичною гіпотезою *H***. Гіпотези про параметри генеральної сукупності називають параметричними, про розподіли – непараметричними.

Перевірка гіпотези полягає у виявленні узгодженості емпіричних (отриманих експериментально) даних з гіпотетичними (теоретичними). Відповідно будь-яка гіпотеза формулюється до проведення досліду і провіряється на підставі експерименту. Якщо розбіжність між теорією та експериментом вкладається у межі випадкових помилок, роблять висновок про узгодженість даних, що порівнюються.

Основна гіпотеза $\boldsymbol{H_0}$ звичайно подається у формі, що заперечує наявність будь-яких об’єктивних відмінностей, тому $\boldsymbol{H_0}$ гіпотеза називається **нульовою**.

Нульова гіпотеза відкидається у разі, коли за вибіркою отримано результат, який за істинності запропонованої нульової гіпотези малоймовірний. Межею неможливого чи малоймовірного вважають α = 0,05, 0,01, 0,001 і називають **рівнем значимості**.

Перевірка гіпотези здійснюється за допомогою **статистичного критерію** – випадкової функції результатів спостережень з відомим законом розподілу (t-, F-, χ^2 – критерій). Залежно від характеру розподілу область можливих значень поділяється на дві частини – **область прийняття гіпотези**, та **критичну область** (область неприйняття гіпотези). Перевірка гіпотези здійснюється шляхом розрахунків критерію та порівняння, в яку область потрапляє розраховане значення.

Розглянемо етапи перевірки статистичних гіпотез:

– формування задачі дослідження у вигляді статистичної гіпотези;

– вибір статистичної характеристики гіпотези;

– аналіз можливих помилкових рішень та їх наслідків і вибір нульової $\boldsymbol{H_0}$ та альтернативної $\boldsymbol{H_1}$ гіпотез;

– вибір необхідного рівня значимості $\boldsymbol{\alpha}$;

– вибір критерію перевірки гіпотези $\boldsymbol{H_0}$;

– розрахунок фактичного значення статистичного критерію;

– визначення критичного значення статистичного критерію за відповідною таблицею;

– перевірка нульової гіпотези на основі порівняння фактичного (розрахункового) та критичного (табличного) значень критерію.

4.4.1 Перевірка гіпотези про закон розподілу

Гіпотези, пов'язані з розподілом, полягають у висуванні припущення про те, що розподіл у генеральній сукупності підпорядковується деякому визначеному закону. Важливо в процесі планування експерименту забезпечити підпорядкування нормальному закону розподілу значень досліджуваних фізичних величин.

Оцінки параметрів розподілу приймають в якості статистичних характеристик гіпотези про закон розподілу. Нехай при виконанні $\boldsymbol{n}$ досліджень однієї величини постійна систематична похибка повністю виключена. Тоді результат i-го дослідження $x_i = x_{іст} + \Delta_i$ знаходиться з деякою випадковою абсолютною похибкою $\Delta_i = x_i - x_{іст}$.

За істинну величину $x_{іст} = m_i$, за нормального закону розподілу випадкової похибки Δ_i, приймають її оптимальну оцінку, рівну оцінці математичного очікування (4.17). Потім розраховують абсолютну похибку кожного з $\boldsymbol{n}$ спостережень:

$$\Delta_i = x_i - \overline{x}. \qquad (4.24)$$

Точність методу вимірювань оцінюють за допомогою оцінки середньоквадратичного відхилення $\boldsymbol{S}$:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}. \qquad (4.25)$$

Інтегральний варіаційний ряд будується в разі, якщо число дослідів n > 20. В разі його побудови, в першій графі окреме значення величини вказується в інтервалі „від-до”, в другій – чисельність одиниці, що входить в інтервал. Величину інтервалу визначаємо за формулою:

$$i = \frac{R}{m}, \qquad (4.26)$$

де R – розмах варіювання величини, $R = x_{\max} - x_{\min}$;

m – число груп, яке визначається за формулою Стерджеса:

$$m = 1 + 3{,}22\lg n. \qquad (4.27)$$

Отримане значення заокруглюють до цілого більшого значення. Нижню границю першого інтервалу визначають, віднімаючи від $\boldsymbol{x_{min}}$ половину отриманого розряду.

Оцінка математичного очікування визначається як:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} x'_j f_j^*}{\sum_{j}^{m} f_j^*}, \qquad (4.28)$$

де x'_j – середина інтервалу;

f_j^*– частота попадання результатів досліджень $\boldsymbol{x_i}$ в заданий інтервал;

j – номер інтервалу.

Оцінка середньоквадратичного відхилення:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m}\left(x'_j - \overline{x}\right)^2 \cdot f_j^*}{\sum_{j=1}^{m} f_j^*}}. \qquad (4.29)$$

Приймається прийнятний рівень значимості, зазвичай α = 0,05.

Перевірка гіпотези полягає в порівнянні експериментальних (емпіричних) частот з теоретичними і подальшому висновку про відповідність експериментального розподілу теоретичному. Для перевірки близькості теоретичного та експериментального розподілів використовують спеціальні показники – **критерії згоди**.

Найпоширенішим є критерій Пірсона χ^2:

$$\chi^2 = \sum_j \frac{\left(f_j^* - f_j\right)^2}{f_i}, \tag{4.30}$$

де f_j^* – експериментальні частоти в інтервалі;

f_j – теоретичні частоти в інтервалі.

χ^2 рівне нулю, якщо всі експериментальні частоти рівні відповідним теоретичним частотам. Відповідно чим більше відрізняються експериментальні та теоретичні частоти, тим $\boldsymbol{\chi^2}$ більше. Якщо відхилення незначні, $\boldsymbol{\chi^2}$ – повинно бути малим.

Теоретична частота визначається як добуток об’єму сукупності (числа досліджень) на імовірність потрапляння в цей інтервал. Теоретичні частоти нормального розподілу визначаються за формулою:

$$f_i = \frac{n \cdot i}{S\sqrt{2\pi}} \exp\left(-t_j^2/2\right), \tag{4.31}$$

де t_j – нормоване відхилення:

$$t_i = \frac{x_j' - \bar{x}}{S}. \tag{4.32}$$

Величина $P(t) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \exp\left(-t^2/2\right)$ – табличне значення (табл. 4.1), тому формула (4.31) набуде вигляду:

$$f_i = \frac{n \cdot i}{S} P(t_j). \tag{4.32}$$

Потрібними умовами для розрахунку критерію Пірсона є:

– достатньо велика кількість досліджень ($n \geq 50$);

– теоретичні частоти в інтервалі мають бути більше 5; якщо теоретичні частоти в деяких інтервалах менші 5 – сусідні інтервали об'єднуються.

Критичне (табличне) значення χ_T^2 визначається з таблиці розподілу Пірсона (табл. 4.2) відповідно до числа ступенів вільності і рівня значимості.

Число ступенів вільності розраховується наступним чином: якщо експериментальний ряд розподілу має ***k*** – категорій (число інтервалів з врахуванням об'єднань), то ***k*** – експериментальних частот $f_1^*, f_2^*, ..., f_k^*$ мають бути пов'язані наступним чином: $\sum_{j=1}^{k} f_j^* = n$.

Якщо параметри теоретичного розподілу відомі, лише (k – 1) частот можуть набувати випадкових значень, а остання частота може бути знайдена із вказаного відношення. Система з ***k*** частот завдяки наявності одного зв'язку втрачає одну ступінь свободи і має лише (*k* – 1) ступенів свободи. Якщо при знаходженні теоретичних частот ***p*** параметрів теоретичного розподілу невідомі, вони мають бути знайдені за даними експериментального ряду. Це накладає на емпіричні частоти ще ***p*** зв'язків, внаслідок чого система втрачає ще ***p*** ступенів свободи.

Число вільно варіюючих частот, та число ступенів вільності рівне:

$$f = k - (p+1). \tag{4.33}$$

Якщо $\chi^2 < \chi_T^2$ – гіпотеза $\boldsymbol{H_0}$ про нормальний закон розподілу експериментальних (емпіричних) даних приймається.

Приклад перевірки гіпотези про нормальний закон розподілу експериментальних даних.

У таблиці 4.6 приведені дані про затрати часу на виробництво одиниці продукції. Потрібно встановити, чи можливо з імовірністю $P_Д$ = 0,95 вважати закон розподілу експериментальних даних нормальним.

Основна гіпотеза $\boldsymbol{H_0}$: отримані результати підпорядковуються нормальному закону.

Визначимо числові оцінки параметрів нормального розподілу $\overline{x}$, S. Об'єднаємо дані у вигляді варіаційного ряду (табл. 4.7).

Таблиця 4.6

Затрати часу на виробництво одиниці продукції

Номер виробу	Операційний									
1-10	9	9	11	9	9	11	9	7	9	6
11-20	9	6	9	11	9	7	9	7	10	7
21-30	9	10	6	10	8	6	9	8	8	8
31-40	8	7	8	7	9	8	9	11	9	9
41-50	8	10	9	8	10	8	8	9	11	9

Розмах $R = x_{\max} - x_{\min} = 11 - 6 = 5$, хв..

Число інтервалів $m = 1 + 3{,}22 \lg n = 1 + 3{,}22 \lg 50 \approx 6$.

Величина інтервалу $i = R / m = 5/6 = 0{,}8$, хв., приймаємо i=1, хв.

Середнє значення визначаємо за формулою (4.28): $\bar{x} = 8{,}6$, хв..

Оцінку середньоквадратичного відхилення розраховуємо за формулою (4.29): S = 1,2, хв.

Таблиця 4.7

Ряд емпіричного розподілу

Інтервал групи	5,5-6,5	6,5-7,5	7,5-8,5	8,5-9,5	9,5-10,5	10,5-11,5
Середина інтервалу x'_j	6	7	8	9	10	11
Частота f_j^*	4	6	11	19	5	5

Таблиця 4.8

Додаткова таблиця для розрахунку теоретичних частот нормального розподілу

Інтервал групи	5,5-6,5	6,5-7,5	7,5-8,5	8,5-9,5	9,5-10,5	10,5-11,5
Середина інтервалу x'_j	6	7	8	9	10	11
Нормоване відхилення t_j	-2,00	-1,23	-0,46	0,31	1,08	1,85
$P(t_j)$	0,0540	0,1874	0,3588	0,3802	0,2227	0,0721
Частота теоретична f_j	6	7	8	9	10	11
Частота емпірична f_j^*	4	6	11	19	5	5

Визначимо теоретичні частоти розподілу (табл. 4.8) згідно з формулою (4.32):

$$\frac{n \cdot i}{S} = \frac{50 \cdot 1}{1{,}3} = 38{,}5,$$

$$t_j = \frac{x'_j - 8{,}6}{1{,}3},$$

$$f_j = 38{,}5 \cdot P(t_j).$$

Величину $P(t_j)$ визначаємо з таблиці 4.1

Оскільки для використання критерію Пірсона теоретична частина повинна бути більша 5, об'єднуємо перший і другий та п'ятий і шостий інтервали (табл. 4.9).

Розраховуємо χ^2 – критерій:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{4} \frac{\left(f_j^* - f_j\right)^2}{f_j} = 2{,}08.$$

Визначаємо число ступенів вільності за формулою (4.33): $k = 4 -$ число інтервалів, що залишились після об'єднання. p=2, але оскільки значення та середньоквадратичне відхилення знайдені за даними емпіричного ряду, то $k = 4 - (1+2) = 1$.

Таблиця 4.9

Варіаційний ряд з врахуванням об'єднання інтервалів

Інтервал групи	5,5-7,5	7,5-8,5	8,5-9,5	9,5-11,5
Частота теоретична f_j	9,29	13,81	14,64	11,35
Частота емпірична f_j^*	10	11	19	10

Табличне значення критерію для f = 1 та рівня значимості α = 0,05 – $\chi_T^2 = 3{,}841$. $\chi^2 < \chi_T^2$, відповідно, гіпотеза про нормальний закон розподілу емпіричних даних приймається.

4.4.2 Перевірка параметричних гіпотез

Різновидом параметричних є гіпотези про числові характеристики закону розподілу.

Розглянемо головні гіпотези середніх величин:

– гіпотеза про рівність математичного очікування деякому числу за відомої дисперсії чи за невідомої дисперсії;

– гіпотеза про рівність середніх значень нормального розподілу сукупностей за відомих дисперсій, за невідомих рівних дисперсіях, за невідомих нерівних дисперсій.

Розв'язання першої задачі відбувається, в більшості випадків, за невідомої дисперсії. За основу береться гіпотеза H_0 : m_1 = a. Перевірка гіпотези здійснюється за допомогою t-критерію. За достатньо великої кількості дослідів критичне значення критерію визначають з таблиці інтегралу імовірності (табл. 4.2), за малої кількості дослідів (n < 20) – за таблицею розподілу Стьюдента (табл. 4.5) для заданого рівня значимості і числа ступенів свободи.

Фактичне значення критерію:

$$t = \frac{\bar{x} - a}{S_{\bar{x}}}, \tag{4.34}$$

де $S_{\bar{x}}$ – можлива помилка вибіркового середнього.

Для малої вибірки:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}, \qquad (4.35)$$

для великої вибірки:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}, \qquad (4.36)$$

Вибіркове середньоквадратичне відхилення ***S*** визначаться за формулою (4.25) чи (4.29) залежно від об’єму вибірки.

Відповідно, якщо $t < t_T$ – гіпотеза $\boldsymbol{H_0}$ приймається.

Коли необхідно визначити, чи існує розбіжність між двома вибірковими середніми, висувається гіпотеза про рівність середніх. Перевірка цієї гіпотези здійснюється на основі середньої (стандартної) випадкової похибки різниці двох вибіркових середніх $\boldsymbol{S_\delta}$:

$$S_\delta = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, \qquad (4.37)$$

де S_1^2, S_2^2 – вибіркові дисперсії відповідно у першій та другій вибірках.

$$S_1^2 = \frac{\sum(x' - \bar{x}_1)^2 \cdot f}{n_1 - 1}, \; S_2^2 = \frac{\sum(x' - \bar{x}_2)^2 \cdot f}{n_2 - 1}. \qquad (4.38)$$

Фактичне значення критерію:

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{S_\delta}. \qquad (4.39)$$

Критичне значення $\boldsymbol{t_T}$ визначають за таблицею розподілу Стьюдента для заданого рівня значимості і числа ступенів свободи. Якщо $t < t_T$ – нульова гіпотеза приймається. Можна вважати, що математичне сподівання в двох підгрупах однакове, ці підгрупи можна об’єднати в одну групу та характеризувати її спільним середнім.

Перевірка параметричних гіпотез дає змогу виявити наявність грубих похибок (промахів) в експериментальних даних. Якщо в групі отриманих експериментальних даних один або два покази суттєво відрізняються від інших, але наявності помилки в процесі зняття показів чи інших промахів не виявлено, виникає потреба в перевірці чи не є вони грубими похибками, що підлягають виключенню. Необхідно перевірити гіпотезу, що результат *i*-го дослідження $\boldsymbol{x_i}$ не містить грубої похибки, тобто є одним із значень вимірюваної величини. Використовуючи визначені статистичні критерії потрібно заперечити висунуту гіпотезу. Якщо це вдається, результат дослідження розглядають як групу похибку і виключають із загальної вибірки.

Критерій оцінки анормальності результатів експерименту за невідомого середньоквадратичного відхилення.

Виключення грубих похибок, згідно цього критерію, передбачає наступні операції:

– результати групи з $\boldsymbol{n}$ результатів упорядковують за зростанням $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$; виділяють передбачені промахи, звичайно ними можуть виявитись результати $\boldsymbol{x_1}$ та $\boldsymbol{x_n}$;

– розраховують оцінки математичного сподівання $\overline{x}$ і середньоквадратичне відхилення $\boldsymbol{S}$;

– для передбачених промахів проводять розрахунок коефіцієнтів:

$$t_1 = \frac{|x_1 - \overline{x}|}{S}, \; t_n = \frac{|x_n - \overline{x}|}{S} \tag{4.40}$$

Задаються рівнем значимості критерію помилки $\boldsymbol{\alpha}$. Для того, щоб імовірність помилки була малою, цей рівень повинен бути достатньо малим. За даними параметра $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{n}$ знаходять критичне значення $\boldsymbol{t_T}$ з таблиці для розподілу Стьюдента ($n < 20$) чи нормального розподілу ($n > 20$).

– виконують порівняння коефіцієнтів, визначених за формулою (4.40), з критичними значеннями. Якщо виконуються умови $t_1 > t_T$ та $t_n > t_T$ – результати $\boldsymbol{x_1}$ та $\boldsymbol{x_n}$ зараховують до промахів та виключають із результатів експерименту.

Критерій „трьох сігм”.

Цей критерій застосовується для результатів досліджень, розподілених за нормальним законом. Одним із граничних параметрів слугує середньоквадратичне відхилення вимірювань $\boldsymbol{S}$.

Згідно з цим критерієм результат отриманий з імовірністю α < 0,003 малоймовірний, і його можна вважати промахом, якщо $\left|x_i - \bar{x}\right| > 3S$. Даний критерій достатньо добре працює для кількості вимірювань $n \geq 20...50$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які задачі вирішує дисперсний аналіз?

2. Дайте характеристику міжгрупової та внутрішньогрупової дисперсії.

3. Чим зумовлена варіація групових середніх навколо загального середнього?

4. Яка параметрична гіпотеза приймається за нульову під час дисперсного аналізу? Порядок перевірки цієї гіпотези.

5. Що називають дисперсним відношенням?

6. Який імовірнісний розподіл застосовують для перевірки гіпотези в дисперсному аналізі? Перерахуйте його числові характеристики.

7. Що називають функцією та густиною розподілу випадкової величини?

8. Дайте визначення математичного очікування та дисперсії випадкової величини.

9. Головні закони розподілу випадкової величини, що застосовуються під час планування експерименту? Числові характеристики цих законів.

10. Дайте визначення генеральній сукупності вибірки.

11. Характеристики точкової оцінки та критерії її якості?

12. Інтервальна оцінка та довірчий інтервал?

13. Що називають статистичною гіпотезою? Параметричні та непараметричні гіпотези?

14. Чому основну гіпотезу називають нульовою?

15. Що називають рівнем значимості та областю прийняття гіпотези?

16. Дайте визначення статистичного критерію.

17. Роль критерію Пірсона під час перевірки гіпотези про закон розподілу?

18. Які статистичні критерії застосовують під час перевірки параметричних гіпотез?

19. Основні гіпотези про вибіркові середні, порядок їх перевірки?

20. Виявлення грубих похибок з використанням параметричних гіпотез?

5 ОСНОВИ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

5.1. Класифікація експериментів

З кожним роком все більш актуальнішою стає проблема підвищення ефективності наукових досліджень. Більшість науковців, особливо у галузі точних наук, пов’язані з такими етапами дослідження, розробки і впровадження у виробництво нових засобів і технологій, як експерименти – цілеспрямований вплив на об’єкт досліджень для отримання достовірної інформації.

Планування експерименту – засіб побудови математичної моделі різних процесів з метою підвищення ефективності експериментальних досліджень: зменшення часу і засобів на проведення експерименту, підвищення достовірності результатів дослідження.

Основою теорії планування експерименту є математична статистика, оскільки результати експерименту можуть розглядатися як випадкові величини чи випадкові процеси.

Експерименти прийнято класифікувати за **структурою**, **етапом** наукових досліджень, **характером** та **способом**.

За **структурою** експерименти прийнято класифікувати:

– ***натуральні*** – засоби експериментального дослідження взаємодіють безпосередньо з об’єктом дослідження;

– ***модельні*** – експеримент проводиться не з самим об’єктом, а з його моделлю;

– ***модельно-кібернетичні*** (***машинні***) – різновид модельного експерименту, в процесі якого відповідні характеристики досліджуваного об'єкта розраховують за допомогою відповідних методик на ЕОМ.

За **етапом** наукові дослідження бувають:

– ***лабораторні експерименти*** – для вивчення загальних закономірностей різноманітних явищ і процесів для перевірки наукових гіпотез та теорій;

– ***стендові експерименти*** – проводяться для вивчення конкретного процесу, який проходить в досліджуваному об'єкті, визначення фізичних, хімічних чи будь-яких інших властивостей;

– ***промислові експерименти*** – обов'язкові для запровадження нового виробу чи процесу, для оптимізації діючого процесу, для проведення контрольно-вибіркових випробувань якості продукції, що випускається.

За **характером** постановки задачі для визначення моделі об'єкта експерименти поділяються:

– які враховують наявність неоднорідності різного виду (склад матеріалу, зміни в часі й ін.);

– розраховані на виявлення механізму явища (дослідження добре організованих об'єктів при достатньо високому рівні вихідної інформації);

– які враховують локальну область простору параметрів об'єкта, що відповідає екстремуму деякого критерію оптимуму за наявності тимчасової зміни параметрів;

– які враховують локальну область простору параметрів об'єкта, яка відповідає екстремуму деякого критерію оптимуму за відсутності тимчасової зміни параметрів;

– які враховують ступінь впливу вхідних змінних на вихідні змінні;

– які дають змогу перетворити набір змінних об'єкта дослідження;

– розраховані на прогнозування поведінки об'єкта дослідження.

За **способом** проведення експерименти поділяються:

– **пасивний експеримент** – ґрунтується на реєстрації вхідних і вихідних параметрів, які характеризують об'єкт дослідження, без втручання в експеримент під час його проведення. Опрацювання отриманих експериментальних даних відбувається лише після завершення експерименту;

– **активний експеримент** – математичний опис будується у вигляді сукупності статичних і динамічних вихідних характеристик об’єкта, які реєструються під час подачі на його входи спеціальних збуджувальних впливів за заздалегідь спланованій програмі.

Активний експеримент дає змогу оперативно встановлювати закономірності, знаходити оптимальні режими функціонування об’єкта.

5.2 Математична модель об’єкта дослідження

В загальному вигляді об’єкт дослідження можна подати структурною схемою, приведеною на рис. 5.1. Стан об’єкта дослідження можна подати залежністю:

$$Y = f\left(X, U, Z\right), \tag{5.1}$$

де $X = \left(x_1, x_2, ... x_k\right)$ – незалежні керуючі (вхідні) змінні, які в процесі експерименту можна цілеспрямовано змінювати (напруга живлення, технологічні режими і інші);

$U = \left(u_1, u_2, ... u_m\right)$ – контрольовані збуджуючі впливи, які не уможливлюють цілеспрямованої зміни під час досліджень (температура навколишнього середовища, освітленість і інші);

$Z = \left(z_1, z_2, ... z_h\right)$ – неконтрольовані і некеровані збудження, невідому досліднику, які повільно змінюються в часі випадковим чином;

$Y = \left(y_1, y_2, ... y_n\right)$ – контрольовані чи розрахункові параметри, які характеризують стан об’єкта.

Такий принцип подання об’єкта (рис. 5.1) ґрунтується на використанні в техніці принципу „чорного ящика”, тобто системи, структура якої прихована від спостерігача, а роздуми про її функціонування ґрунтуються лише на основі зовнішніх впливів і відповідних їм реакції системи. Відповідно, однією з основних задач експерименту є виявлення взаємозв’язків між вхідними і вихідними параметрами об’єкта і подання їх у кількісній формі в вигляді математичної моделі.

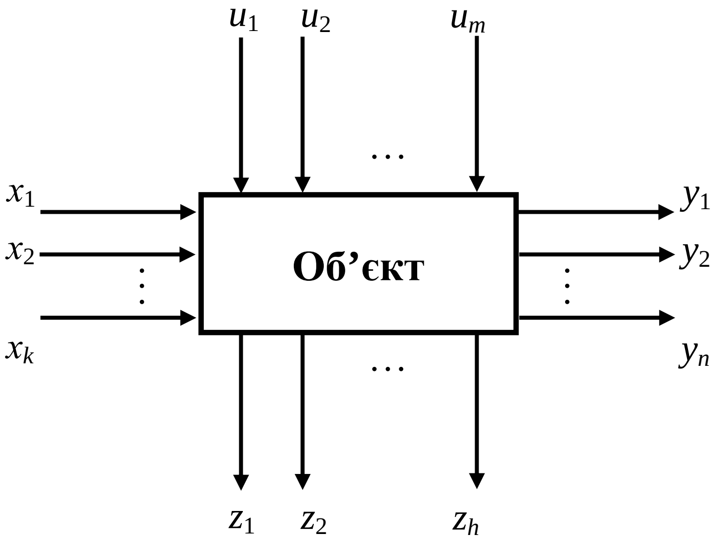


Рис. 5.1. Структурна схема об’єкта дослідження

Така модель є математичним відображенням найбільш суттєвих взаємозв’язків між параметрами об’єкта, являє собою сукупність рівнянь, умов і алгоритмічних правил, що дає змогу отримати інформацію про наявні в об’єкті процеси. Що в свою чергу можна використати для керування модельованим об’єктом з метою пошуку оптимальних умов, а також аналізувати і проектувати системи.

Вхідні параметри, які здійснюють вплив на об’єкт і можуть бути виміряні, називають **факторами**. Так в процесі дослідження вимірювального перетворювача з метою отримання його математичної моделі в якості факторів можуть прийматися як вимірювальна величина, так і температура навколишнього середовища, напруга живлення та інші. Тому, в процесі планування активного експерименту фактори повинні бути керованими і незалежними.

Кожний фактор має область визначення, яку визначають до проведення експерименту. Область може бути подана у вигляді неперервної чи дискретної величин. У разі неперервної області, доцільно здійснити її штучну дискретизацію. Вважається, що кожний із параметрів може змінюватися в деяких межах:

$$x_{iH} \le x_i \le x_{iB} \ (i = 1, 2, \ldots, k);$$
$$u_{jH} \le u_j \le u_{jB} \ (j = 1, 2, \ldots, m); \qquad (5.2)$$
$$z_{gH} \le z_g \le z_{gB} \ (g = 1, 2, \ldots, h).$$

Вихід хоча би одного параметра за ці межі призводить до порушення нормальної роботи приладу (чи нормального проходження процесу). Задача дослідника полягає в тому, щоб при фіксованих параметрах $\boldsymbol{z_g}$ **= const** і $\boldsymbol{u_j}$ **= const** вибрати такі значення $\boldsymbol{x_i}$ **= var** (таку робочу точку в області працездатності), за яких вихідний (чи оптимізуючий) параметр об’єкта $\boldsymbol{y}$ досягає оптимального значення.

Отже необхідно оптимізувати функцію $\boldsymbol{y = f\ (x_i}$ **= var,** $\boldsymbol{u_j}$ **= const,** $\boldsymbol{z_g}$ **= const)** в області визначення $\boldsymbol{x_i}$.

Кожна конкретна комбінація факторів розглядається як точка у багатовимірному факторному просторі. Область (множина) можливих комбінацій факторів, побудована в багатовимірному факторному просторі, називають **областю планів експерименту**.

В процесі планування експерименту з метою знаходження оптимальних умов в якості єдиної вихідної величини розглядають критерії оптимальності (параметр оптимізації), що залежить від вихідних параметрів об’єкта. Цю функцію розглядають як критерій відгуку об’єкта на вказану комбінацію факторів і називають **функцією відгуку**. Геометричний образ у факторному просторі відповідної функції відгуку називають **поверхнею відгуку**.

Залежно від джерела інформації, що використовується для побудови математичної моделі, розрізняють **фізичні** (аналітичні) та **статистичні** (емпіричні) моделі.

Фізичні моделі подаються у вигляді складних систем рівнянь (алгебраїчних, диференціальних, інтегральних чи диференціально-інтегральних), які дають змогу максимально точно описати процеси, що проходять в об'єкті, і допускають екстраполяцію в точки факторного простору, в яких неможливо безпосередньо спостерігати ці процеси.

Статистичні моделі отримують внаслідок статистичного опрацювання отриманої експериментальної інформації. Ці моделі мають відносно просту структуру і найчастіше подаються у вигляді поліномів. Область їх використання обмежена ближнім простором робочих точок, в яких проводяться експерименти. В багатьох випадках побудова таких моделей не потребує значних затрат часу і ресурсів.

Розрізняють також **стаціонарні** та **динамічні** моделі. Стаціонарні моделі використовуються для опису незмінних в часі співвідношень, динамічні описують перехідні процеси, тобто нестаціонарний стан.

5.3 Основні етапи проведення експериментальних досліджень

Планування та організація експерименту включає наступні основні етапи:

– постановка задачі (визначення мети експерименту, оцінка допустимих затрат часу і ресурсів, встановлення типу задачі);

– збір апріорної інформації про об'єкт дослідження (вивчення наукових публікацій);

– вибір способу розв'язку і стратегії його реалізації (встановлення типу моделі, виявлення можливих факторів впливу, виявлення параметрів, вибір цільових функцій);

– перевірка вибраного способу розв'язку задачі (попередні експерименти для перевірки експериментальної установки і методики, а також попередня оцінка якості моделі);

– реалізація вибраного способу розв'язання задачі (уточнення типу експериментальної установки, визначення значення цільової функції і факторів, об'єму вибірки, кратності повторення дослідів, завершення етапу проведення експериментів);

– аналіз та інтерпретація результатів, їх подання (отриманні оцінок потрібних величин і визначення ступеня їх достовірності, інтерпретація результатів аналізу в термінах і поняттях тієї області науки чи техніки, для якої було проведено експеримент).

5.4 Класифікація задач експерименту

Найпоширенішими задачами, з розв’язанням яких стикається експериментатор, є:

– оцінка певних характеристик об’єкта вивчення, які проявили себе статистично, перевірка деяких гіпотез стосовно цих характеристик; ця задача належить **до вимірних процесів**;

– виявлення впливу на вихідну величину факторів – **дисперсійний аналіз**;

– встановлення функції відгуку, тобто статистично достовірної залежності, яка пов’язує відгук з факторами, тобто побудова математичної моделі досліджуваного об’єкта – **регресійний аналіз**;

– визначення ступеня взаємного статистичного зв’язку двох величин – **кореляційний зв'язок**;

– знаходження оптимальних умов проходження процесу, тобто оптимальних значень факторів, за яких відгук максимальний (мінімальний) – **екстремальний експеримент**.

5.5 Параметри оптимізації

Вибір **параметрів оптимізації** (**критеріїв відгуку**) – головний етап роботи на стадії попереднього вивчення об’єкта дослідження.

Параметр оптимізації є відгуком на вплив факторів, які визначають поведінку досліджуваної системи. Кожний реальний об’єкт може характеризуватись декількома чи одним параметром оптимізації (критерієм відгуку).

Параметр оптимізації обирають з врахуванням комплексу вимог, а саме:

– наявність числової оцінки, бути кількісним;

– володіти однозначністю в статистичному значенні; заданому набору значень факторів відповідає лише одне значення параметра оптимізації, зворотне твердження помилкове (одному і тому ж значенню параметра можуть відповідати різні набори значень факторів);

– бути універсальним і всесторонньо відображати характеристики об'єкта, процесу, явища (характерно, в більшості випадків, для техніко-економічних параметрів);

– бути ефективним, як з погляду досягнення мети, так і в статистичному плані; статистично ефективним параметром оптимізації є той, який має найменші помилки вимірювань;

– володіти фізичним змістом; ця вимога не лише визначає мету дослідження, але й полегшує інтерпретацію отриманих результатів експерименту.

Задачі з одним вихідним параметром володіють очевидними перевагами. Але на практиці дослідники мають справу з декількома вихідними параметрами. Для прикладу, виготовляючи резинові і пластикові вироби потрібно враховувати фізико-механічні, технологічні, економічні та інші параметри. Математичні моделі можна побудувати для кожного із параметрів, але одночасно оптимізувати декілька функцій неможливо.

Оптимізують одну функцію, найважливішу для дослідника, із множини вихідних параметрів вибирають один як параметр оптимізації, а інші слугують обмеженнями.

Використовуючи кореляційний аналіз, досліджується можливість зменшення числа вихідних параметрів. Крім того, для вибору єдиного параметра оптимізації використовуються математичні перетворення, перехід від декількох параметрів оптимізації до узагальненого.

Нехай об'єкт дослідження характеризують $\boldsymbol{n}$ відгуків $\boldsymbol{y_u}$ $(\boldsymbol{u = 1, 2 \dots n})$, кожний з яких має свою фізичну суть, і, найчастіше, різну розмірність та вимірюється в $\boldsymbol{N}$ дослідах. Тоді $\boldsymbol{y_{ui}}$ – значення $\boldsymbol{u}$-го відклику в $\boldsymbol{i}$-му досліді $(\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, N})$. Для об'єднання відгуків, потрібно ввести для кожного з них безрозмірну шкалу, яка має бути однотипною для всіх об’єднаних відгуків. Якщо кожному $\boldsymbol{y_{ui}}$ присвоїти лише два значення: 0 – незадовільний результат, 1 – задовільний результат, то так можна стандартизувати шкалу відгуків.

Узагальнений відгук в цьому випадку також повинен приймати одне із цих двох можливих значень. Для вибору значення 1 потрібно, щоб усі відгуки в досліді прийняли значення 1. І, відповідно, якщо хоча би один з відгуків приймав значення 0, узагальнений відгук прийме значення 0.

Для побудови узагальненого відгуку зручно скористатись формулою:

$$Y_i = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^{n} y_{ui}}\,, \tag{5.3}$$

де Y_i – узагальнений відгук в i-му досліді;

П – добуток окремих відгуків $y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni}$.

Якщо для кожного із окремих відгуків відомий „ідеал” $\boldsymbol{y_{u0}}$ – найкраще значення u-го відгуку, тоді модуль різниці $\left|y_{ui} - y_{u0}\right|$ можна розглядати як деяку міру, близьку до ідеалу.

Для переходу до безрозмірних значень, достатньо модуль різниці розділити на бажане значення $\left|y_{ui} - y_{u0}\right| / y_{u0}$.

Недоліком наведеної оцінки є те, що всі окремі відгуки входять до узагальненого відгуку на рівних правах. На практиці різні показники не однаково впливають на об’єкт. Усунути цей недолік можна введенням деякої ваги $\boldsymbol{a_u}$.

$$Y_i = \sqrt{\sum_{u=1}^{n} a_u \left(\frac{y_{ui} - y_{u0}}{y_{u0}}\right)^2}\,, \tag{5.4}$$

коли $\sum_{u=1}^{n} a_u = 1$ і $a_u > 0$. Щоб проранжувати відгуки за ступенем важливості і знайти відповідну вагу, можна скористатись експертними оцінками.

5.6 Фактори

Під **фактором** розуміють величину, що впливає на досліджуваний процес, приймає в деякий момент визначене значення. Фактор вважається заданим, якщо разом з його назвою вказується область його визначення. **Область визначення** – сукупність усіх значень, які може приймати цей фактор.

Область визначення може бути як неперервною, так і дискретною. В процесі планування експерименту значення факторів приймаються дискретними. В практичних задачах область визначення факторів має обмеження, які зумовлені принциповим чи технічним характером.

Розрізняють **якісні** та **кількісні** фактори. Якісні фактори рекомендується враховувати на першій стадії експерименту (марка матеріалу, тип обладнання та інші). До кількісних належать фактори, які можна виміряти.

Вибір факторів необхідно здійснювати, враховуючи наступні вимоги:

– **керованість** – можливість надавати фактора будь-який рівень в області його визначення і підтримувати цей рівень протягом досліду;

– **однозначність** – фактор не повинен бути функцією інших факторів.

Характерним для планування експерименту є одночасність вимірювання декількох факторів. Тому існують вимоги для сукупності факторів:

– **сумісність** – кожен фактор може бути встановлений на будь-якому рівні незалежно від значень рівнів інших факторів;

– **незалежність** – відсутність кореляції між факторами (відсутність лінійного зв’язку між факторами);

– **точність** – ступінь точності визначається діапазоном зміни факторів; точність фіксації рівнів факторів повинна бути значно вищою за точність вимірювання параметра оптимізації.

Вибір області визначення супроводжується наступними обмеженнями:

– принципові обмеження для значень факторів, які не можуть бути порушені (мінімальне температурне значення – абсолютний нуль);

– техніко-економічні обмеження (вартість сировини);

– обмеження, зумовлені конкретними умовами проведення процесу (можливості засобів вимірювання).

Процедура вибору області експерименту передбачає вибір основного (нульового) рівня та вибір інтервалу варіювання (табл. 5.1).

В таблиці 5.1 наведено приклад вибору факторів та їх рівнів варіювання на основі теоретичних досліджень для визначення тривалості (t) відкачування повітря з камер змінного вакуумметричного тиску (до камер змінного вакуумметричного тиску належать міжстінкова камера виконавчого механізму і камера змінного вакуумметричного тиску генератора імпульсів тиску) залежно від діаметра перепускного отвору $d_{пер}$ генератора імпульсів тиску, вакуумметричного тиску P_i.

Обрані для експерименту кількісні чи якісні стани факторів називаються **рівнями факторів**.

Таблиця 5.1

Рівні варіювання факторів та їх кодові значення

<table>
<tr><th rowspan="4">Фактор</th><th rowspan="4">Позначення</th><th rowspan="4">Розмірність</th><th colspan="3">Рівні факторів</th><th rowspan="4">Інтервал варіювання ε</th></tr>
<tr><th>верхній</th><th>нульовий</th><th>нижній</th></tr>
<tr><th colspan="3">Кодові значення</th></tr>
<tr><th>+1</th><th>0</th><th>-1</th></tr>
<tr><td>Вакуумметричний тиск, P_i</td><td>x_1</td><td>кПа</td><td>48</td><td>44</td><td>40</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Діаметр перепускного отвору, $d_{пер}$</td><td>x_2</td><td>мм</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table>

За нульову точку вибирають такий стан об’єкта дослідження, який приймається за вихідне в процесі пошуку оптимуму. Оптимізація пов’язана з покращенням стану об’єкта порівняно з його станом в нульовій точці.

Якщо проведенню експерименту передували інші дослідження в цій області, за нульову приймається точка, в якій параметр оптимізації має найкраще значення, встановлене внаслідок формалізації апріорної інформації. В цьому разі нульовими рівнями факторів є значення, поєднання яких відповідають координатам нульової точки.

Інтервалом варіювання факторів називається деяке число (для кожного фактора своє), додавання якого до основного рівня дає **верхній**, а відніманні – **нижній** рівня факторів. Інтервал варіювання – відстань на координатній осі між основним (нульовим) і верхнім рівнями, між основним і нижнім рівнями.

Нижній рівень – значення фактора, яке відкладається у від’ємному напрямі осі координат. **Верхній рівень** – значення фактора, яке відкладається в додатному напрямі осі координат. Верхній рівень прийнято позначати „+”, нижній рівень – „-”.

На вибір інтервалу варіювання накладають наступні обмеження:

– нижній рівень не може бути меншим помилки фіксування рівня фактора;

– верхній чи нижній рівні не повинні виходити за межі області визначення.

Надмірне збільшення величини інтервалів варіювання може спричинити зниження ефективності пошуку оптимуму. Дуже малий інтервал варіювання зменшує область експерименту, що уповільнює пошук оптимуму.

Вибираючи інтервал варіювання доцільно враховувати число рівнів варіювання факторів в області експерименту (якщо це можливо). Від числа рівнів залежить об’єм експерименту та ефективність оптимізації.

Залежність числа дослідів від числа рівнів факторів має вигляд:

$$N = p^k, \tag{5.5}$$

де N – число дослідів;

p – число рівнів факторів;

k – число факторів.

В кожному окремому випадку число рівнів вибирають з врахуванням умов задачі та імовірних методів планування експерименту. Геометричною інтерпретацією області визначення факторів є поверхня відгуку. У випадку двох факторів маємо двовимірний простір (рис. 5.2). Якщо фактори сумісні, то межі створюють на площині деякий прямокутник. Для числа факторів більше двох простір багатовимірний і геометрична наочність втрачається.

Простір, в якому будується поверхня відгуку, називається факторним простором. Він задається координатними осями, за якими відкладаються значення факторів і параметрів оптимізації.

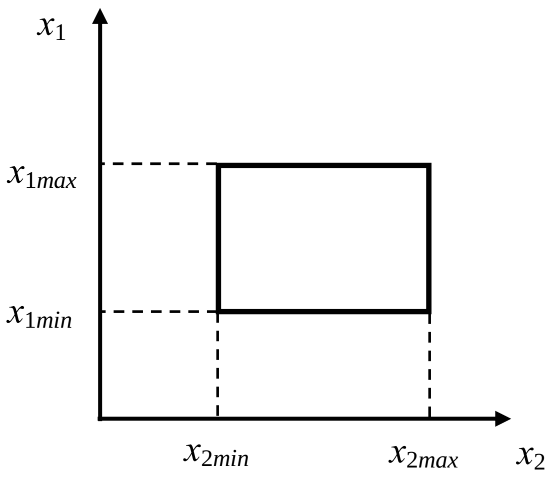


Рис. 5.2. Область визначення факторів: ——— *межі сумісності факторів,* – – – – *межі визначення факторів*

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте визначення терміну „експеримент”.
2. Які питання вирішує планування експерименту?
3. Класифікація експериментів?
4. Що називається факторами, областю визначення факторів?
5. Що називається критерієм відгуку та поверхнею відгуку?
6. Які етапи проведення експериментальних досліджень ?
7. Назвіть основні задачі експерименту.
8. Дайте визначення терміну „параметр оптимізації”.
9. Які вимоги ставляться до параметра оптимізації?
10. Дайте визначення терміну „фактор”.
11. Які вимоги до факторів? Що називається рівнями фактора?
12. Дайте визначення та наведіть приклад інтервалу варіювання фактора.
13. Які обмеження потрібно враховувати, вибираючи інтервал варіювання фактора?
14. Як залежить кількість дослідів в експерименті від числа рівнів фактора? Наведіть формулу для розрахунку.
15. Дайте визначення факторного простору.

6 ЕЛЕМЕНТИ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ

6.1 Задачі дисперсійного аналізу

Середні значення досліджуваних величин змінюються в будь-якому експерименті внаслідок зміни основних факторів (як якісних, так і кількісних), що визначають умови експерименту, а також від випадкових факторів. Дослідження впливу на мінливість середніх тих чи інших факторів – основна задача дисперсійного аналізу.

Залежно від числа джерел дисперсії розрізняють однофакторний та багатофакторний дисперсійний аналіз. Основою дисперсійного аналізу є властивість адитивності дисперсії досліджуваної випадкової величини, зумовленої дією незалежних факторів.

Використовуючи класичний метод дослідження варіюють лише один фактор, інші залишаються постійними. Для кожного фактора проводиться своя серія спостережень (досліджень), що не використовувалась в процесі дослідження інших факторів. За такого дослідження не вдається визначити взаємодію факторів за одночасної їх зміни. За дисперсійного аналізу кожне спостереження (дослідження) дає змогу одночасно оцінити усі фактори та їх взаємодію.

Дисперсійний аналіз полягає у виділенні та оцінці окремих факторів, що спричиняють мінливість випадкової величини, яка досліджується. Для цього здійснюється розкладання сумарної вибіркової дисперсії на складові, зумовлені незалежними факторами. Кожна із цих складових представляє собою оцінку дисперсії генеральної сукупності. Для оцінки значимості впливу даного фактора, необхідно оцінити значимість відповідної вибіркової дисперсії в залежності з дисперсією відтворюваності, зумовленою випадковою величиною. Як відомо, перевірка значимості оцінок дисперсії проводять з використанням критерію Фішера. Якщо розрахункове значення критерію Фішера менше табличного – вплив фактора, що розглядається, не значимий. Якщо розрахункове значення критерію Фішера виявиться більшим табличного – фактор впливає на мінливість середніх.

Надалі припустимо, що виконуються наступні припущення:

- випадкові помилки спостережень (досліджень) мають нормальний розподіл;
- фактори впливають лише на зміну середніх значень, а дисперсія спостережень (досліджень) залишається постійною;
- експерименти рівноточкові.

Вимога нормального розподілу зумовлена вибором головних факторів при дослідженні процесу методом дисперсійного аналізу. До випадкових факторів, при отриманні нормального розподілу вихідної величини, слід віднести ті фактори, вплив яких дуже малий. Винятком складають лише фактори, які самі дають нормальний розподіл.

Фактори, що розглядаються в дисперсійному аналізі поділяються:

- із випадковими рівнями;
- із фіксованими рівнями.

У першому випадку припускається, що вибір рівнів здійснюється із безкінечної сукупності можливих рівнів та супроводжується рандомізацією. Результати такого експерименту мають велике значення, оскільки висновками з такого експерименту можна охопити всю генеральну сукупність. Якщо всі рівні вибираються випадково, математична модель такого експерименту називається – ***модель із випадковими рівнями факторів (випадкова модель)***. Відповідно, якщо всі рівні фіксовані – ***модель із фіксованими***

рівнями факторів. Існують моделі, за яких частина факторів розглядається на фіксованих рівнях, а рівні інших вибираються випадково – ***модель змішаного типу***.

Дисперсійний аналіз застосовується в різних формах залежно від структури досліджуваного процесу.

6.2 Однофакторний дисперсійний аналіз

Розглянемо дію одиничного фактора ***A*** (кількісного чи якісного), що приймає ***k*** різноманітних значень (рівнів фактора). На і-му рівні здійснюється $\boldsymbol{n_i}$ досліджень, результати яких можна записати у вигляді:

$$\begin{array}{c} y_{11}\ y_{21}\cdots\ y_{k_1} \\ y_{12}\ y_{22}\cdots\ y_{k_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{1n_1}\ \ y_{2n_2}\ \cdots\ y_{kn_k} \end{array}$$

Нехай результат будь-якого спостереження можна подати у вигляді моделі:

$$y_{ij} = \mu + d_i + \varepsilon_{ij}, \qquad (6.1)$$

де μ – сумарний ефект у всіх дослідах;

d_i – ефект фактора А на і-му рівні (i = 1, 2, …, k);

ε_{ij} – помилка вимірювань на і-му рівні.

Припустимо також, що дослідження на фіксованому рівні фактора нормально розподілені щодо середнього значення $\boldsymbol{\mu+d_i}$ із загальною дисперсією $\boldsymbol{\sigma^2}$. Відповідно, загальне число дослідів ***N*** рівне:

$$N = n_1 + n_2 + ... + n_k. \qquad (6.2)$$

Потрібно перевірити нульову гіпотезу рівності середніх значень на різних рівнях фактора ***A***:

$$m_1 = m_2 = ... = m_k = m. \qquad (6.3)$$

Для полегшення розрахунків потрібно забезпечити рівне число дослідів на кожному рівні фактора ***A***: $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n$ (табл. 6.1).

Загальне число спостережень (дослідів) N рівне $n \cdot k$. Позначимо через $\overline{y}_i$ середні значення спостережень (дослідів) на i-му рівні

$$\overline{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_{ij}}{n} = \frac{A_j}{n}. \tag{6.4}$$

Таблиця 6.1

Вихідні дані для однофакторного дисперсійного аналізу з рівним числом повторності дослідів

№	Рівні фактора *A*			
	a_1	a_2	…	a_k
1	y_{11}	y_{21}	…	y_{k1}
2	y_{12}	y_{22}	…	y_{k2}
…	…	…	…	…
n	y_{1n}	y_{2n}	…	y_{kn}
Разом	$A_1 = \sum_{j=1}^{n} y_{1j}$	$A_2 = \sum_{j=1}^{n} y_{2j}$	…	$A_k = \sum_{j=1}^{n} y_{kj}$

Загальне середнє значення для усієї вибірки із N спостережень:

$$\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overline{y}_i . \tag{6.5}$$

Дисперсійний аналіз вимагає визначення загальної вибіркової дисперсії S^2:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij} - \overline{y}\right)^2}{N-1} = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right)^2}{N}\right]. \tag{6.6}$$

Необхідно вибіркову дисперсію S^2 (6.6) розкласти на складові, які характеризували б вклад фактора A і фактора випадковості. Фактор випадковості оцінюється завдяки наявності повторних дослідів на кожному рівні.

Для визначення вибіркової дисперсії на кожному рівні скористаємось формулою:

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right)^2}{n}\right]. \tag{6.7}$$

$$i = 1,2,...,k.$$

У разі виникнення сумнівів щодо однакової точності експериментів, однорідність дисперсії можна перевірити, скориставшись критерієм Кохрена.

Якщо між дисперсіями немає значимої відмінності, для оцінки генеральної дисперсії $\boldsymbol{\sigma^2}$, за допомогою якої характеризують фактор випадковості, використовують вибіркову дисперсію $S_в^2$:

$$S_в^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} S_i^2 = \frac{1}{k(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right)^2\right]. \tag{6.8}$$

Число ступенів вільності дисперсії $S_в^2$ рівне $k(n-1) = N - k$. Наближену оцінку для дисперсії фактора ***A*** отримують так:

$$\sigma_A^2 \approx S^2 - S_в^2. \tag{6.9}$$

Аналізуючи відхилення середніх $\bar{y}_i$ на окремих рівнях від загального середнього усієї вибірки $\bar{y}$ можна отримати точнішу оцінку для σ_A^2:

$$\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)^2 \approx \sigma_A^2 + \frac{\sigma^2}{n} \approx \sigma_A^2 + \frac{S_в^2}{n}. \tag{6.10}$$

Звідки

$$\sigma_A^2 \approx \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)^2 - \frac{S_в^2}{n}. \tag{6.11}$$

Дисперсія фактора ***A*** для моделі із фіксованими рівнями

(σ_A^2) не пов'язана з випадковою величиною, це умовна назва для математичного сподівання середнього квадрату відхилень, зумовленого впливом фактора ***A***.

Таке позначення визначає розсіювання, спричинене впливом фактора ***A*** аналогічно показнику впливу випадкового фактора, що дає змогу безпосередньо порівнювати фактор ***A*** з ефектом випадковості. Введемо таке позначення:

$$S_A^2 = \frac{n}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(y_i - \bar{y}\right)^2 \approx n\sigma_A^2 + S_в^2 . \qquad (6.12)$$

Ця дисперсія має k – 1 ступенів свободи. Якщо дисперсія S_A^2 істотно відрізняється від $S_в^2$, нульова гіпотеза $m_1 = m_2 = ... = m_k = m$ відхиляється і вплив фактора ***A*** вважається істотним. Перевіряється нульова гіпотеза за критерієм Фішера.

Оскільки альтернативою $\sigma_A^2 = \sigma_в^2$ є нерівність $\sigma_A^2 > \sigma_в^2$, для перевірки гіпотези застосовується односторонній критерій Фішера. Вплив фактора А вважається значимим, якщо:

$$\frac{S_A^2}{S_в^2} > F_{1-p}\left(f_1, f_2\right), \; f_1 = k-1, \; f_2 = k(n-1) = N-k . \quad (6.13)$$

Дисперсійний аналіз проводять наступним чином, підраховуючи:

– результати за стовпцями:

$$A_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ji} . \qquad (6.14)$$

– суму квадратів усіх спостережень:

$$SS_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 . \qquad (6.15)$$

– суму квадратів результатів за стовпцями, поділену на число дослідів в стовпцях:

$$SS_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} A_i^2 . \qquad (6.16)$$

– квадрат загального результату, поділений на число всіх дослідів (коректуючий член):

$$SS_3 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right)^2. \qquad (6.17)$$

– суму квадратів для стовпців:

$$SS_A = SS_2 - SS_3. \qquad (6.18)$$

– $SS_{заг}$ – загальну суму квадратів, рівну різниці між сумою квадратів усіх дослідів і коректуючим членом:

$$SS_{заг} = SS_1 - SS_3. \qquad (6.19)$$

– $SS_{зал}$ – залишкову суму квадратів для оцінки помилки експерименту:

$$SS_{зал} = SS_1 - SS_2. \qquad (6.20)$$

– дисперсію S_A^2:

$$S_A^2 = \frac{SS_A}{k-1}. \qquad (6.21)$$

– дисперсію $S_в^2$:

$$S_в^2 = \frac{SS_{зал}}{k(n-1)}. \qquad (6.22)$$

Результати розрахунку необхідно звести до таблиці дисперсійного аналізу (табл. 6.2).

Якщо відношення $S_A^2 / S_в^2 < F_{1-p}$, то вплив фактора A можна вважати незначним. Загальна дисперсія S^2 пов'язана лише з фактором випадковості і може використовуватись як оцінка для дисперсії відтворюваності. Така оцінка є зручнішою, ніж (6.8), оскільки має більше число ступенів свободи, рівне $kn-1$. Аналізуючи результати дисперсійного аналізу, необхідно розуміти, що достатньо мале значення дисперсійного відношення може вказувати на те, що вплив якогось важливого неконтрольованого в процесі експерименту фактора не був рандомізований.

Як наслідок, це призводить до збільшення дисперсії всередині рівнів, а дисперсію між рівнями залишити незмінною, що зменшить дисперсійне відношення. В такому разі результати експерименту не відповідають моделі (6.1).

Якщо ж виконується нерівність (6.13), відмінності між дисперсіями S_A^2 і $S_в^2$ значні, як наслідок, значний вплив фактора ***A***.

Оцінка впливу фактора ***A*** визначається із (6.12):

$$\sigma_A^2 \approx \frac{S_A^2 - S_в^2}{n}. \qquad (6.23)$$

Таблиця 6.2

Однофакторний дисперсійний аналіз
(з рівним числом повторності дослідів)

Джерело дисперсії	Число ступенів свободи	Сума квадратів	Середній квадрат	Математичне сподівання середнього квадрату
A	$k-1$	$SS_A = SS_2 - SS_3$	$S_A^2 = \frac{SS_A}{k-1}$	$n\sigma_A^2 + \sigma_в^2$
Залишок	$k(n-1)$	$SS_{зал} = SS_1 - SS_2$	$S_{заг}^2 = \frac{SS_{зал}}{k(n-1)}$	$\sigma_в^2$
Загальна сума	$kn-1$	$SS_{заг} = SS_1 - SS_3$	$\frac{SS_{заг}}{kn-1}$	

Нульова гіпотеза в цьому разі $m_1 = m_2 = ... = m_k = m$ відкидається і різниця між середніми $m_1, m_2, ..., m_k$ вважається істотною. Використавши критерій Стьюдента, Фішера чи ранговий критерій Дункана можна виявити, які середні відмінні.

Розглянемо схему розрахунків для різного числа паралельних дослідів. Нехай на рівні $\boldsymbol{a_i}$ проведено $\boldsymbol{n_i}$ паралельних дослідів. Загальне число дослідів рівне:

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i \,. \qquad (6.24)$$

Визначимо:

– результати за стовпцями:

$$A_i = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ji}\ ,\ i = 1,2,...,k\ . \qquad (6.25)$$

– суми квадратів усіх дослідів:

$$SS_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_j} y_{ij}^2\ . \qquad (6.26)$$

– суму квадратів результатів за стовпцями, поділених на число дослідів у відповідному стовпці:

$$SS_2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{A_i^2}{n_i}\ . \qquad (6.27)$$

– квадрат загального результату, поділений на число всіх дослідів:

$$SS_3 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right)^2\ . \qquad (6.28)$$

Подальші розрахунки проводять за формулами (6.18) – (6.22). Якщо дисперсії S_A^2 і $S_в^2$ значно відрізняються, то дисперсія фактора ***A*** розраховується:

$$\sigma_A^2 \approx \frac{(k-1)N}{N^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i}\left(S_A^2 - S_в^2\right)\cdot \qquad (6.29)$$

Приклад. Розглянемо застосування однофакторного дисперсійного аналізу для виявлення впливу тиску (фактора ***A***) на тривалість наповнення повітрям певного фіксованого об'єму. Досліджувався вплив п'яти різних значень тиску на тривалість наповнення повітрям певного фіксованого об'єму (***y***, сек.). Результати експерименту з різними значеннями тиску (фіксовані рівні фактора А) наведено в таблиці 6.3.

Визначимо середні значення тривалості наповнення для кожного значення тиску:

$$\bar{y}_1 = \frac{680{,}95}{8} = 85{,}1;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{607{,}8}{8} = 75{,}97\ ;$$

$$\bar{y}_3 = \frac{461{,}95}{8} = 57{,}74;$$

$$\bar{y}_4 = \frac{652{,}9}{8} = 81{,}61;$$

$$\bar{y}_5 = \frac{528{,}35}{8} = 66{,}04 \cdot$$

Таблиця 6.3

Результати експерименту (для прикладу)

Номер досліду	Рівні фактора *A*				
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	79,8	87,3	42,45	76	70,7
2	86,3	69,6	64,3	83,5	64,65
3	86,5	81,75	78,9	72,8	38,5
4	92,3	77,95	61	89	77
5	76,5	83,65	31,3	76,5	91,5
6	87,05	64,8	72,85	87,45	68
7	82,5	67,3	58,65	74,5	38,05
8	90	75,45	52,5	93,15	79,95
Результати	A_1 = 680,95	A_2 = 607,8	A_3 = 461,95	A_4 = 652,9	A_5 = 528,35

Розрахуємо загальне середнє для всіх результатів:

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} \bar{y}_i = 73{,}2 \cdot$$

Для спрощення розрахунків замість значення y будемо розглядати відхилення y' цих значень від величини, близької до загального середнього всіх значень, рівної 73 (табл. 6.4).

За даними таблиці 6.4 проведемо розрахунки за формулами (6.15) – (6.22) відповідно до наведеної вище методикою. Результати розрахунків подано в таблиці 6.5.

Отримані внаслідок розрахунку дисперсії порівняємо за критерієм Фішера:

$$F = S_A^2 / S_в^2 = 1021/150{,}9 = 6{,}9\,.$$

За таблицею 4.4 знаходимо $F_{0,95}(4{,}35)$ = 2,65. Оскільки

F>2,65, відмінності тисків потрібно визнати значимими. Встановивши за допомогою дисперсійного аналізу, що середні значення тривалості наповнення загалом суттєво відрізняються між собою, перейдемо до порівняння впливу окремих значень тисків. Порівняння проведемо з використанням критерію Дункана із довірчою імовірністю β = 0,95.

Таблиця 6.4

Результати експерименту (відхилення від середнього)

Номер досліду	Рівні фактора A				
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	6,8	14,3	-30,55	3	-2,3
2	13,3	-3,4	-8,7	10,5	-8,35
3	13,5	8,75	5,9	-0,2	-34,5
4	19,3	4,95	-12	16	4
5	3,5	10,65	-41,7	3,5	18,5
6	14,05	-8,2	-0,15	14,45	-5
7	9,5	-5,7	-14,35	1,5	-34,95
8	17	2,45	-20,5	20,15	6,95
Результати	96,95	23,8	-122,05	68,9	-55,65

Таблиця 6.5

Результати розрахунків

Джерело дисперсії	Число ступенів свободи	Сума квадратів	Середній квадрат
A	4	4084,5	1021
Помилка	35	5281,46	150,9
Загальна сума	39	9365,96	

Нормована помилка середнього рівна:

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{150{,}9/8} = 4{,}35\,.$$

Розмістимо середні значення в порядку зростання їх величини та випишемо значимі ранги (довідкові таблиці для критерію Дункана) для f =35 і p = 0,05:

$$\bar{y}_3 = 57{,}74;\ \bar{y}_5 = 66{,}04;\ \bar{y}_2 = 75{,}97;\ \bar{y}_4 = 81{,}61;$$

$$\bar{y}_1 = 85{,}1.$$

p	2	3	4	5
Ранги, r	2,875	3,025	3,11	3,185
$r \cdot S_y$	12,5	13,2	13,52	13,9

$\bar{y}_1 - \bar{y}_3 = 27{,}3 > 13{,}9$ – різниця значима

$\bar{y}_1 - \bar{y}_5 = 19{,}05 > 13{,}52$ – різниця значима

$\bar{y}_1 - \bar{y}_2 = 9{,}13 < 13{,}2$ – різниця незначима

$\bar{y}_1 - \bar{y}_4 = 3{,}49 < 12{,}5$ – різниця незначима

$\bar{y}_4 - \bar{y}_3 = 23{,}81 > 13{,}52$ – різниця значима

$\bar{y}_4 - \bar{y}_5 = 15{,}56 > 13{,}2$ – різниця значима

$\bar{y}_4 - \bar{y}_2 = 5{,}64 < 12{,}5$ – різниця незначима

$\bar{y}_2 - \bar{y}_3 = 18{,}17 > 13{,}2$ – різниця значима

$\bar{y}_2 - \bar{y}_5 = 9{,}92 < 12{,}5$ – різниця незначима

$\bar{y}_5 - \bar{y}_3 = 8{,}25 < 12{,}5$ – різниця незначима

Приклад. Відомі результати вибіркового дослідження пробігу автомобільних шин нового типу в різних умовах експлуатації (табл. 6.6). Встановити, чи існує залежність між умовами експлуатації і величиною пробігу шин, гарантуючи результат з імовірністю 0,95.

Фактор – умови експлуатації.

Критерій відгуку – величина пробігу шин.

Для кожної групи визначимо середній пробіг шин:

Таблиця 6.6

Пробіг шин в різних умовах експлуатації

Умови експлуатації	Пробіг шин, тис. км.	f_i
Міські	70,5; 71,8; 69,8; 58,9; 68,7; 72,1; 70,3; 69,1; 72,0; 58,7; 66,2	11
Мішані	58,9; 59,1; 60,1; 62,2; 60,5; 58,4; 59,0; 61,8	8
Заміські	54,2; 58,8; 56,6; 55,0; 56,4	5

Міські умови – $\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_{i1}}{11} = 68{,}0$, тис. км,

Мішані умови – $\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_{i2}}{8} = 60{,}0$, тис. км,

Заміські умови – $\bar{x}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_{i3}}{5} = 56{,}2$, тис. км,

Загальне середнє – $\bar{x}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{24} x_i}{24} = 62{,}9$, тис. км.

Отримані середні величини пробігу шин для різних умов експлуатації відрізняються. Для того, щоб встановити, чи ця різниця істотна та чи викликана умовами експлуатації, визначають дисперсійне відношення $F = S_A^2 / S_в^2$.

$$S_A^2 = \frac{(68-62{,}9)^2 \cdot 11 + (60-62{,}9)^2 \cdot 8 + (56{,}2-62{,}9)^2 \cdot 5}{3-1} = 288{,}92,$$

$$S_в^2 = 12{,}5.$$

$$F = \frac{288{,}92}{12{,}5} = 23{,}11.$$

За імовірності 0,95 та числа ступенів вільності $f_1 = 2$, $f_2 = 21$ за таблицею 4.4 знаходимо $\boldsymbol{F_T} = 3{,}467$. $F > F_T$, відповідно, умови експлуатації значно впливають на величину пробігу шин.

6.3 Двофакторний дисперсійний аналіз

Двофакторний дисперсійний аналіз досліджує вплив на процес одночасно двох факторів ***A*** та ***B***. Фактор ***A*** досліджується на рівнях $a_1, a_2, ..., a_k$, фактора ***B*** – на рівнях $b_1, b_2, ..., b_m$. Припустимо, що при кожному поєднання рівнів факторів А та В проводиться n паралельних досліджень (табл.

6.7).

Загальне число дослідів рівне $N = n \cdot k \cdot m$. Результат дослідження можна подати у вигляді моделі:

$$y_{ijq} = \mu + \alpha_j + \beta_j + \alpha_j \beta_j + \varepsilon_{ijq}, \qquad (6.30)$$

де μ – загальне середнє;

α_i – ефект фактора A на i-му рівні, $i = 1,2,\ldots,k$;

β_j – ефект фактора B на j-му рівні, $j = 1,2,\ldots,m$;

$\alpha_i\,\beta_j$ – ефект взаємодії факторів.

Таблиця 6.7

Дані для двофакторного дисперсійного аналізу з повтореннями

B	A						Результати
	a_1	a_2	…	a_i	…	a_k	
b_1	$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11n}$	$y_{211}, y_{212}, \ldots, y_{21n}$	…	$y_{i11}, y_{i12}, \ldots, y_{i1n}$	…	$y_{k11}, y_{k12}, \ldots, y_{k1n}$	B_1
b_2	$y_{121}, y_{122}, \ldots, y_{12n}$	$y_{221}, y_{222}, \ldots, y_{22n}$	…	$y_{i21}, y_{i22}, \ldots, y_{i2n}$	…	$y_{k21}, y_{k22}, \ldots, y_{k2n}$	B_2
b_j	$y_{1j1}, y_{1j2}, \ldots, y_{1jn}$	$y_{2j1}, y_{2j2}, \ldots, y_{2jn}$	…	$y_{ij1}, y_{ij2}, \ldots, y_{ijn}$	…	$y_{kj1}, y_{kj2}, \ldots, y_{kjn}$	B_j
⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮	⋮
b_m	$y_{1m1}, y_{1m2}, \ldots, y_{1mn}$	$y_{2m1}, y_{2m2}, \ldots, y_{2mn}$	…	$y_{im1}, y_{im2}, \ldots, y_{imn}$	…	$y_{km1}, y_{km2}, \ldots, y_{kmn}$	B_m
Результати	A_1	A_2	…	A_i	…	A_k	

Ефект взаємодії полягає у відхиленні середнього за дослідами в (ij)-й серії від суми перших трьох членів у моделі (6.30), а ε_{ijq} (q = 1,2, …,n) враховує варіацію всередині серії дослідів (помилка відтворюваності). Будемо вважати, що

ε_{ijq} розподілена нормально з нульовим математичним очікуванням і дисперсією $\sigma_в^2$. Якщо припустити, що між факторами немає взаємодії, то можна прийняти таку лінійну модель:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \beta_j + \varepsilon_{ijq}. \tag{6.31}$$

Ця модель застосовується за відсутності паралельних досліджень (табл. 6.8):

Таблиця 6.8

Дані для двофакторного дисперсійного аналізу без повторень

B	*A*				Резуль-тати
	a_1	a_2	…	a_k	
b_1	y_{11}	y_{21}	…	y_{k1}	B_1
b_2	y_{12}	y_{22}	…	y_{k2}	B_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
b_m	y_{1m}	y_{2m}	…	y_{km}	B_m
Резуль-тати	A_1	A_2	…	A_k	

Розглянемо спочатку лінійну модель (6.31). Через $\overline{y}_i$ та $\overline{y}'_j$ позначимо середні, відповідна, за стовпцями та за стрічками:

$$\overline{y}_i = \frac{A_i}{m}. \tag{6.32}$$

$$\overline{y}'_j = \frac{B_j}{k}. \tag{6.33}$$

через $\overline{\overline{y}}$ – середнє всіх дослідів:

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{k \cdot m} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} y_{ij} \ . \tag{6.34}$$

Розсіювання в середніх за стовпцями $\bar{y}_1, \bar{y}_2, ... \bar{y}_k$ щодо загального середнього $\bar{\bar{y}}$ не залежить від фактора ***B***, оскільки всі рівні фактора ***B*** усереднені. Це розсіювання пов'язане з впливом фактора ***A*** та випадкового фактора. Оскільки дисперсія середнього в ***m*** раз менша дисперсії одиничного вимірювання, маємо:

$$\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} \left(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}\right)^2 \approx \sigma_A^2 + \frac{\sigma^2}{m} \cdot \tag{6.35}$$

Розсіювання в середніх за стрічками не залежить від фактора ***A*** і пов'язано з впливом фактора ***B***:

$$\frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} \left(\bar{y}_i' - \bar{\bar{y}}\right)^2 \approx \sigma_B^2 + \frac{\sigma^2}{k} \cdot \tag{6.36}$$

Рівності (6.35) та (6.36) дозволяють, якщо відома оцінка дисперсії $\boldsymbol{\sigma}^2$, оцінити вплив факторів ***A*** та ***B***. Для оцінки фактора випадковості за відсутності паралельних досліджень потрібно здійснити низку заходів. Для початку знайдемо дисперсію дослідів за *i*-м стовпцем:

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} \left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2 \ . \tag{6.37}$$

Ця дисперсія зумовлена впливом фактора ***B*** і фактора випадковості:

$$S_i^2 \approx \sigma_B^2 + \sigma^2 \ .$$

Рівність набуде більшої точності, якщо замість S_i^2 використати середньозважену дисперсію за всіма стовпцями:

$$\sigma_B^2 + \sigma^2 \approx \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} S_i^2 = \frac{1}{k(m-1)} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2 \cdot \tag{6.38}$$

Віднявши (6.37) із (6.36), отримаємо:

$$\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{k} \approx \frac{1}{k(m-1)} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2 - \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} \left(\bar{y}_i' - \bar{\bar{y}}\right)^2 \cdot \tag{6.39}$$

Звідки:

$$\sigma^2 \cong \frac{1}{(k-1)(m-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)^2 - k\sum_{j=1}^{m}\left(\bar{y}'_i-\bar{\bar{y}}\right)^2\right]. \quad (6.40)$$

Позначимо отриману оцінку (6.40) для дисперсії σ^2 через $S_в^2$. Число ступенів вільності $S_в^2$ рівне $(k-1)(m-1)$. Введемо також такі позначення:

$$S_A^2 = \frac{m}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}\right)^2 \approx m\sigma_A^2 + S_в^2 . \quad (6.41)$$

$$S_B^2 = \frac{k}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\bar{y}'_j-\bar{\bar{y}}\right)^2 \approx k\sigma_B^2 + S_в^2 . \quad (6.42)$$

Величини S_A^2 та S_B^2 можна вважати вибірковими дисперсіями з $(k-1)$ та $(m-1)$ ступенями свободи відповідно. Перевіряють нульові гіпотези про незначимість впливу факторів ***A*** та ***B*** за критерієм Фішера. Якщо дисперсійне відношення:

$$F = \frac{S_A^2}{S_в^2} < F_{1-p}(f_1, f_2), \quad f_1 = k-1, \; f_2 = (k-1)(m-1). \quad (6.43)$$

приймається гіпотеза $H_0 : \alpha_i = 0$. Якщо:

$$F = \frac{S_A^2}{S_в^2} > F_{1-p}(f_1, f_2). \quad (6.44)$$

нульова гіпотеза відкидається і вплив фактора А вважається значимим. Аналогічно, якщо:

$$F = \frac{S_B^2}{S_в^2} < F_{1-p}(f_1, f_2), \quad f_1 = m-1, \; f_2 = (k-1)(m-1). \quad (6.45)$$

приймається гіпотеза $H_0 : \beta_i = 0$. За умови нерівності:

$$F = \frac{S_B^2}{S_в^2} > F_{1-p}(f_1, f_2). \quad (6.46)$$

вплив фактора В вважається значимим. Для перевірки нульових гіпотез застосовується односторонній критерій Фішера, оскільки альтернативою рівності $\sigma_A^2 = \sigma_в^2$ слугує нерівність $\sigma_A^2 > \sigma_в^2$.

Проведення дисперсійного аналізу в умовах лінійної моделі (6.31) зручно використовувати наступну послідовність. Необхідно знайти:

– результати за стовпцями:

$$A_i = \sum_{j=1}^{m} y_{ij}\ ,\ i = 1,2,...,k\ . \tag{6.47}$$

– результати за рядками:

$$B_j = \sum_{i=1}^{k} y_{ij}\ ,\ j = 1,2,...,m\ . \tag{6.48}$$

– суму квадратів усіх дослідів:

$$SS_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}^2\ . \tag{6.49}$$

– суму квадратів результатів за стовпцями, поділену на число дослідів у стовпці:

$$SS_2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} A_i^2\ . \tag{6.50}$$

– суму квадратів результатів за рядками, поділену на число дослідів у рядку:

$$SS_3 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{m} B_j^2\ . \tag{6.51}$$

– квадрат загального результату, поділений на число всіх дослідів (корегуючий член):

$$SS_4 = \frac{1}{mk}\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right)^2 = \frac{1}{mk}\left(\sum_{j=1}^{m} B_j\right)^2 . \tag{6.52}$$

– суму квадратів для стовпців:

$$SS_A = SS_2 - SS_4\ . \tag{6.53}$$

– суму квадратів для рядків:

$$SS_B = SS_3 - SS_4\ . \tag{6.54}$$

– загальну суму квадратів, рівну різниці між сумою квадратів всіх дослідів та корегуючим членом:

$$SS_{заг} = SS_1 - SS_4\ . \tag{6.55}$$

– остаточну суму квадратів:

$$SS_{ост} = SS_{заг} - SS_A - SS_B = SS_1 - SS_2 - SS_3 + SS_4 . \quad (6.56)$$

– дисперсію S_A^2:

$$S_A^2 = SS_A /(k-1). \quad (6.57)$$

– дисперсію S_B^2:

$$S_B^2 = SS_B /(m-1). \quad (6.58)$$

– дисперсію $S_в^2$:

$$S_в^2 = \frac{SS_{зал}}{(k-1)(m-1)}. \quad (6.59)$$

Результати розрахунків потрібно подати у вигляді таблиці 6.9.

Таблиця 6.9

Двофакторний дисперсійний аналіз (без повторення дослідів)

Джерело дисперсії	Число ступенів свободи	Сума квадратів	Середній квадрат	Математичне очікування середнього квадрату
A	$k-1$	$SS_A = SS_2 - SS_4$	$S_A^2 = \frac{SS_A}{(k-1)}$	$m\sigma_A^2 + \sigma_в^2$
B	$m-1$	$SS_B = SS_3 - SS_4$	$S_B^2 = \frac{SS_B}{(m-1)}$	$k\sigma_B^2 + \sigma_в^2$
Залишок	$(k-1)(m-1)$	$SS_{ост} = SS_1 - SS_2 - SS_3 + SS_4$	$S_в^2 = \frac{SS_{зал}}{(k-1)(m-1)}$	$\sigma_в^2$
Загальна сума	$km-1$	$SS_{заг} = SS_1 - SS_4$		

Встановивши за допомогою дисперсійного аналізу значимість впливу даного фактора, надалі знаходять за допомогою критерію Стьюдента чи рангового критерію Дункана, які саме середні значення ***y*** різні.

Лінійна модель (6.31) справедлива, якщо між факторами ***A*** та ***B*** немає взаємозв'язку. В іншому разі цій взаємодії як фактора притаманна своя дисперсія σ_{AB}^2. Взаємозв'язок ***AB***, σ_{AB}^2 показує, наскільки вплив фактора ***A*** залежить від рівня фактора ***B***, і навпаки, наскільки вплив фактора ***B*** залежить від рівня ***A***. У наведеному методі, за наявності, взаємозв'язок між факторами σ_{AB}^2, як складова частина, входить в дисперсію $S_в^2$. Виділити σ_{AB}^2 можливо лише за наявності паралельних досліджень.

Нехай за кожного поєднання рівнів факторів ***A*** та ***B*** здійснюється ***n*** паралельних дослідів. Так, в таблиці 6.7 в комірці, утвореній перетином *i*-го стовпця та *j*-го рядка, міститься ціла серія дослідів $y_{ij1}, y_{ij2}, ..., y_{ijn}$. Збережемо позначення $\bar{y}_{ij}$ за середнім результатом у комірці. Вибіркова дисперсія результатів у кожній комірці

$$S_{ij}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{u=1}^{n}\left(y_{iju} - \bar{y}_{ij}\right)^2 . \qquad (6.60)$$

має n – 1 ступенів свободи. Якщо вибіркові дисперсії за усіма комірками однорідні, їх можна усереднити та використовувати отриману середньозважену дисперсію

$$S_в^2 = \frac{1}{mk}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} S_{ij}^2 . \qquad (6.61)$$

в якості оцінки для дисперсії відтворюваності $\boldsymbol{\sigma^2}$. Число ступенів вільності $S_в^2$ рівне $mk(n-1)$. Формула для розрахунку дисперсії відтворюваності:

$$S_в^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{u=1}^{n} y_{iju}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}^2}{n}}{mk(n-1)}, \qquad (6.62)$$

де y_{ij} – сума дослідів в *ij*-й комірці.

Розглянемо методику проведення дисперсійного аналізу для нелінійної моделі. Згідно з таблицею 6.7 знаходять:

– суми дослідів у кожній комірці:

$$y_{ij} = \sum_{u=1}^{n} y_{iju}\,,\;\; j = 1,2,...,m\,,\; i = 1,2,...,k\,. \qquad (6.63)$$

– квадрат суми дослідів у кожній комірці:

$$y_{ij}^2 = \left(\sum_{u=1}^{n} y_{iju} \right)^2 . \qquad (6.64)$$

– результати за стовпцями:

$$A_i = \sum_{j=1}^{m} \sum_{u=1}^{n} y_{iju}\,. \qquad (6.65)$$

– результати за рядками:

$$B_j = \sum_{i=1}^{k} \sum_{u=1}^{n} y_{iju}\,. \qquad (6.66)$$

– суму всіх дослідів (загальний результат):

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \sum_{u=1}^{n} y_{iju} = \sum_{i=1}^{k} A_i = \sum_{j=1}^{m} B_j\,. \qquad (6.67)$$

– суму квадратів усіх дослідів:

$$SS_1 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \sum_{u=1}^{n} y_{iju}\,. \qquad (6.68)$$

– суму квадратів результатів за стовпцями, поділену на число дослідів у стовпці:

$$SS_2 = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{k} A_i^2\,. \qquad (6.69)$$

– суму квадратів результатів за рядками, поділену на число дослідів в рядку:

$$SS_3 = \frac{1}{kn} \sum_{j=1}^{m} B_j^2\,. \qquad (6.70)$$

– квадрат загального результату, поділений на число всіх дослідів (коректуючий член):

$$SS_4 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{u=1}^{n} y_{iju}\right)^2}{N} = \frac{1}{mkn}\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right)^2 = \frac{1}{mkn}\left(\sum_{j=1}^{m} B_j\right)^2. \quad (6.71)$$

– суму квадратів для стовпця:

$$SS_A = SS_2 - SS_4. \quad (6.72)$$

– суму квадратів для рядка:

$$SS_B = SS_3 - SS_4. \quad (6.73)$$

– суму квадратів для дисперсії відтворюваності:

$$SS_в = SS_1 - \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}^2}{n}. \quad (6.74)$$

– загальну суму квадратів, рівну різниці суми квадратів усіх дослідів і коректуючим членом:

$$SS_{заг} = SS_1 - SS_4. \quad (6.75)$$

– залишкову суму квадратів відхилень для ефекту взаємозв'язку ***AB***:

$$SS_{AB} = SS_{заг} - SS_A - SS_B - SS_в. \quad (6.76)$$

– дисперсію S_A^2:

$$S_A^2 = SS_A/(k-1). \quad (6.77)$$

– дисперсію S_B^2:

$$S_B^2 = SS_B/(m-1). \quad (6.78)$$

– дисперсію S_{AB}^2:

$$S_{AB}^2 = \frac{SS_{AB}}{(k-1)(m-1)}. \quad (6.79)$$

– дисперсію відтворюваності:

$$S_{в}^{2} = \frac{SS_{в}}{mk(n-1)}. \qquad (6.80)$$

Перевірка гіпотези про значимість взаємодії факторів ***A*** та ***B*** проводять за допомогою *F*-критерію однаково як для моделей з фіксованими, так і випадковими рівнями. Проте перевірка гіпотез про значимість факторів ***A*** та ***B*** проводять неоднаково для різних моделей. У таблиці 6.10 приведений двофакторний дисперсійний аналіз з повторними дослідами для моделі із випадковими рівнями.

Аналіз таблиці 6.10 показує, що для оцінки значимості фактора ***A*** потрібно скласти дисперсійне відношення:

$$F = \frac{S_{A}^{2}}{S_{AB}^{2}}. \qquad (6.81)$$

Таблиця 6.10

Двофакторний дисперсійний аналіз для моделі із випадковими рівнями (з повторними дослідами)

Джерело дисперсії	Число ступенів свободи	Сума квадратів	Середній квадрат	Математичне очікування середнього квадрату
A	$k-1$	$SS_{A} = SS_{2} - SS_{4}$	$S_{A}^{2} = \frac{SS_{A}}{(k-1)}$	$nm\sigma_{A}^{2} + n\sigma_{AB}^{2} + \sigma_{в}^{2}$
B	$m-1$	$SS_{B} = SS_{3} - SS_{4}$	$S_{B}^{2} = \frac{SS_{B}}{(m-1)}$	$nk\sigma_{B}^{2} + n\sigma_{AB}^{2} + \sigma_{в}^{2}$
AB	$(k-1)(m-1)$	$SS_{AB} = SS_{1} - SS_{2} - SS_{3} + SS_{4}$	$S_{AB}^{2} = \frac{SS_{AB}}{(k-1)(m-1)}$	$n\sigma_{AB}^{2} + \sigma_{в}^{2}$
Залишок	$mk(n-1)$	$SS_{ост} = SS_{1} - \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}^{2}}{n}$	$S_{в}^{2} = \frac{SS_{зал}}{mk(n-1)}$	$\sigma_{в}^{2}$
Загальна сума	$mkn-1$	$SS_{заг} = SS_{1} - SS_{4}$		

Вплив фактора ***A*** вважається значимим, якщо:

$$\frac{S_A^2}{S_{AB}^2} > F_{1-p}\left(f_1, f_2\right). \quad (6.82)$$

де p – рівень значимості;

$f_1 = k - 1;\ f_2 = (k-1)(m-1)$ – ступені свободи.

Аналогічно, вплив фактора B вважається значимим, якщо:

$$\frac{S_B^2}{S_{AB}^2} > F_{1-p}\left(f_1, f_2\right). \quad (6.83)$$

де $f_1 = k - 1;\ f_2 = (k-1)(m-1)$ – ступені свободи.

Якщо нерівності (6.82) та (6.83) не виконуються, вплив факторів ***A*** та ***B*** потрібно вважати незначимим.

Для математичної моделі з фіксованими рівнями члени, що відповідають взаємодії, зникають із сум квадратів відхилень SS_A та SS_B.

Внаслідок цього оцінка значимості фактора ***A*** проводиться на основі складеного дисперсійного відношення:

$$F = \frac{S_A^2}{S_{AB}^2}. \quad (6.84)$$

в знаменнику якого стоїть оцінка дисперсії відтворюваності.

Отримане дисперсійне відношення порівнюється із табличним $F_{1-p}\left(f_1, f_2\right)$ для чисел ступенів вільності $f_1 = k - 1;\ f_2 = mk(n-1)$.

Аналогічно для оцінки фактора ***B*** розглянемо відношення:

$$F = \frac{S_B^2}{S_{AB}^2}. \quad (6.85)$$

яке порівнюють із табличним $F_{1-p}\left(f_1, f_2\right)$ для чисел ступенів вільності $f_1 = k - 1;\ f_2 = mk(n-1)$.

Якщо дисперсійні відношення (6.84) та (6.85) більші табличних

$$\frac{S_A^2}{S_в^2} > F_{1-p}\left(f_1, f_2\right). \tag{6.86}$$

та

$$\frac{S_B^2}{S_в^2} > F_{1-p}\left(f_1, f_2\right). \tag{6.87}$$

вплив факторів ***A*** та ***B*** потрібно вважати значимим. Якщо нерівності (6.86) та (6.87) не виконуються, вплив факторів ***A*** та ***B*** незначимий.

Для перевірки значимості ефекту взаємодії складають дисперсійне відношення:

$$F = \frac{S_{AB}^2}{S_в^2}. \tag{6.88}$$

та порівнюють його з табличним $F_{1-p}\left(f_1, f_2\right)$ за рівня значимості ***p*** та числа ступенів вільності $f_1 = (k-1)(m-1)$; $f_2 = mk(n-1)$.

Якщо отримане дисперсійне відношення більше табличного:

$$\frac{S_{AB}^2}{S_в^2} > F_{1-p}\left(f_1, f_2\right),$$

вплив ефекту взаємодії факторів вважають значимим.

Якщо, $\dfrac{S_{AB}^2}{S_в^2} < F_{1-p}\left(f_1, f_2\right)$, вплив ефекту взаємодії не значимий.

Приклад. Потрібно дослідити вплив на критерій відгуку ***y*** двох факторів: ***A*** – на рівнях a_1, a_2, a_3, a_4 та ***B*** – на рівнях b_1, b_2, b_3, b_4. Результати наведено в таблиці 6.11.

За кожного поєднання фактора ***A*** з фактором ***B*** зроблено два паралельних досліди. Необхідно оцінити значимість впливу факторів на критерій відгуку ***y***.

Таблиця 6.11

Результати експерименту (для прикладу)

B	A			
	a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	13,2 13,9	4,7 5,8	53,4 48,3	13,6 13,2
b_2	18,9 21,0	19,8 17,9	14,0 13,2	9,5 8,6
b_3	7,3 8,5	38,2 37,7	5,1 5,9	54,4 55,2
b_4	20,0 20,8	60,1 60,9	19,6 18,5	58,2 59,7

Математична модель експерименту – модель з фіксованими рівнями. Рівні факторів ***A*** та ***B*** вибрані не випадково, оскільки необхідно встановити вплив на критерій відгуку лише даних чотирьох типів факторів. Розрахунок проводиться відповідно до розглянутої вище методики за формулами (6.63) – (6.80):

– визначимо суми дослідів у кожній комірці (табл. 6.12).

Таблиця 6.12

Суми дослідів у кожній комірці

B	A				Результати
	a_1	a_2	a_3	a_4	
b_1	27,1	10,5	101,7	26,8	166,1
b_2	39,1	37,7	27,2	18,1	122,1
b_3	15,8	75,9	11,0	109,6	212,3
b_4	40,8	121	38,1	117,9	317,8
Результати	122,8	245,1	178,0	272,4	818,3

– піднесемо отримані суми до квадрату. Результати y_{ij}^2 подамо у вигляді таблиці (табл. 6.13).

– порахуємо результати за стовпцями:

$$A_1 = 27{,}1 + 39{,}1 + 15{,}8 + 40{,}8 = 122{,}8.$$

– порахуємо результати за рядками:

$$B_1 = 39{,}1 + 37{,}7 + 27{,}2 + 18{,}1 = 122{,}1.$$

– визначимо загальний результат – суму всіх дослідів:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{u=1}^{n} y_{iju} = \sum_{i=1}^{k} A_i = \sum_{j=1}^{m} B_j = 818{,}3.$$

– визначимо суму квадратів всіх дослідів:

$$SS_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{u=1}^{n} y_{iju} = 32916{,}43.$$

Таблиця 6.13

Результати y_{ij}^2

B	*A*			
	a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	734,41	110,25	10342,89	718,24
b_2	1528,81	1421,29	739,84	327,61
b_3	249,64	5760,81	121,0	12012,16
b_4	1064,64	14641	1451,61	13900,41

– визначимо суму квадратів результатів за стовпцями, поділену на число дослідів у стовпці:

$$SS_2 = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{k} A_i^2 = \frac{1}{4\cdot 2}\left(122{,}8^2 + 245{,}1^2 + 178^2 + 272{,}4^2\right) = 22262{,}95.$$

– визначимо суму квадратів результатів за рядками, поділену на число дослідів у рядку:

$$SS_3 = \frac{1}{kn}\sum_{j=1}^{m} B_j^2 = \frac{1}{4\cdot 2}\left(166{,}1^2 + 122{,}1^2 + 212{,}3^2 + 317{,}8^2\right) = 23570{,}72.$$

– визначимо квадрат загального результату, поділений на число всіх дослідів (коректуючий член):

$$SS_4 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{u=1}^{n} y_{iju}\right)^2}{N} = \frac{818{,}3^2}{32} = 20925{,}47.$$

– визначимо суму квадратів відхилень для факторів ***A*** та ***B***:

$$SS_A = SS_2 - SS_4 = 22262{,}95 - 20925{,}47 = 1704{,}48.$$

$$SS_B = SS_3 - SS_4 = 23570{,}72 - 20925{,}47 = 2645{,}25.$$

– визначимо суму квадратів для дисперсії відтворюваності:

$$SS_в = SS_1 - \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}^2}{n} = 32916{,}43 - \frac{65724{,}62}{2} = 5413.$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} y_{ij}^2 .$$

– визначимо загальну суму квадратів:

$$SS_{заг} = SS_1 - SS_4 = 32916{,}43 - 20925{,}47 = 11990{,}96 .$$

– визначимо залишкову суму квадратів відхилень для ефекту взаємозв'язку ***AB***:

$$SS_{AB} = SS_{заг} - SS_A - SS_B - SS_в = $$
$$= 11990{,}96 - 1704{,}48 - 2645{,}25 - 54{,}13 = 7587{,}11 .$$

– визначимо дисперсію S_A^2:

$$S_A^2 = SS_A / (k-1) = 1704{,}48 / 4 - 1 = 568{,}16 .$$

– визначимо дисперсію S_B^2:

$$S_B^2 = SS_B / (m-1) = 2645{,}25 / 4 - 1 = 881{,}75 .$$

– визначимо дисперсію S_{AB}^2:

$$S_{AB}^2 = \frac{SS_{AB}}{(k-1)(m-1)} = \frac{7587{,}11}{(4-1)(4-1)} = 843{,}01.$$

– визначимо дисперсію відтворюваності:

$$S_в^2 = \frac{SS_в}{mk(n-1)} = \frac{54{,}13}{4 \cdot 4(2-1)} = 3{,}381.$$

Результати розрахунку зведені в таблицю двофакторного дисперсійного аналізу (табл. 6.14).

Значимість лінійних ефектів ***A*** і ***B*** та ефекту взаємодії за критерієм Фішера. Дисперсійне відношення для ефекту ***A***:

$$F = \frac{S_A^2}{S_в^2} = \frac{568,16}{3,38} = 168,09 \cdot$$

Таблиця 6.14

Результати двофакторного дисперсійного аналізу

Джерело дисперсії	Число ступенів свободи	Сума квадратів	Середній квадрат
A	3	1704,48	568,16
B	3	2645,25	881,75
AB	9	7587,11	843,01
Помилка	16	54,13	3,38
Загальна сума	31	11990,97	

Для ефекту ***B***:

$$F = \frac{S_B^2}{S_в^2} = \frac{881,75}{3,38} = 260,87\,.$$

Табличні значення критерію Фішера для рівня значимості p = 0,05 та числа ступенів вільності f_1 = 3 та f_2 = 16 $F_{0,95}(3,16)$ = 3,2.

Оскільки розраховані дисперсійні відношення більші табличного, фактора ***A*** та ***B*** значимі, тобто критерій відгуку істотно залежить від факторів. Для перевірки значимості ефекту взаємодії складене відношення:

$$F = \frac{S_{AB}^2}{S_в^2} = \frac{843,01}{3,38} = 249,41 \cdot$$

Табличне значення критерію Фішера для рівня значимості p = 0,05 та числа ступенів вільності f_1 = 9 та f_2 = 16 $F_{0,95}(9,16)$ = 2,65,

$$\frac{S_{AB}^2}{S_в^2} > F_{табл}\,,$$

відповідно, ефект взаємодії потрібно вважати значимим.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які задачі розв'язує дисперсійний аналіз?

2. У чому відмінності між однофакторним та двофакторним дисперсійним аналізом?

3. Дайте характеристику міжгрупової та внутрішньо групової дисперсії.

4. Чим зумовлена варіація групових середніх навколо загального середнього?

5. Яка параметрична гіпотеза приймається за нульову під час дисперсійного аналізу?

6. Який порядок перевірки нульової гіпотези?

7. Що називають дисперсійним відношенням?

8. Який імовірнісний розподіл використовується для перевірки гіпотези в дисперсійному аналізі? Перерахуйте його числові характеристики.

9. Наведіть приклад однофакторного дисперсійного аналізу.

7 КОРЕЛЯЦІЙНИЙ ТА РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗИ

7.1 Поняття статистичного і кореляційного зв'язків

Виявлення та вимірювання зв’язку між фізичними величинами є важливим завданням методології наукового дослідження. Загалом розрізняють два типи зв’язків: функціональний і статистичний.

Подамо визначення цим двом типам зв’язків:

– функціональним – називається зв'язок, якщо зі зміною значення однієї із змінних друга змінюється за визначеним правилом, тобто значенню однієї змінної обов’язково відповідає одне чи декілька точно заданих значень другої змінної.

– статистичним – називається зв'язок, якщо із зміною значення однієї із змінних друга може в деяких межах приймати будь-яке значення з деякою імовірністю, але її середнє значення чи інші статистичні характеристики змінюються за визначеним законом.

Частковим випадком статистичного зв’язку, за якого різним значенням одної змінної відповідають різні середні значення другої, називається **кореляційний зв’язок**. Із зміною значення фактора x закономірно змінюється середнє значення фактора $\overline{y}$, в той час у кожному окремому випадку значення фактора *y* (з різною імовірністю) може приймати множину значень.

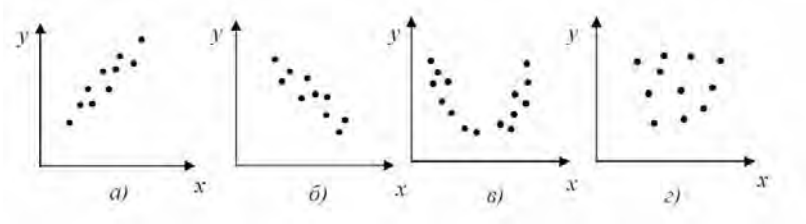


Рис. 7.1. Кореляційні залежності

Розглянемо причини виникнення кореляційного зв’язку між факторами:

– причинної залежності критерію відгуку чи його варіації від варіації фактора;

– зв’язку між двома наслідками однієї причини;

– взаємозв’язку факторів, кожен з яких і причина і наслідок.

За характером кореляційні зв’язки можуть бути:

– прямолінійні;

– криволінійні.

Прямолінійним називається кореляційний зв'язок, за якого рівній зміні однієї змінної відповідає рівна зміна другою змінної (рис. 7.1, а, б). У разі криволінійної кореляції рівним змінам однієї змінної можуть відповідати будь-які зміни другої змінної (рис. 7.1, в). На рисунку 7.1, г наведено випадок, коли зв'язок між змінними відсутній.

7.2 Задачі кореляційно-регресійного аналізу

Обов'язковою умовою дослідження кореляційного зв’язку, як і будь-якого іншого статистичного дослідження, є наявність доволі великої вибірки значень.

Від мети аналізу, потрібної точності та надійності параметрів зв’язку, від числа факторів, кореляція з якими досліджується, залежить потрібна кількість дослідів (спостережень). Вважається, що для забезпечення потрібної якості аналізу число дослідів має бути не менше ніж в 5-6, а краще і в 10 разів більше числа факторів.

Іноді як умову кореляційного аналізу висувають потребу підпорядкування розподілу сукупності за результативною та факторною ознаками нормальному закону розподілу імовірностей. Ця умова пов’язана з застосуванням методу найменших квадратів під час розрахунку параметрів кореляції. Лише за нормального розподілу метод найменших квадратів дає оцінку параметрів, що відповідає принципам максимальної правдоподібності.

Кореляційно-регресійний аналіз враховує міжфакторний зв'язок, а отже, дає змогу отримати повнішу картину ролі кожного фактора. Дає змогу оцінити, як безпосередній вплив фактора на критерій відгуку, так і вплив фактора на інші фактори, вплив усіх факторів на критерій відгуку.

Дослідження кореляційного зв’язку дає змогу:

– оцінити тісноту зв’язку двох (чи більше) факторів між собою;

– визначити параметри рівня, що виражає зв'язок середніх значень залежної змінної із значеннями незалежної змінної (залежність середніх величин критерію відгуку від значень одного чи декількох факторів).

Головним методом знаходження параметрів рівняння зв’язку є **метод найменших квадратів (МНК)**. Суть його полягає у мінімалізації суми квадратів відхилень виміряних значень залежної змінної y від її значень, розрахованих за рівнянням зв’язку з факторами (рівняння регресії) x. Кореляційно-регресійний аналіз дає змогу розділити вплив комплексу факторів, аналізувати різні сторони взаємозв’язків.

7.3 Парна лінійна кореляція

Парна лінійна кореляція – найпростіша система кореляційного зв’язку між двома елементами. Її практичне значення полягає в існуванні систем, в яких серед усіх факторів, що впливають на критерій відгуку, виділяється один найважливіший фактор, який в основному визначає варіацію критерію відгуку. Вимірювання парних кореляцій є обов'язковим етапом у вивченні складних багатофакторних зв’язків. Розгляд лінійних зв’язків пояснюється обмеженою варіацією змінних і тим, що, зазвичай, нелінійні форми зв’язків для виконання розрахунків перетворюються в лінійну форму.

За напрямом розрізняють прямі та зворотні зв’язки. Прямі зв’язки – із збільшенням фактора ***x*** збільшується критерій відгуку ***y***, при зворотних – із збільшенням фактора ***x*** критерій відгуку ***y*** зменшується. Вивчення парної кореляції здійснюється за одночасного вимірювання двох фізичних величин.

Рівняння парного лінійного кореляційного зв’язку називається рівнянням парної регресії, виду:

$$\tilde{y} = a + bx, \tag{7.1}$$

де $\tilde{y}$ – середнє значення критерію відгуку y за визначених значень фактора x;

a – вільний член рівняння;

b – коефіцієнт регресії, що вимірює середнє відношення відхилень критерію відгуку від його середньої величини до відхилення фактора від його середньої величини на одну одиницю його вимірювання (варіація y, що припадає на одиницю варіації x).

Коефіцієнт кореляції r_{xy} – показник щільності парного лінійного кореляційного зв’язку. Цей показник є стандартизованим коефіцієнтом регресії, тобто коефіцієнтом вираженим не у абсолютних одиницях вимірювання факторів, а відсотках середньоквадратичного відхилення критерію відгуку:

$$r_{xy} = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \tag{7.2}$$

Інтерпретація коефіцієнта кореляції наступна: відхилення фактора від його середнього значення на величину середньо-квадратичного відхилення в середньому за сукупністю призводить до відхилення критерію відгуку від свого середнього значення на $\boldsymbol{r_{xy}}$ його середньоквадратичного відхилення. На відміну від коефіцієнта регресії ***b*,** коефіцієнт кореляції не залежить від прийнятих одиниць вимірювання факторів та порівняльний для будь-яких факторів.

7.4 Статистичне вивчення кореляційного зв'язку

Отримання моделі залежності критерію відгуку від факторів для її практичного використання є головною метою будь-якого статистичного дослідження. Розглянемо основні етапи розв'язання такої задачі.

7.4.1 Отримання первинної інформації, перевірка на однорідність та нормальність розподілу

Потрібно встановити критерій відгуку $\boldsymbol{y}$ та фактор $\boldsymbol{x}$, що впливає на його зміну.

Оцінюють однорідність сукупності проводять за допомогою коефіцієнта варіації за фактором.

$$V = \frac{S_x}{\bar{x}} \cdot 100\%, \tag{7.3}$$

де $\bar{x}$ – вибіркове середнє фактора;

S_x – оцінка середньоквадратичного відхилення фактора.

Таблиця 7.1

Перевірка фактора на нормальність

Інтервали значень фактора	Число одиниць, що входять в інтервал	Питома вага одиниць, що входять в інтервал, %	Питома вага одиниць, що входять в інтервал, за нормального закону розподілу, %
1	2	3	4
$(\bar{x}-S_x)-(\bar{x}+S_x)$			68,3
$(\bar{x}-2S_x)-(\bar{x}+2S_x)$			95,4
$(\bar{x}-3S_x)-(\bar{x}+3S_x)$			99,7

Однорідність сукупності (вибірки) забезпечується, якщо коефіцієнт варіації ***V*** не перевищує 33%.

Перевірка нормальності розподілу досліджуваних факторів проводиться за методикою, наведеною у розділі 4.4.1. Спрощений варіант перевірки проводиться з використанням таблиці 7.1.

Аналіз даних, наведених у графах 3 та 4 (табл. 7.1), дає змогу зробити висновок про наявність чи відсутність нормальності розподілу. В більшості випадків присутні відхилення закону розподілу факторів від нормального, але це не є підставою для відмови від використання кореляційного аналізу.

7.4.2 Виключення із масиву первинної інформації промахів

Для виявлення та виключення промахів використовується методика, наведена у розділі 5.4.2. Для спрощення розрахунків використаємо правило 3σ „трьох сігм”: визначаються значення фактора *x*, який не потрапив в останній рядок таблиці 7.1. Ці значення є промахами та виключаються із вибірки. Для наступного аналізу формується новий масив.

7.4.3 Встановлення факту наявності та напрямку кореляційної залежності між критерієм відгуку та факторами

Наявність кореляційного зв'язку виявляється з використанням методів:

– паралельного порівняння рядів критерію відгуку та факторів;

– графічного зображення фактичних даних за допомогою поля кореляції;

– побудови кореляційної таблиці.

Основним методом виявлення кореляційного зв'язку є метод аналітичного групування та визначення групових середніх. Суть методу полягає у розбитті всіх одиниць сукупності (вибірки) на групи за величиною фактора і для кожної групи визначається середня величина критерію відгуку. На основі даних аналітичного групування будується графік емпіричної лінії зв'язку (лінія регресії), вид якої дозволяє робити висновки про можливість наявності зв'язку, та дозволяє судити про форму кореляційного зв'язку. Якщо емпірична лінія зв'язку за своїм видом наближається до прямої лінії, то можна зробити висновок про наявність прямолінійного кореляційного зв'язку. Якщо емпірична лінія наближається до будь-якої кривої – це пов'язано з наявністю криволінійного зв'язку.

7.4.4 Визначення ступеня щільності зв'язку

Ступінь щільності парної лінійної залежності визначають за допомогою лінійного коефіцієнта кореляції $\boldsymbol{r}$.

Ступінь щільності зв'язку незалежно від форми залежності (лінійної чи криволінійної) оцінюють за допомогою емпіричного кореляційного відношення $\boldsymbol{\eta}$.

Розрахунок лінійного коефіцієнта кореляції за не згрупованими даними:

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}\right) \cdot \left(\sum y^2 - \frac{\sum (y)^2}{n}\right)}}. \qquad (7.4)$$

Лінійний коефіцієнт кореляції приймає значення в межах від -1 до +1. Знак при коефіцієнті вказує напрям зв'язку: знак „-" – зворотна залежність, знак „+" – пряма залежність. Чим ближче коефіцієнт за абсолютною величиною до 1, тим щільніший зв'язок. Якщо коефіцієнт кореляції рівний нулю, це вказує на відсутність зв'язку, якщо рівний одиниці – існує функціональний зв'язок.

Оцінку суттєвості лінійного коефіцієнта кореляції проводять використовуючи *t*-критерій Стьюдента:

$$t = \frac{|r|}{S_r}, \qquad (7.5)$$

де S_r – середня квадратична помилка коефіцієнта кореляції:

– коли кількість дослідів (об'єм вибірки) перевищує 50:

$$S_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n-1}}. \qquad (7.6)$$

– за недостатньо великої кількості дослідів:

$$S_r = \frac{\sqrt{1 - r^2}}{\sqrt{n-2}}. \qquad (7.7)$$

Критичне значення $\boldsymbol{t_T}$ визначається за таблицею розподілу Стьюдента для заданого рівня значимості та числа ступенів вільності $f = n - 1$ або $f = n - 2$ (залежно від кількості дослідів). Відповідно, якщо $t > t_T$ – коефіцієнт кореляції істотний.

Кореляційне відношення визначається за формулою:

$$\eta = \sqrt{\frac{S_{\delta y}^2}{S_y^2}}, \tag{7.8}$$

де $S_{\delta y}^2$ – міжгрупова дисперсія критерію відгуку, спричинена впливом фактора;

S_y^2 – загальна дисперсія критерію відгуку.

Формули для розрахунку міжгрупової та загальної дисперсій критерію відгуку:

$$S_{\delta y}^2 = \frac{\sum \left(\bar{y}_j - \bar{y}_0\right)^2 f_j}{\sum f_j}, \tag{7.9}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum \left(y_i - \bar{y}_0\right)^2}{n}, \tag{7.10}$$

де $\bar{y}_j$ – середні значення критерію відгуку у відповідних групах, виділених за величиною фактора;

$\bar{y}_0$ – загальне середнє значення для всієї сукупності (вибірки) значень;

f_i – число одиниць у відповідних групах.

Розрахунок кореляційного відношення потребує великого обсягу інформації, яку потрібно подати у формі групової таблиці чи кореляційної таблиці. Тобто обов’язковою умовою є групування даних за фактором.

7.4.5 Побудова моделі зв’язку

Вибір типу моделі здійснюється на підставі поєднання теоретичного аналізу та дослідження емпіричних даних шляхом побудови емпіричної лінії регресії. Найбільшого поширення набули такі типи функцій:

– лінійна: $\tilde{y}_x = a + bx$;

– параболічна: $\tilde{y}_x = a + bx + cx^2$;

– гіперболічна: $\tilde{y}_x = a + b\frac{1}{x}$;

Для визначення можливості використання лінійної функції потрібно розрахувати модуль різниці $\left|\eta^2 - r^2\right|$. Якщо різниця менша 0,1 – використовується лінійна функція.

Параметри *a* та *b* рівняння прямолінійного кореляційного зв'язку визначаються з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \sum y = an + b\sum x; \\ \sum yx = a\sum x + b\sum x^2. \end{cases} \tag{7.11}$$

Параметри *a* та *b* визначаються:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}. \tag{7.12}$$

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}. \tag{7.13}$$

Для оцінки достовірності рівняння кореляційної залежності доцільно використати відсоткове відношення середньоквадратичної помилки рівняння S_e до середнього рівня критерію відгуку $\bar{y}$:

$$\frac{S_e}{\bar{y}} \cdot 100\%. \tag{7.14}$$

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum\left(y - \bar{y}\right)^2}{n - g}}, \tag{7.15}$$

де *y* – фактичне значення критерію відгуку;

$\bar{y}$ – значення критерію відгуку, розраховане за рівнянням регресії;

g – число параметрів рівняння регресії.

Відповідно, якщо відношення (7.14) не перевищує 10-15% – рівняння регресії доволі добре описує досліджуваний взаємозв'язок.

Потрібно визначити довірчі межі для критерію відгуку, в межах яких, із заданою довічною імовірністю, буде знаходитись теоретичне значення y.

Довірчі межі критерію відгуку y за значення фактора x_0 визначаються:

$$\begin{gathered}\tilde{y}_{x_0} - t_\alpha \frac{S_e}{\sqrt{n}}\sqrt{1+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_x^2}} \le y \le \tilde{y}_{x_0} + \\ + t_\alpha \frac{S_e}{\sqrt{n}}\sqrt{1+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_x^2}}\end{gathered}, \qquad (7.16)$$

де t_α – визначається відповідно до рівня значимості за розподілом Стьюдента для числа ступенів вільності $f = n-1$.

Приклад. У таблиці 7.2 приведені дані дослідження залежності тривалості роботи від імовірності безвідмовної роботи. Необхідно на підставі поданих даних здійснити дослідження взаємозв'язку тривалості роботи від імовірності безвідмовної роботи. Критерій відгуку – тривалість роботи y, фактор – імовірність безвідмовної роботи x.

Первинну інформацію треба перевірити на однорідність за фактором за допомогою коефіцієнта варіації.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 73{,}5{,}\%,$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}} = 4{,}1{,}\%,$$

$$V = \frac{4{,}1}{73{,}5} = 5{,}4{,}\% \cdot$$

$V < 33\%$ – вибірка однорідна.

Таблиця 7.2

Дані для аналізу

№	Імовірність безвідмовної роботи, %	Тривалість роботи, тис. год.	№	Імовірність безвідмовної роботи, %	Тривалість роботи, тис. год.
1	77,8	18,5	11	69,6	17,5
2	69,0	18,2	12	79,2	21,8
3	76,5	20,4	13	70,8	16,5
4	80,7	21,8	14	72,3	16,8
5	72,0	16,8	15	79,2	21,0
6	77,1	20,8	16	73,5	16,8
7	64,0	14,2	17	71,1	16,5
8	72,0	17,0	18	69,9	17,0
9	75,9	18,4	19	70,5	17,5
10	73,2	19,5	20	75,0	20,9

Перевірка первинної інформації на нормальність розподілу проводиться за правилом „трьох сігм” (табл. 7.3). Аналіз результатів показує, що значення факторів підпорядковуються закону нормального розподілу.

Таблиця 7.3

Перевірка фактора на нормальність

Інтервали значень фактора	Число одиниць, що входять в інтервал	Питома вага одиниць, що входять в інтервал, %	Питома вага одиниць, що входять в інтервал, за нормального закону розподілу, %
69,4-77,6	14	70	68,3
65,3-81,7	19	95	95,4
61,2-85,8	20	100	99,7

Усі значення фактора потрапляють в інтервал „три сігма” $61{,}2 \le x_i \le 85{,}8$. Це означає, що у первинній інформації відсутні грубі помилки (промахи).

Аналітичне групування за факторною ознакою дасть змогу встановити наявність зв'язку $y(x)$. Групування виконується за рівних інтервалів і числа груп $m = 5$.

Величина інтервалу розраховується за формулою:

$$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m} = \frac{80{,}7 - 64{,}0}{5} = 3{,}4{,}\%$$

Результати розрахунків наведено в таблицях 7.4 та 7.5. Аналіз отриманих даних (табл. 7.5) показав, із збільшенням імовірності безвідмовної роботи збільшується тривалість роботи.

На рисунку 7.2 приведено графік зв'язку. Емпірична лінія зв'язку (рис. 7.2) наближається до прямої лінії, отже, присутня прямолінійна кореляція.

Таблиця 7.4

Додаткова таблиця для розрахунків

x, %	64-67,4	67,4-70,8	70,8-74,2	74,2-77,6	77,6-81
№ досліду	7	2; 11; 18; 19	5; 8; 10; 13; 14; 16; 17	3; 6; 9; 20	1; 4; 12; 15
y, тис. год	14,2	18,2; 17,5; 17,0; 17,5	16,8; 17,0; 19,5; 16,5; 16,8; 16,8; 16,5	20,4; 20,8; 18,4; 20,9	18,5; 21,8; 21,8; 21,0

Таблиця 7.5

Групова таблиця

x, %	x', %	f_i	$\sum_i y_{ij}$	$\bar{y}_j$, тис. год.
64,0-67,4	65,7	1	14,2	14,2
67,4-70,8	69,1	4	70,2	17,6
70,8-74,2	72,5	7	119,9	17,1
74,2-77,6	75,9	4	80,5	20,1
77,6-81,0	79,3	4	83,1	20,8

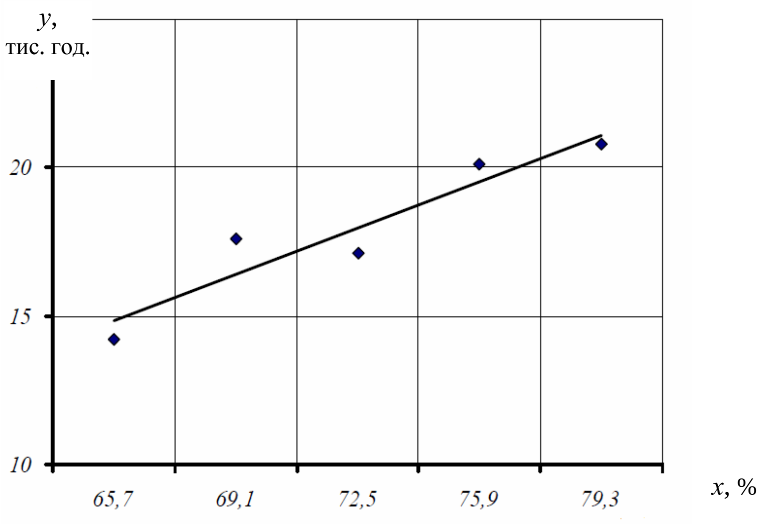


Рис. 7.2. Залежність тривалості роботи від імовірності безвідмовної роботи

Вимірювання ступеню щільності зв'язку здійснюють на основі лінійного коефіцієнта кореляції (7.4).

Для розрахунку лінійного коефіцієнта кореляції r скористаємось додатковою таблицею 7.6.

$$r = \frac{27173{,}1 - \dfrac{1469{,}3 \cdot 367{,}9}{20}}{\sqrt{\left(108274{,}1 - \dfrac{1469{,}3^2}{20}\right) \cdot \left(6852{,}8 - \dfrac{367{,}9^2}{20}\right)}} = 0{,}86.$$

Значення лінійного коефіцієнта кореляції показує наявність прямого та достатньо тісного зв'язку.

Розрахуємо середньоквадратичну помилку коефіцієнта кореляції:

$$S_r = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n-2}} = \frac{\sqrt{1-0{,}86^2}}{\sqrt{20-2}} 0{,}12,$$

$$t = \frac{|r|}{S_r} = \frac{0{,}86}{0{,}12} = 7{,}167.$$

Табличне значення t-критерію Стьюдента визначаємо з таблиці для α = 0,05 і $f = 18$. t_T = 1,734. Оскільки виконується умова $t > t_T$, коефіцієнт кореляції істотний.

Таблиця 7.6

Дані для розрахунку коефіцієнта кореляції та рівняння зв'язку

№	x, %	y, тис. год.	x^2	y^2	xy	$\tilde{y}$	$y-\tilde{y}$	$(y-\tilde{y})^2$
1	77,8	18,5	6052,8	342,3	1439,3	20,3	-1,8	3,24
2	69,0	18,2	4761	331,2	1255,8	16,4	1,8	3,24
3	76,5	20,4	5852,3	416,2	1560,6	19,7	0,7	0,49
4	80,7	21,8	6512,5	475,2	1759,3	21,6	0,2	0,04
5	72,0	16,8	5184	282,2	1209,6	17,7	-0,9	0,81
6	77,1	20,8	5944,4	432,6	1603,7	20	0,8	0,64
7	64,0	14,2	4096	201,6	908,8	14,2	0	0
8	72,0	17,0	5184	289	1224	17,7	-0,7	0,49
9	75,9	18,4	5760,8	338,6	1396,6	19,5	-1,1	1,21
10	73,2	19,5	5358,2	380,3	1427,4	18,3	1,2	1,44
11	69,6	17,5	4844,2	306,3	1218	16,7	0,8	0,64
12	79,2	21,8	6272,6	475,2	1726,6	20,9	0,9	0,81
13	70,8	16,5	5012,6	272,3	1168,2	17,2	-0,7	0,49
14	72,3	16,8	5227,3	282,2	1214,6	17,9	-1,1	1,21
15	79,2	21,0	6272,6	441	1663,2	20,9	0,1	0,01
16	73,5	16,8	5402,3	282,2	1234,8	18,4	-1,6	2,56
17	71,1	16,5	5055,2	272,3	1173,2	17,3	-0,8	0,64
18	69,9	17,0	4886	289	1188,3	16,8	0,2	0,04
19	70,5	17,5	4970,3	306,3	1233,8	17,1	0,4	0,16
20	75,0	20,9	5625	436,8	1567,5	19,1	1,8	3,24
$\sum$	1469,3	367,9	108274,1	6852,8	27173,1	-	-	21,4

Визначення моделі лінійного зв'язку. Перевіримо можливість застосування лінійної функції:

$$\bar{y}_0 = \frac{367{,}9}{20} = 18{,}4 \text{, тис. год.,}$$

$$S^2_{\delta y} = 3{,}32 = 73{,}5 \text{, тис. год.,}$$

$$S^2_y = 4{,}26 \text{, тис. год.,}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{3{,}32}{4{,}26}} = 0{,}88 \text{,}$$

$$\left|\eta^2 - r^2\right| = \left|0{,}88^2 - 0{,}86^2\right| = 0{,}04 \text{.}$$

Оскільки $\left|\eta^2 - r^2\right| < 0{,}1$ – можливе застосування лінійної функції. Модель лінійного зв'язку $\tilde{y}_x = a + bx$. Коефіцієнти рівняння регресії визначаємо за допомогою даних з таблиці 7.6.

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 18{,}4 - 0{,}44 \cdot 73{,}5 = -13{,}94 \text{.}$$

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = 0{,}44 \cdot$$

Ми отримали модель зв'язку (рівняння регресії):

$$\tilde{y}_x = -13{,}94 + 0{,}44x$$

Середньоквадратична помилка рівняння:

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum\left(y - \bar{y}\right)^2}{n - g}} = \sqrt{\frac{21{,}4}{20 - 2}} = 1{,}09 \text{, тис. год.}$$

Значення $\tilde{y}$ розраховані за рівняннями регресії, наведені в табл. 7.6.

$$\frac{S_e}{\bar{y}} \cdot 100\% = \frac{1{,}09}{18{,}4} \cdot 100\% = 5{,}92 \text{, \%.}$$

Оскільки отримане відношення менше 10%, отримана модель доволі добре відображає взаємозв'язок фактора та критерію відгуку.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Наведіть визначення статистичного та функціонального зв’язку.
2. Що називається кореляційним зв’язком?
3. Перерахуйте причини виникнення кореляційного зв’язку між факторами?
4. Які задачі розв'язує кореляційно-регресійний аналіз?
5. У чому полягає суть методу найменших квадратів?
6. Яке практичне значення парної лінійної кореляції?
7. Що називають рівнянням регресії?
8. Дайте визначення коефіцієнта кореляції.
9. Перерахуйте головні етапи вивчення кореляційної залежності. Назвіть, які задачі розв'язуються на кожному з етапів?

8 БАГАТОФАКТОРНИЙ ПЛАНОВИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

8.1 Повний факторний експеримент

Велика кількість експериментальних задач у агропромисловому комплексі формуються як експериментальні задачі. Завдяки оптимальному розміщенні точок у факторному просторі та лінійному перетворенні координат вдається зменшити недоліки класичного регресійного аналізу, а саме кореляцію між коефіцієнтами рівняння регресії. На вибір плану експерименту впливає постановка задачі дослідження та об’єкт дослідження.

Планування експерименту дає змогу варіювати одночасно усі фактори та отримати кількісні оцінки головних ефектів та ефект взаємодії. Ефекти, необхідні досліднику, визначаються з меншою помилкою, ніж при традиційних методах дослідження. Використання методів планування значно підвищує ефективність будь-якого експерименту.

Планування експерименту з використанням схеми повного факторного експерименту (ПФЕ) дає змогу реалізувати всі можливі комбінації факторів на всіх вибраних для дослідження рівнях. Кількість дослідів ***N*** за ПФЕ визначається за формулою:

$$N = n^k, \tag{8.1}$$

де n – кількість рівнів;

k – число факторів.

У разі проведення експериментів лише на двох рівнях, за двох значень факторів при усіх можливих комбінаціях із $\boldsymbol{k}$ факторів – постановка дослідів за таким планом називається повним факторним експериментом типу 2^k. Збільшення кількості рівнів $\boldsymbol{n}$ > 3 призводить до збільшення кількості незалежних дослідів (табл. 8.1).

Для пошуку параметрів поліноміальних моделей без урахування квадратів факторів використовується ПФЕ, в якому кожний фактор приймає лише два значення (рівня).

Теоретичне рівняння такої моделі в загальному вигляді:

$$
\begin{gathered}
y = \beta_0 + \sum_{u=1}^{k} \beta_u x_u + \sum_{u \neq j}^{k} \beta_{uj} x_u x_j + \\
+ \sum_{u \neq j \neq q}^{k} \beta_{ujq} x_u x_j x_q + \ldots + \beta_{uj\ldots k} x_u x_j \ldots x_k
\end{gathered}, \qquad (8.2)
$$

де β_0 – вільний член;

β_u, β_{uj}, β_{ujq} – коефіцієнти, що враховують лінійний вплив на відклик, взаємодію факторів першого, другого та інших порядків.

Таблиця 8.1

Число дослідів $N = n^k$

n \ k	2	3	4
2	4	8	16
3	9	27	811
4	16	64	256

Остання складова враховує вплив на відклик добуток усіх факторів.

За даними експерименту можна визначити лише оцінки β-коефіцієнтів, які є невипадковими величинами чи константами. Для пошуку незміщених консистентних оцінок β-коефіцієнтів застосовується регресійний аналіз, в основі якого лежить метод найменших квадратів. Відповідно до моделі (8.2) рівняння регресії має вигляд:

$$\tilde{y} = b_0 + \sum_{u=1}^{k} b_u x_u + \sum_{u \neq j}^{k} b_{uj} x_u x_j + \\ + \sum_{u \neq j \neq q}^{k} b_{ujq} x_u x_j x_q + \ldots + b_{uj\ldots l} x_u x_j \ldots x_k, \quad (8.3)$$

Загалом існують такі етапи планування та реалізації ПФЕ:

– вибір параметрів оптимізації (критерію відгуку) та рівнів їх варіювання;

– кодування факторів;

– складання матриці планування експерименту;

– рандомізація дослідів;

– реалізація плану експерименту;

– перевірка однорідності дисперсії паралельних дослідів, відтворюваності результатів;

– розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії, їх помилок і значимості;

– перевірка адекватності моделі.

Кодування факторів. Кодування – переведення натуральних значень рівнів факторів у кодові безрозмірні величини для побудови стандартної матриці експерименту.

Відповідно, перехід від натуральних значень факторів до кодованих проводиться за формулою:

$$x_u = \frac{X_u - X_{0u}}{\varepsilon}, \quad (8.4)$$

де x_u – кодоване значення фактора (безрозмірна величина), верхній рівень позначається як +1, нижній як -1 (у центрі експерименту нульовий рівень);

X_u – натуральне значення фактора (розмірна величина);

X_{0u} – натуральне значення фактора на нульовому рівні;

ε – інтервал варіювання.

Інтервал варіювання визначається за формулою:

$$\varepsilon = \frac{x_u^{в} - x_u^{н}}{2}, \qquad (8.5)$$

де $x_u^{в}$, $x_u^{н}$ – значення i-го фактора на верхньому і нижньому рівні відповідно.

Як приклад, розглянемо двофакторний планований експеримент дослідження тривалості (t) відкачування повітря з камер змінного вакуумметричного тиску системи „виконавчий механізм – генератор імпульсів тиску” на трьох рівнях із трикратною повторюваністю дослідів.

Основними факторами, які впливають на тривалість відкачування, згідно з результатами теоретичних досліджень [5], є вакуумметричний тиск x_1, діаметр каліброваного отвору x_2, через який відкачується повітря в генераторі імпульсів тиску.

Таблиця 8.2

Рівні варіювання факторів та їх кодові значення

Фактор	Позначення	Розмірність	Рівні факторів			Інтервал варіювання ε
			верхній	нульовий	нижній	
			Кодові значення			
			+1	0	-1	
Вакуумметричний тиск, P_i	x_1	кПа	48	44	40	4
Діаметр перепускного отвору, $d_{пер}$	x_2	мм	4	3	2	1

Тривалість (t) відкачування повітря з камер змінного вакуумметричного тиску системи „виконавчий механізм – генератор імпульсів тиску” (до камер змінного вакуумметричного тиску належать міжстінкова камера виконавчого механізму і камера змінного вакуумметричного тиску генератора імпульсів тиску) залежить від об'єму камери V, діаметра перепускного отвору $d_{пер}$ генератора імпульсів тиску, вакуумметричного тиску P_i.

У таблиці 8.2 наведено рівні варіювання факторів та їх кодові значення.

На рисунку 8.1 подано факторний простір та рівні факторів до кодування (а) та після кодування (б).

Матриця планування експерименту. Умови проведення експерименту записують у вигляді матриці планування експерименту (табл. 8.3), де рядки відповідають різним незалежним дослідам, а стовпці – значенням (рівням) факторів.

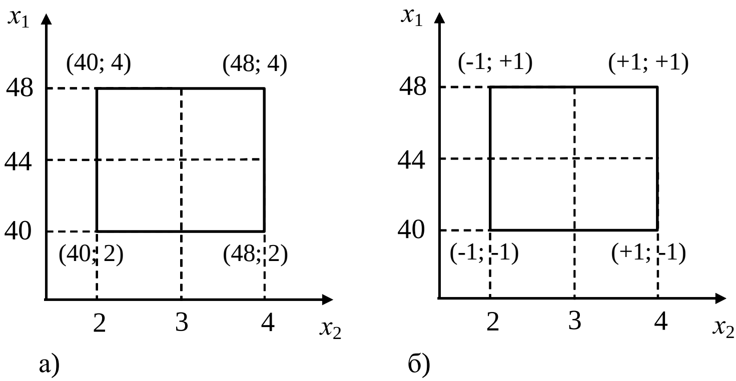


Рис. 8.1. Кодування факторів: а – рівні факторів до кодування; б – рівні факторів після кодування

У таблиці 8.4 подані матриці ПФЕ (2^2, 2^3, 2^4), побудовані за вказаним способом. Замість одиниць із відповідними знаками вказані лише знаки. Таке позначення можливе для ПФЕ, побудованого на двох рівнях факторів.

ПФЕ належить до планів, які найефективніші для побудови лінійних моделей. Ефективність досягається завдяки наступним властивостям:

– **симетричності відносно центру експерименту**. Алгебраїчна сума значень кожного із стовпців матриці рівна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ui} = 0, \quad (8.6)$$

де u = 1, 2, 3, …, k – номер фактора;

i – номер досліду;

N – число дослідів;

– умови нормування. Сума квадратів елементів кожного стовпця матриці рівна числу дослідів:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ui}^2 = N, \quad (8.7)$$

Дана властивість зумовлена тим, що значення факторів у матриці задаються рівними +1 та -1;

Таблиця 8.3

Матриця планованого двофакторного експерименту [5]

№ досліду	Рівні факторів		Тривалість відкачування повітря
	x_1	x_2	y
1	+1	+1	y_1
2	-1	-1	y_2
3	+1	-1	y_3
4	-1	+1	y_4
5	+1	0	y_5
6	-1	0	y_6
7	0	+1	y_7
8	0	-1	y_8
9	0	0	y_9

– ортогональність. Сума отриманих добутків двох стовпців матриці рівна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ui} x_{qi} = 0,\ u \neq q. \quad (8.8)$$

– **рототабельність**. Експериментальні точки в матриці планування розміщуються так, що точність передбачення параметра оптимізації (критерію відгуку) однакова на рівних відстанях від центру плану і не залежить від напрямку.

Таблиця 8.4

Матриця планованого ПФЕ (2^2, 2^3, 2^4)

Номер досліду	x_1	x_2	x_3	x_4
1	-	-	-	-
2	+	-	-	-
3	-	+	-	-
4	+	+	-	-
5	-	-	+	-
6	+	-	+	-
7	-	+	+	-
8	+	+	+	-
9	-	-	-	+
10	+	-	-	+
11	-	+	-	+
12	+	+	-	+
13	-	-	+	+
14	+	-	+	+
15	-	+	+	+
16	+	+	+	+

Рандомізація дослідів. Для виключення впливу систематичних похибок, викликаних втручанням сторонніх умов, потрібно використовувати метод рандомізації. Суть методу полягає у переведенні систематичних похибок у випадкові. Зменшення систематичної похибки досягається завдяки зміні випадковим чином методики та умов проведення дослідів.

Так, для плану експерименту 2^3 передбачається кожне значення параметра оптимізації (критерію відгуку) y визначити за двома паралельними дослідами, то загалом потрібно 16 дослідів. Для визначення порядку проведення дослідів можна скористатись таблицею випадкових чисел. Вибрану випадковим чином послідовність дослідів не рекомендовано змінювати.

Проведення експерименту. Проводячи експеримент для кожного прийнятого поєднання фактора вимірюють значення параметра оптимізації (критерію відгуку). Необхідно також враховувати, що результати кожного досліду є випадковими величинами внаслідок присутності похибки вимірювань значень факторів та, власне, параметра оптимізації (критерію відгуку), впливу неврахованих факторів.

Якщо відтворити декілька разів дослід з тими самими значеннями факторів, кожного разу значення параметра оптимізації (критерію відгуку) буде різним. Звичайно намагаються за кожного поєднання значень факторів (у кожній точці) провести декілька повторних дослідів, які називаються паралельними. Повторення дослідів дає змогу перевірити відтворюваність експерименту.

8.1.1 Перевірка однорідності дисперсії паралельних дослідів, відтворюваність експерименту

Перевірка однорідності дисперсії паралельних дослідів проводять з метою підтвердження нормального закону розподілу помилок окремих дослідів.

Нормальний закон розподілу помилок окремих дослідів – головна вимога проведення регресивного аналізу, який дає змогу розрахувати коефіцієнти регресії, перевірити їх значимість та адекватності математичної моделі експериментальних даних.

За умови однакової повторюваності дослідів, для визначення їх відтворюваності слід провести оцінку за критерієм Кохрена (G-критерій). За умови:

$$G_p \le G_T, \qquad (8.9)$$

де G_T – табличне значення критерію Кохрена, що визначається для ступеня свободи f_1=m-1, f_2=N і рівня значимості q (в технічних розрахунках приймають 5%-й рівень значимості q =

0,05);

G_p – розрахункове значення критерію Кохрена.
проведені досліди є відтворюваними.

Якщо ж виконується умова:

$$G_p \geq G_T, \qquad (8.10)$$

досліди є не відтворюваними, отриманий емпіричний матеріал використовувати для апроксимації функції не рекомендується. Необхідно провести повторний експеримент, збільшивши число повторностей для кожного досліду.

Розрахункове значення критерію визначаємо з виразу:

$$G_p = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^{N} S_i^2}, \qquad (8.11)$$

де $S^2_{n\ \max}$ – максимальне значення порядкової дисперсії у дослідах;

S^2_{ni} – порядкова дисперсія, яка визначається за формулою:

$$S_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - y_c\right)^2}{m-1}, \qquad (8.12)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i}{m}, \qquad (8.13)$$

де m – кількість дослідів, що повторюються (повторюваність дослідів).

Формулу (8.12) можна використовувати у випадках, коли число паралельних (повторностей) дослідів однакове для всієї матриці.

Зустрічаються випадки, коли число повторностей дослідів різне. Це зумовлено відкиданням грубих результатів дослідів. У такому разі використовують середньозважені значення дисперсії, отримані з врахуванням числа ступенів свободи:

$$S_i^2(y)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} f_i S_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{N} f_i}, \tag{8.14}$$

де f_i – число ступенів вільності в і-му досліді, $f_i = m – 1$.

Загальна помилка всіх експериментів:

$$S_i(y)=\sqrt{S_i^2(y)}, \tag{8.15}$$

8.1.2 Розрахунок коефіцієнтів регресії, перевірка їх значимості

Значення коефіцієнтів регресії b_i, b_{ij} дають змогу оцінити ступінь впливу факторів та їх взаємодії на критерій відгуку. Чим більше числове значення коефіцієнта, тим, відповідно, більший вплив здійснює фактор. Якщо коефіцієнт має знак „+” – із збільшенням значення фактора критерій відгуку збільшується, якщо „-” – зменшується.

Величина коефіцієнта відповідає впливу фактора на величину критерію відгуку (параметра оптимізації) при переході значення фактора з нульового рівня на верхній чи нижній рівні.

Отже, метою будь-якого дослідження є отримання математичної залежності між факторами та критерієм відгуку. За математичну модель можуть бути прийняті функції:

$$y = f\left(x_1, x_2, ..., x_i\right). \tag{8.16}$$

Звичайно, така кореляційна залежність подається у формі полінома у вигляді:

$$y = b_0 + \sum^{k} b_i x_i + \sum_{i<j}^{k} b_{ij} x_i x_j + \sum^{k} b_{ii} x_i^2 , \tag{8.17}$$

де y – функція відгуку;

b_0 ,b_i ,b_{ij} ,b_{ii} – коефіцієнти кореляційної залежності;

x_1, x_2 – кодовані значення факторів;

i, j – номери факторів.

Для апроксимації процесу, що розглядається, використовується лінійна частина кореляційної залежності (8.17):

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 , \tag{8.18}$$

Якщо є підстави вважати, що модель не лінійна, потрібно використати квадратичну частину кореляційної залежності (8.17):

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{12} x_1 x_2 . \tag{8.19}$$

Величини b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii} називаються коефіцієнтами регресії і визначаються за відомою методикою [5, 6, 10, 12, 13, 15] за формулами:

$$b_0 = k_1(n) \sum_{g=1}^{N} \bar{y}_g - k_2(n) \sum_{i=1}^{n} \sum_{g=1}^{N} x_{ig}^2 \bar{y}_g , \tag{8.20}$$

$$b_i = k_3(n) \sum_{g=1}^{N} x_{ig} \bar{y}_g , \tag{8.21}$$

$$b_{ij} = k_4(n) \sum_{g=1}^{N} x_{ig} x_{jg} \bar{y}_g , \tag{8.22}$$

$$b_{ii} = k_5(n) \sum_{g=1}^{N} x_{ig}^2 \bar{y}_g + k_6(n) \sum_{i=1}^{n} \sum_{g=1}^{N} x_{ig}^2 \bar{y}_g - k_7(n) \sum_{g=1}^{N} \bar{y}_g , \tag{8.23}$$

де $k_i(n)$ – табличні значення коефіцієнтів, які стосуються конкретного плану факторного експерименту та області планування;

N – кількість дослідів.

Зрозуміло, що один фактор більше впливає на критерій оптимізації, а інший – менше. Тому необхідно провести оцінку значимості коефіцієнтів. Статистична значимість коефіцієнтів регресії перевіряється за допомогою критерію Стьюдента (t – критерій).

Для оцінки значимості коефіцієнтів спочатку визначають розрахункове значення t – критерію за формулою:

$$t_{ip} = \frac{|b_i|}{S_{b_i}}, \tag{8.24}$$

де S_{bi} – середньоквадратична похибка коефіцієнта регресії.

Значимість коефіцієнтів регресії перевіряють за умовою:

$$t_{ip} > t_m, \tag{8.25}$$

де t_m – табличне значення критерію, знайдене для вибраної величини значимості (0,95) й ступеня свободи fn:

$$fn = N \cdot (m-1);$$

де N – кількість дослідів (рядків в матриці плану);

m – кількість повторностей одного досліду.

Дисперсію коефіцієнтів регресії визначають за формулою:

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_г^2}{N}, \tag{8.26}$$

де $S^2_г$ – головна дисперсія, що залежить лише від похибки досліду та кількості дослідів.

Головну дисперсію визначають за формулою:

$$S_г^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} S_n^2}{N}. \tag{8.27}$$

8.1.3 Перевірка адекватності моделі

Придатність рівняння регресії для опису реальної залежності критерію оптимізації від факторів визначаємо за відомим методом [5, 6, 10, 12, 13, 15]. Відповідно до нього адекватність кореляційної моделі визначаємо за допомогою критерію Фішера (F-критерію). Для цього порівнюємо дві дисперсії – одна характеризує розсіювання середніх дослідних даних $\overline{y}_{ci}$ щодо значень другої – змінної величини $\hat{y}_{pi}$, що розраховані за допомогою знайденого рівняння регресії (передбачувані значення). Цю дисперсію називають дисперсією адекватності й визначають з виразу [5, 6, 10, 12, 13, 15]:

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{u=1}^{N} \left(\hat{y}_{pi} - \overline{y}_{ci} \right)^2}{N-d}, \tag{8.28}$$

де $\overline{y}_{ci}$ – середнє значення змінної, отримане дослідним шляхом;

$\hat{y}_{pi}$ – середнє значення змінної, отримане розрахунковим шляхом;

d – кількість значущих коефіцієнтів у рівнянні регресії.

Адекватність моделі оцінюємо за умовами:

$$F_p \leq F_T \text{ – модель адекватна;}$$

$$F_p \geq F_T \text{ – модель не адекватна,} \tag{8.29}$$

де F_T – табличне значення F-критерію, визначене для заданого значення значимості і ступеня вільності головної дисперсії $f_1 = N\text{-}d$ та дисперсії адекватності $f_2 = N \cdot (m\text{-}1)$.

Розрахункове значення критерію Фішера $F_{роз}$ визначаємо зі співвідношення [74]:

$$F_{роз} = \frac{S_{ад}^2}{S_{г}^2}. \tag{8.30}$$

Приклад. Необхідно для підтвердження результатів теоретичних досліджень тривалості відкачування повітря з камер змінного вакуумметричного тиску системи „виконавчий механізм – генератор імпульсів тиску” провести планований експеримент [5, 15, 16, 18]. Для усунення впливу частоти пульсацій на тривалість відкачування повітря частоту пульсацій взяли стандартною 1 Гц і сталою протягом експерименту. Співвідношення тактів роботи генератора імпульсів тиску, з цією самою метою, прийняли 50:50.

Основними факторами, які впливають на тривалість відкачування, згідно з результатами теоретичних досліджень [5], є вакуумметричний тиск x_1, діаметр каліброваного отвору x_2, через який відкачується повітря в генераторі імпульсів тиску.

Отже, необхідно провести двофакторний планований експеримент на трьох рівнях із трикратною повторюваністю дослідів. Кількість дослідів визначимо за формулою (8.1):

$$N = 3^2 = 9\,.$$

Враховуючи п'ятикратну повторюваність досліду, загальна їх кількість становитиме:

$$\sum N = 9 \cdot 5 = 45 \text{ дослідів.}$$

Оскільки загальна кількість дослідів є доволі значною, приймаємо некомпозиційний план другого порядку Бокса-Бенкена.

Матрицю некомпозиційного плану другого порядку для двох факторів приведено в таблиці 8.5.

Таблиця 8.5

Матриця планованого двофакторного експерименту

№ досліду	Рівні факторів		Тривалість відкачування повітря
	x_1	x_2	y
1	+1	+1	y_1
2	-1	-1	y_2
3	+1	-1	y_3
4	-1	+1	y_4
5	+1	0	y_5
6	-1	0	y_6
7	0	+1	y_7
8	0	-1	y_8
9	0	0	y_9

Межі значень факторів вибирали на підставі реальних режимів роботи системи. Для кожного фактора вибрано два рівні, нижній і верхній, у межах якого фактор змінюватиме своє значення в експерименті. Після цього було визначено основний – нульовий рівень, навколо якого симетрично розміщувалися експериментальні точки. Потім вибрали інтервал варіювання факторів.

Тривалість (t) відкачування повітря з камер змінного вакуумметричного тиску системи „виконавчий механізм – генератор імпульсів тиску” (до камер змінного вакуумметричного тиску належать міжстінкова камера виконавчого механізму і камера змінного вакуумметричного тиску генератора імпульсів тиску) залежить від об’єму камери V, діаметра перепускного отвору $d_{пер}$ генератора імпульсів тиску, вакуумметричного тиску P_i.

У таблиці 8.6 наведено рівні варіювання факторів та їх кодові значення.

Таблиця 8.6

Рівні варіювання факторів та їх кодові значення

Фактор	Позначення	Розмірність	Рівні факторів			Інтервал варіювання ε
			верхній	нульовий	нижній	
			Кодові значення			
			+1	0	-1	
Вакуумметричний тиск, P_i	x_1	кПа	48	44	40	4
Діаметр перепускного отвору, $d_{пер}$	x_2	мм	4	3	2	1

Апроксимацію експериментальних даних виконали у вигляді рівняння регресії другого порядку (8.19), де x_1 – величина вакуумметричного тиску P_i, а x_2 – діаметр перепускного отвору $d_{пер}$. Критерієм відгуку є тривалість відкачування повітря t з камер змінного вакуумметричного тиску системи „виконавчий механізм-генератор імпульсів тиску”.

Відтворюваність дослідів на виконання умов перевірили за умовою (8.9) [5].

Для табличного значення критерію G_T ступені вільності становлять:

для чисельника

$$f_1 = C - 1, \tag{8.31}$$

для знаменника

$$f_2 = N, \tag{8.32}$$

де C – кількість повторностей дослідів.

Тоді:

$$f_1 = 5 - 1 = 4$$

та

$$f_2 = 9.$$

Розрахункове значення критерію Кохрена визначається зі співвідношення (8.12):

$$G_p = \frac{0{,}000347}{0{,}0019} = 0{,}1826,$$

що менше від табличного значення критерію Кохрена, яке становить G_T = 0,5584. Отже, дослід відтворюватиметься.

Використовуючи методику описану в розділі 8.1.2, були розраховані коефіцієнти рівняння регресії і переведені для натуральних значень факторів. Рівняння регресії що характеризує залежність тривалості відкачування повітря з камер змінного вакуумметричного тиску від вакуумметричного тиску і діаметра перепускного отвору в натуральних значеннях має вигляд:

$$\begin{gathered} t = 1{,}8184 - 0{,}0752 \cdot P_i - 0{,}03 \cdot d_{пер} - 0{,}00135 \cdot P_i \cdot d_{пер} \\ + 0{,}001 \cdot P_i^2 + 0{,}0014 \cdot d_{пер}^2 \end{gathered}. \tag{8.33}$$

Проводимо оцінку значимості коефіцієнтів регресії. Для цього визначаємо середню дисперсію S^2:

$$S^2 = \frac{\sum_{n=1}^{N} S_{ni}^2}{N}, \qquad (8.34)$$

$$S^2 = \frac{0{,}00379}{9} = 0{,}000421.$$

і дисперсію у визначенні коефіцієнтів регресії S_A^2:

$$S_A^2 = \frac{S^2}{N \cdot m}, \qquad (8.35)$$

де N – кількість дослідів (рядків в матриці плану);

m – кількість повторностей одного досліду.

$$S_A^2 = \frac{0{,}000421}{9 \cdot 5} = 9{,}36 \cdot 10^{-6}.$$

Для порівняння кожного коефіцієнта регресії з виразом $S_A t$, потрібно визначити t-критерій Стьюдента для вибраного рівня значимості 0,95 й ступеня свободи $fn = N \cdot (c-1)$, де N – кількість дослідів (рядків у матриці плану).

$$fn = 9 \cdot (5-1) = 36.$$

Табличне значення критерію – t = 2,020 (табл. 5.5).

Якщо $|b_i| > S_A t$ – коефіцієнт значимий і член зданим коефіцієнтом залишається в рівнянні регресії, в іншому разі опускається.

Вираз $S_A t$ $=1{,}890 \cdot 10^{-5}$. Провівши порівняння кожного коефіцієнта (табл. 8.7), доходимо висновку, що всі вони значимі.

Придатність рівняння регресії для опису реальної залежності критерію оптимізації від факторів визначали відомим методом [5, 15, 16, 18]. Для цього необхідно визначити критерій Фішера (F-критерію).

Розрахункове значення F-критерію визначаємо за формулою (8.30). Дисперсію адекватності розраховуємо за формулою (8.28):

$$S_{ад}^2 = \frac{0,00038}{9-6} = 1,27 \cdot 10^{-4};$$

$$F_{роз} = \frac{1,27 \cdot 10^{-4}}{4,21 \cdot 10^{-4}} = 0,3017.$$

Розрахункове значення $F_{роз}$ – 0,3017.

Таблиця 8.7

Значення коефіцієнтів рівняння регресії

Коефіцієнти регресії	
b_0	1,8184
b_1	-0,0752
b_2	-0,03
b_{12}	-0,00135
b_{11}	0,001
b_{22}	0,0014

Для визначення табличного значення F-критерію розраховуємо ступінь вільності головної дисперсії $f_1=N\text{-}d$ та дисперсії адекватності $f_2=N\cdot(m\text{-}1)$:

$$f_1=9\text{-}6=3,$$

$$f_2=9\cdot(5\text{-}1)=36.$$

Табличне значення F – критерію становить числа 2,9 (табл. 5.4).

Оцінюємо адекватність моделі, підставивши розрахункове і табличне значення F-критерію у формулу (8.29):

$$0,3017 \le 2,29.$$

Оскільки виконана умова $F_p \le F_T$ – модель адекватна.

Графічне зображення залежності тривалості відкачування повітря з камер змінного вакуумметричного тиску наведено на рис. 8.2, 8.3.

Аналіз графіків (рис. 8.2, 8.3) показав, що характер зміни тривалості відкачування повітря з камер змінного вакуумметричного тиску є однаковий для всього інтервалу зміни факторів. Із збільшенням вакуумметричного тиску та зменшенням діаметра перепускного отвору зростає тривалість відкачування повітря.

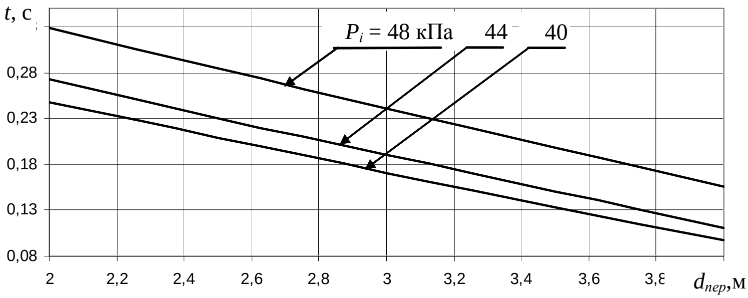


Рис. 8.2. Залежність тривалості відкачування t повітря з камер змінного вакуумметричного тиску від діаметра перепускного отвору $d_{пер}$ генератора імпульсів тиску при вакуумметричному тиску P_i

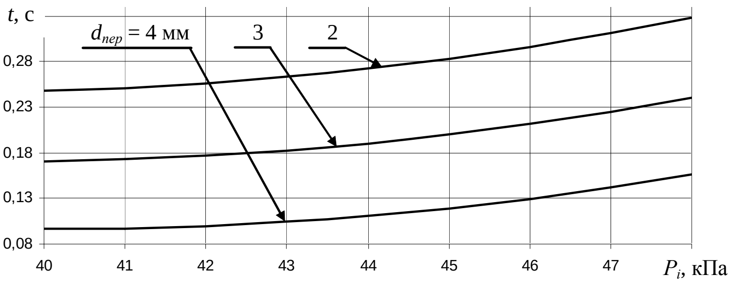


Рис. 8.3. Залежність тривалості t відкачування повітря з камер змінного вакуумметричного тиску від вакуумметричного тиску P_i при діаметрі $d_{пер}$ перепускного отвору генератора імпульсів тиску

Графічне зображення рівняння регресії у вигляді тривимірної площини наведено на рис. 8.4.

Як показує аналіз графіка (рис. 8.4), при діаметрі перепускного отвору генератора імпульсів тиску $d_{пер}$ = 2-4 мм і вакуумметричному тиску P_i = 48-40 кПа тривалість відкачування повітря з камер змінного вакуумметричного тиску знаходиться в межах t = 0,0968-0,3288 с.

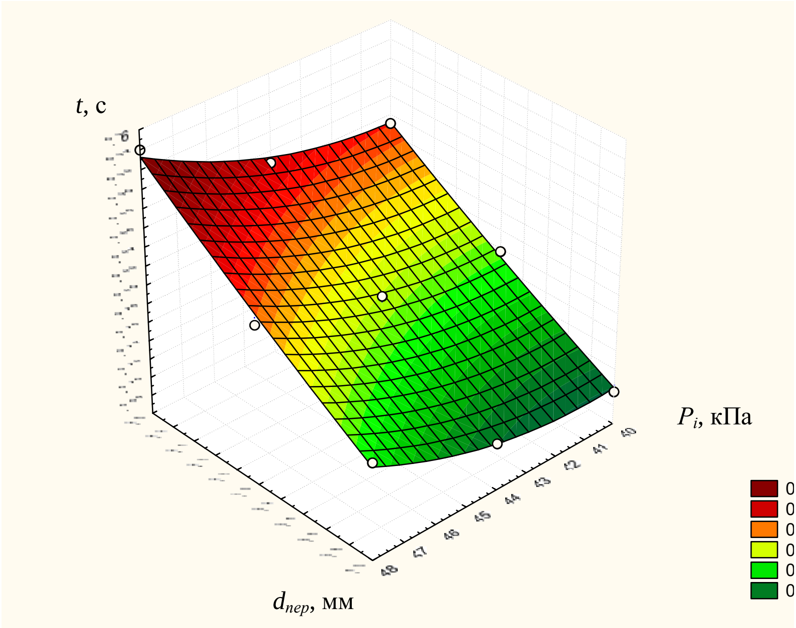


Рис. 8.4. Залежність тривалості t відкачування повітря з камер змінного вакуумметричного тиску системи “виконавчий механізм-генератор імпульсів тиску” від діаметра $d_{пер}$ перепускного отвору пульсатора і вакуумметричного тиску P_i

Для оцінки характеру зміни критерію обґрунтування t від зміни факторів x_1 і x_2 побудували методом двомірних січень лінії рівневого виходу критерію обґрунтування.

Складаємо таблицю залежності фактора x_1 при сталих значеннях критерію x_2 і критерію обґрунтування за рівнянням регресії (8.33), розв’язавши його як квадратне рівняння.

Для побудови ізоліній на факторній площині (x_1, x_2) використаємо такий прийом [5]:

а) вибираємо декілька перетинів факторного простору (зазвичай, достатньо 6 перетинів при x_1 = 0; x_1 = ±1; x_2 = 0; x_2 =

± 1);

б) шляхом підстановки у рівняння функції відклику значень 0, ±1 для одного з факторів x_j (j = 1,2) після приведення подібних членів знаходять для кожного перетину рівняння виду:

$$y\left(x_j\right)=b_0'+b_i'\cdot x_i+b_{ii}\cdot x_i^2 \ (i=1,2). \qquad (8.36)$$

в) знаходимо розв'язок цього рівняння:

$$x_i\left(x_j\right)=-\frac{b_i'}{2b_{ii}}\pm\sqrt{\frac{1}{b_{ii}}\cdot\left\{y\left(x_j\right)-\left[b_0'-\frac{\left(b_i'\right)^2}{4b_{ii}}\right]\right\}}. \qquad (8.37)$$

г) підставляючи у рівняння перетину значення $y(x_j)=y_c$ для заданої ізолінії, визначаємо координати відповідних точок перетину з перетином x_j.

Результати розрахунку даних для побудови двомірних січень функції відгуку наведено в таблиці 8.8 та на рисунку 8.5.

Таблиця 8.8

Параметри для побудови двомірних січень функції відгуку

x_2	t,c				
$d_{пер}$,мм	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
	x_1, P_i, кПа				
2	-	-	-	41	46
2,2	-	-	-	43	47
2,4	-	-	-	45,	48,5
2,6	-	-	39,5	46	49
2,8	-	-	43	47,5	50
3	-	-	45	48,5	51
3,2	-	-	46,5	49,5	52
3,4	-	43	47,5	50,	52,5
3,6	-	45	48,5	51,	53
3,8	40	46	49,5	52	54
4	42	47,5	50,5	53	54,5

На рисунку 8.6. зображено залежність тривалості відкачування t повітря з камер змінного вакуумметричного тиску від вакуумметричного тиску P_i за діаметра $d_{пер}$ перепускного отвору, відповідно до теоретичного рівняння [5] та отриманих експериментальних даних.

Аналіз отриманих поверхонь свідчить, що на тривалість відкачування повітря найбільше впливає діаметр перепускних отворів генератор імпульсів тиску. За його зменшення тривалість відкачування повітря зростає нелінійно.

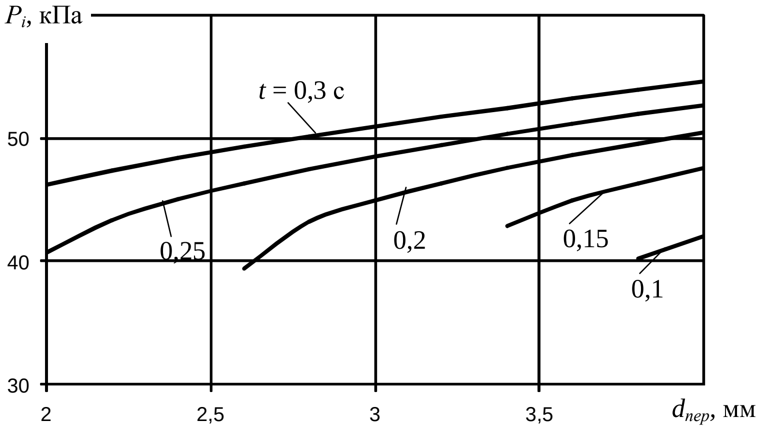


Рис. 8.5. Вплив вакуумметричного тиску P_i і діаметра $d_{пер}$ перепускного отвору на тривалість t відкачування повітря з камер змінного вакуумметричного тиску системи "виконавчий механізм-генератор імпульсів тиску"

Порівняння результатів теоретичних і експериментальних досліджень (рис. 8.6) показав, що відхилення експериментальних даних від теоретичного моделювання тривалості відкачування повітря з камер змінного вакуумметричного тиску системи "виконавчий механізм-генератор імпульсів тиску" перебуває в межах від 0,2% до 26,4%.

Найбільше відхилення 26,4% є за вакуумметричного тиску P_i =40 кПа і діаметра перепускного отвору генератора імпульсів тиску $d_{пер}$=2 мм, за вакуумметриного тиску P_i=44 кПа і діаметра перепускного отвору генератора імпульсів тиску $d_{пер}$=2 мм відхилення теоретичних від експериментальних даних становить 22,4%. За вакуумметричного тиску P_i=48 кПа і діаметра перепускного отвору $d_{пер}$=2-4 мм відхилення теоретичних від експериментальних даних є в межах 13-17,8%.

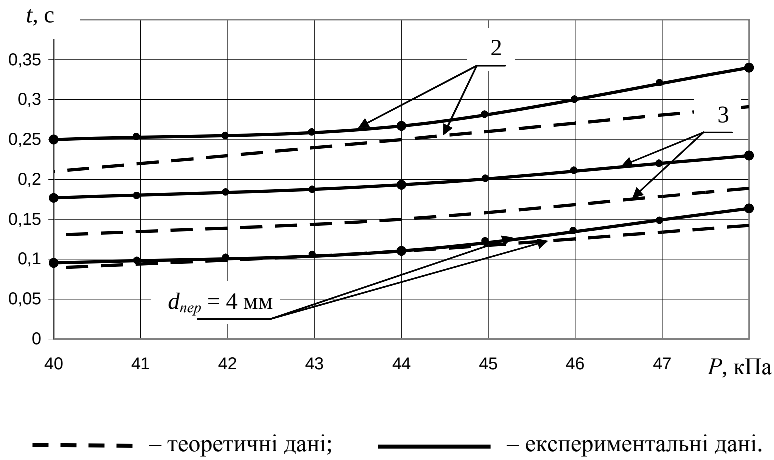


Рис. 8.6. Залежність тривалості t відкачування повітря з камер змінного вакуумметричного тиску від вакуумметричного тиску P_i і діаметра $d_{пер}$ перепускного отвору генератор імпульсів тиску

Це пояснюється тим, що в розрахунку тривалості відкачування повітря в математичній моделі при моделюванні швидкісного коефіцієнта режим перетікання повітря через перепускний отвір вибраний наближено і коефіцієнт втрат тиску розраховано з відхиленнями, що призвело до відхилення теоретичних від експериментальних даних.

Для узгодження теоретичних залежностей з експериментальними даними в теоретичне рівняння [5] для розрахунку тривалості відкачування повітря вводимо коефіцієнт 1,18.

Аналіз отриманої залежності дає змогу рекомендувати раціональні параметри пневмоелектромагнітного генератора імпульсів тиску за умови забезпечення режиму безударного плавного розмикання дійкової гуми виконавчого механізму при вакуумметричному тиску P_i = 48 кПа і об’ємі камер змінного вакуумметричного тиску системи “виконавчий механізм – генератор імпульсів тиску” $V = 10^{-4}$ м^3.

Режим безударного розмикання дійкової гуми виконавчого механізму забезпечується тривалістю відкачування повітря з камер змінного вакуумметричного тиску в межах 0,16 с $\leq t \leq$ 0,17 с при діаметрі перепускного отвору генератора імпульсів тиску $d_{пер}$ = 3,0-3,2 мм.

8.2 Дробовий факторний експеримент

У разі дворівневого k-факторного експерименту на підставі дослідів в N точках факторного простору можна знайти $N = 2^k$ коефіцієнтів рівняння регресії. Якщо число факторів $k \geq 4$, ефекти взаємодії високого порядку стають статистично невизначеними, тобто вплив співмножників x_1, x_2, … x_k на відклик y взаємно компенсуються. Прийнято апріорно вважати, що в рівнянні регресії з великою кількістю факторів коефіцієнти високих порядків взаємодії рівні нулю. Отже, за великої кількості факторів можна будувати плани експериментів, що дають змогу визначити лінійні ефекти факторів, ефекти їх парних та інколи трійних взаємодій. Для зменшення затрат часу та засобів на проведення експерименту та опрацювання отриманих результатів необхідно зменшити кількість коефіцієнтів регресії, що визначаються. Кількість дослідних точок у таких експериментах має бути більше чи рівно кількості коефіцієнтів регресії b, що визначається. Таким умовам задовольняють частини (репліки) ПФЕ 2^k, кратні 2^p, де p – ціле додатне число.

Дробові факторні експерименти (ДФЕ) 2^{k-p}. Кількість дослідних точок в ДФЕ 2^{k-p} в 2^p рази менша, ніж у ПФЕ 2^k. Оскільки ДФЕ 2^{k-p} – частина ПФЕ 2^k, ДФЕ називають також дробовими репліками повного факторного експерименту.

ДФЕ, що утворює половину ПФЕ 2^k, позначається 2^{k-1} та називається напівреплікою ПФЕ 2^k. ДФЕ 2^{k-1} містить $2^k/2^2 = 2^k/4$ дослідних точок та називається ¼ реплікою ПФЕ 2^k.

8.2.1 Планування дробових факторних експериментів

Як один із варіантів ДФЕ, розглянемо побудову плану ДФЕ 2^{3-1}, в якому кількість дослідних точок $N = 2^{3-1} = 2^2 = 4$. На основі ядра плану ПФЕ 2^2 можна побудувати рівняння регресії:

$$\tilde{y} = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 \,. \qquad (8.38)$$

Якщо взаємодія факторів x_1x_2 статистично незначна, коефіцієнт b_{12} немає потреби визначати. Відповідно, в матриці ПФЕ 2^2 стовпчик добутку x_1x_2 буде зайвим, але в плані ДФЕ 2^{3-1} (табл. 8.9) його використовують, замінюючи $x_3 = x_1x_2$ (в процесі експерименту варіюють x_3 за законом зміни добутку x_1x_2).

План ДФЕ 2^{3-1} можна також отримати, якщо фактор x_3 взяти із зворотним знаком (табл. 8.10)

Таблиця 8.9

Матриця планування ДФЕ 2^{3-1}

№ досліду	x_0^*	x_1	x_2	$x_3 = x_1x_2$	y
1	+	-	-	+	y_1
2	+	+	-	-	y_2
3	+	-	+	-	y_3
4	+	+	+	+	y_4

* – фіктивна змінна x_0, у всіх дослідах приймає значення +1

Наведені плани (табл. 8.9, 8.10) є симетричними, нормованими та ортогональними. Кожний з цих планів відповідає різним точкам факторного простору, в яких потрібно проводити незалежні досліди, і дає змогу побудувати лінійне рівняння регресії, що містить чотири незалежні b-коефіцієнта.

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \,. \qquad (8.40)$$

Таблиця 8.10

Матриця планування ДФЕ 2^{3-1}

№ досліду	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1 x_2$	y
1	+	-	-	-	y_1
2	+	+	-	+	y_2
3	+	-	+	+	y_3
4	+	+	+	-	y_4

План, який містить чотири рядки, не дає змогу визначити більше чотирьох коефіцієнтів: вільного члена b_0 та трьох лінійних коефіцієнтів регресії b_1, b_2, b_3.

На основі ПФЕ 2^3 можна побудувати наступні дробові репліки:

– ДФЕ 2^{4-1} – напіврепліка ПФЕ 2^4;
– ДФЕ 2^{5-2} – 1/4 репліка ПФЕ 2^5;
– ДФЕ 2^{6-3} – 1/8 репліка ПФЕ 2^6;
– ДФЕ 2^{7-4} – 1/16 репліка ПФЕ 2^7.

План ПФЕ 2^7 є **насиченим**, оскільки число факторів на одиницю менше числа рядків.

Плани ПФЕ 2^3 дають змогу побудувати рівняння регресії виду:

$$\begin{aligned}\tilde{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + \\ + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3\end{aligned} \,. \qquad (8.41)$$

Рівняння регресії (8.41) містить три парних (першого порядку) та одну трійну (другого порядку) взаємодії. Якщо яке-небудь із взаємодій є статистично невизначеною, будують напіврепліку ДФЕ 2^{4-1}. Відповідно, якщо невизначеними є дві взаємодії, будують 1/4 репліку ДФЕ 2^5 або ДФЕ 2^{5-2}.

Побудуємо 1/4 репліку для випадку не значимих коефіцієнтів b_{13} та b_{123}. Додаткові фактори x_4 та x_5 вводять за допомогою співвідношень (**генеруючи співвідношень** або

генераторів):

$$x_4 = x_1 x_3 . \quad (8.42)$$

$$x_5 = x_1 x_2 x_3 . \quad (8.43)$$

або

$$x_4 = -x_1 x_3 . \quad (8.44)$$

$$x_5 = x_1 x_2 x_3 . \quad (8.45)$$

або

$$x_4 = x_1 x_3 . \quad (8.46)$$

$$x_5 = -x_1 x_2 x_3 . \quad (8.47)$$

або

$$x_4 = -x_1 x_3 . \quad (8.48)$$

$$x_5 = -x_1 x_2 x_3 . \quad (8.49)$$

Приклад. Складемо план ДФЕ 2^{5-2} з генераторами $x_4 = -x_1 x_3$ та $x_5 = x_1 x_2 x_3$ (табл. 8.11). Цей план у п'ятифакторному просторі виділяє вісім точок для вимірювання критерію відгуку.

Таблиця 8.11

Матриця планування ДФЕ 2^{5-2}

№ досліду	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4 = -x_1 x_3$	$x_5 = x_1 x_2 x_3$	y
1	+	-	-	-	-	-	y_1
2	+	+	-	-	+	+	y_2
3	+	-	+	-	-	+	y_3
4	+	+	+	-	+	-	y_4
5	+	-	-	+	+	+	y_5
6	+	+	-	+	-	-	y_6
7	+	-	+	+	+	-	y_7
8	+	+	+	+	-	+	y_8

Перевагою дробових експериментів є економія часу. Проте істотним недоліком є змішування оцінок β-коефіцієнтів. Розраховуючи b-коефіцієнти за даними багатофакторного експерименту, в деяких випадках отримають не оцінки окремих коефіцієнтів, а оцінки різних їх комбінацій. Наприклад, величина b_0 є оцінкою не лише β_0 моделі (8.2), але й коефіцієнтом при квадратах факторів β_{11}, β_{22}, …, β_{kk}, яких в рівняння (8.2) немає, але можуть бути. Умовою за якої b_0 є оцінкою β_0 ($b_0 \to \beta_0$), виступає рівність коефіцієнтів β_{uu} (u = 1,2,…,k) нулю.

Якщо деякі значення β_{uu} відрізняються від нуля, b_0 є оцінкою β_0 та всіх значень β_{uu}, що відрізняються від нуля:

$$b_0 \to \beta_0 + \sum_{u=1}^{k} \beta_{uu} . \tag{8.50}$$

Приклад. Побудуємо структурну матрицю плану ДФЕ 2^{3-1}, в якій враховуються всі взаємодії, для аналізу явища змішування оцінок (табл. 8.12).

Аналіз таблиці 8.12 показав, що $x_0 = -x_1 x_2 x_3$, $x_1 = -x_2 x_3$, $x_2 = -x_1 x_3$, $x_3 = -x_1 x_2$, відповідно, b-коефіцієнти рівняння (8.40) подають оцінки різниці коефіцієнтів регресії:

$$b_0 \to \beta_0 + \beta_{123} . \tag{8.51}$$

$$b_1 \to \beta_2 + \beta_{23} . \tag{8.52}$$

$$b_2 \to \beta_2 + \beta_{13} . \tag{8.53}$$

$$b_3 \to \beta_3 + \beta_{12} . \tag{8.54}$$

Розглянута процедура аналізу змішування оцінок за великого числа факторів (k > 3) занадто громіздка. Для полегшення оцінки змішування оцінок необхідно використати генеруючі співвідношення та ввести поняття **визначаючого контрасту**.

Таблиця 8.12

Структурна матриця плану ДФЕ $2^{3\text{-}1}$

№ досліду	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$
1	+	-	-	-	+	+	+	-
2	+	+	-	+	-	+	-	-
3	+	-	+	+	-	-	+	-
4	+	+	+	-	+	-	-	-

Приклад. Для плану ДФЕ $2^{3\text{-}1}$ генератор $x_3 = -x_1 x_2$ дає визначаючий контраст (**ВК**):

$$1 = x_3^2 = -x_1 x_2 x_3. \tag{8.55}$$

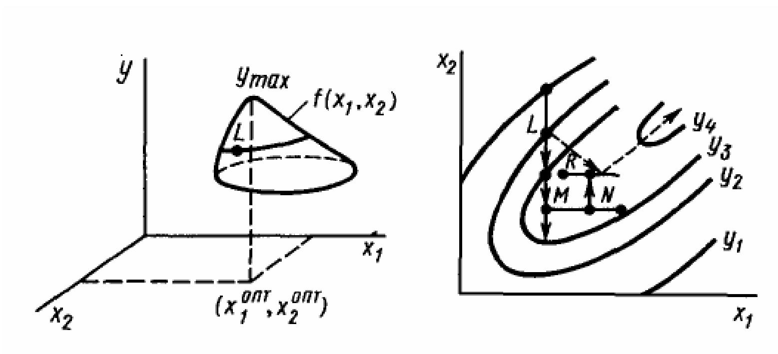
Перемноживши дві частини ВК $1 = -x_1 x_2 x_3$ на x_0, x_1, x_2, x_3, знайдемо еквівалентності $x_0 = -x_1 x_2 x_3$, $x_1 = -x_2 x_3$, $x_2 = -x_1 x_3$, $x_3 = -x_1 x_2$, з яких слідують символьні вирази (8.51) – (8.54). Аналогічно проводимо аналіз змішування оцінок і в загальних випадках.

Опрацювання результатів ДФЕ аналогічне опрацюванню результатів ПФЕ.

8.3 Оптимізація методом крутого сходження по поверхні відгуку

Завдання оптимізації полягає в експериментальному визначенні координати екстремальної точки ($x_1^{опт}, x_2^{опт}, \ldots, x_k^{опт}$) функції $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$.

Побудуємо контурні перерізи y = const поверхні відгуку для k = 2 (рис. 8.7, а). При традиційному експерименті фіксують один із двох факторів, наприклад x_1 та рухаються із точки L у напрямку осі x_2.



а) **б)**

Рис. 8.7. Рух по поверхні відгуку (а) до екстремуму в однофакторному експерименті та в методі крутого сходження (б)

Координати точки *L* відомі з попередніх дослідів. Рух по x_2 продовжується до припинення приросту y (рис. 8.7, б). В точці М з кращим виходом фіксується фактор x_2 і починається рух в напрямку ось x_1. В точці *N* знову фіксується x_1 і починається знову рух по змінній x_2. Шлях до екстремуму за ламаною *LMNR* не найкоротший. Як відомо, рух за найкоротшим, найкрутішим шляхом – це рух за градієнтом перпендикулярно лініям y = const (рис. 8.7, б показано пунктиром). Якщо опис поверхні відгуку в загальному випадку $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right)$, градієнт функції:

$$gradf = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\vec{j} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}\vec{k}\,, \tag{8.56}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, ...\vec{k}$ – орти координатних осей.

Передбачається, що функція f безперервна, диференційована, однозначна та не має особливих точок. Бокс і Уілсон припустили кроковий метод руху по поверхні відгуку. В межах точки *L* проводиться експеримент для локального опису поверхні відгуку лінійним рівнянням регресії:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_k x_k\,. \tag{8.57}$$

Далі рухаються по поверхні відгуку в напрямку градієнта лінійного наближення:

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} = b_1; \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} = b_2; ...; \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_k} = b_k \cdot \tag{8.58}$$

Проводячи дослід, величина кроку має бути пропорційною добутку коефіцієнта b_j на інтервал варіювання $b_j \Delta z_j$. Якщо одного лінійного наближення недостатньо, проводиться нова серія дослідів з центром в точці, яка відповідає найбільшому значенню y, та знаходиться новий напрямок для руху по поверхні відгуку. Такий кроковий процес продовжується до досягнення області, близької до екстремуму.

Напрямок градієнта залежить від вибраного інтервалу варіювання незалежного фактора. При зміні в n раз інтервалу варіювання для деякого j-го фактора змінюється в n^2 раз величина кроку для цього фактора, оскільки в n раз змінюється коефіцієнт регресії b_j та інтервал варіювання. Знаки складових градієнта залишаються інваріантними до зміни інтервалу. Вибір інтервалу варіювання залежить від наявності апріорної інформації про параметричну чутливість процесу. Інтервал варіювання має бути доволі великим, для того, щоб діапазон зміни вихідної величини був більшим помилки відтворюваності.

Для більшості процесів лінійне наближення поверхні відгуку адекватно експерименту лише за невеликих інтервалів варіювання. Якщо на інтервал варіювання не накладено ніяких обмежень, їх обирають таким чином, щоб отримати рівняння регресії, симетричне відносно коефіцієнтів біля лінійних членів. Опрацювання результатів експерименту (пов’язане з крутим сходженням) має супроводжуватись детальним статистичним аналізом отриманих результатів.

8.4 Композиційні плани Бокса-Уілсона. Опис функції відгуку в області, близькій до екстремуму

Оскільки в області, близькій до екстремуму, функція відгуку нелінійна, для її адекватного опису використовують нелінійні поліноми – поліноми другого порядку.

Оптимальні умови процесу знаходяться на основі опису поліному другого порядку експерименту, число дослідів N в плані має бути не менше числа коефіцієнтів, що визначаються в рівнянні регресії другого порядку для k факторів.

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j + \sum_{\substack{u,j=1 \\ u \neq j}}^{k} \beta_{uj} x_u x_j + \sum_{j=1}^{k} b_{jj} x_j^2 . \tag{8.59}$$

Вибіркові коефіцієнти (8.59) є оцінками відповідних коефіцієнтів рівняння теоретичної регресії:

$$m_y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j + \sum_{\substack{u,j=1 \\ u \neq j}}^{k} \beta_{uj} x_u x_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} x_j^2 . \tag{8.60}$$

Залежно від числа факторів – число коефіцієнтів l рівняння регресії (8.59) визначається за формулою:

$$l = (k+1) + k + C_k^2 = 2k + 1 + \frac{k!}{2!(k-2)!} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \tag{8.61}$$

де C_k^2 – кількість поєднань із k факторів по два, рівне числу ефектів парної взаємодії.

В області, близькій до екстремуму, присутні значні квадратичні ефекти та ефекти парної взаємодії.

Ознакою знаходження в майже стаціонарній області слугує потреба використання поліному другого порядку для адекватного опису отриманих експериментальних результатів.

Проведення додаткової серії дослідів до ПФЕ 2^k чи ДФЕ

$2^{k\text{-}1}$ в центрі плану також дає змогу виявити близькість стаціонарної області. Середні значення цієї серії дослідів є оцінкою для вільного члена рівняння (8.60):

$$\bar{y}_0 \to \beta_0, \tag{8.62}$$

Для розрахунку вибіркового коефіцієнта b_0, скористаємось формулою:

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{0i} y_i . \tag{8.63}$$

Вибірковий коефіцієнт (8.63) оцінює суму вільного та квадратичного членів:

$$b_0 \to \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} . \tag{8.64}$$

Чим більша різниця – тим значимі квадратичні ефекти:

$$\left(b_0 - \bar{y}_0\right) \to \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} . \tag{8.65}$$

Для опису поверхні відгуку поліномами другого порядку незалежні фактори в планах мають приймати не менше трьох різних значень. ПФЕ типу 3^k дає змогу реалізувати експеримент, в якому кожен із k факторів розглядається на трьох рівнях та реалізуються усі можливі поєднання факторів. Як приклад, у таблиці 8.13 наведена матриця планування ПФЕ 3^2.

Таблиця 8.13

Матриця планування ПФЕ 3^2

№ досліду	x_1	x_2	y
1	-1	-1	y_1
2	0	-1	y_2
3	+1	-1	y_3
4	-1	0	y_4
5	0	0	y_5
6	+1	0	y_6
7	-1	+1	y_7
8	0	+1	y_8
9	+1	+1	y_9

Зменшити число дослідів за умови отримання незміщеної оцінки для лінійних ефектів та ефектів взаємодії можна за допомогою композиційних планів Бокса-Уілсона.

Якщо лінійне рівняння регресії виявилось неадекватним експерименту, потрібно:

– додати $2k$ точок, розміщених на координатних осях факторного простору. Координати точок рівні:

$$(\pm\alpha,0,...,0),(0,\pm\alpha,...,0),...,(0,...,0,\pm\alpha),$$

де α – відстань від центру плану до точки;

– збільшити число експериментів в центрі плану n_0.

Загальне число дослідів в матриці композиційного плану за $k \le 4$ складає:

$$N = 2^k + 2k + n_0. \tag{8.66}$$

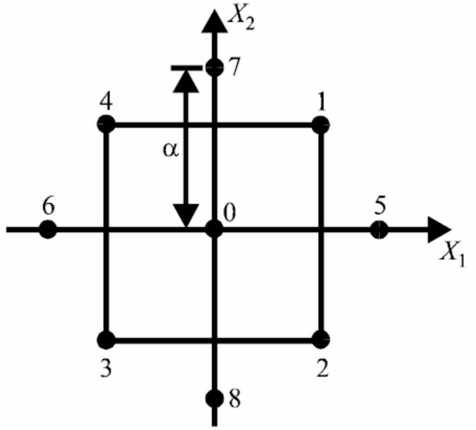


Рис. 8.8. Композиційний план другого порядку для двох факторів

Розглянемо побудову композиційних планів на прикладі $k = 2$ (рис. 8.8). Точки 1, 2, 3, 4 утворюють ПФЕ 2^2, токи 5, 6, 7, 8 – додаткові точки з координатами $(\pm\alpha,0)$ та $(0,\pm\alpha)$, координати n_0 дослідів в центрі плану нульові – $(0,0)$.

Композиційні плани другого порядку для двох факторів наведено в таблиці 8.14 (в центрі плану виконана серія із трьох дослідів)

Таблиця 8.14

Композиційний план другого порядку для двох факторів

№ досліду	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y
1	2	3	4	5	6	7	8
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_3
4	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_4
5	+1	$+\alpha$	0	0	α^2	0	y_5
6	+1	$-\alpha$	0	0	α^2	0	y_6
7	+1	0	$+\alpha$	0	0	α^2	y_7
8	+1	0	$-\alpha$	0	0	α^2	y_8
9	+1	0	0	0	0	0	y_9
10	+1	0	0	0	0	0	y_{10}
11	+1	0	0	0	0	0	y_{11}

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте визначення терміну „експеримент”.
2. Які питання розв'язує планування експерименту?
3. Класифікація експериментів?
4. Що називається факторами, областю визначення факторів?
5. Що називається критерієм відгуку та поверхнею відгуку?
6. Перерахуйте етапи проведення експериментальних досліджень.
7. Назвіть головні задачі експерименту.

8. Дайте визначення терміну „параметр оптимізації”.

9. Які вимоги ставляться до параметра оптимізації?

10. Дайте визначення терміну „фактор”.

11. Які вимоги ставляться до факторів?

12. Що називається рівнями фактора?

13. Дайте визначення та наведіть приклад інтервалу варіювання фактора.

14. Які обмеження потрібно враховувати під час вибору інтервалу варіювання фактора?

15. Як залежить кількість дослідів в експерименті від числа рівнів фактора? Наведіть формулу для розрахунку.

16. Дайте визначення факторного простору.

9 ОПРАЦЮВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ STATISTICA

9.1 Статистичний аналіз в середовищі STATISTICA

Статистичний аналіз даних є невід'ємним атрибутом наукових досліджень на всіх рівнях. Оволодіння методами статистичної обробки даних експериментальних досліджень із використанням комп'ютерних технологій є важливою складовою професійної підготовки майбутнього науковця.

Всі статистичні процедури системи розділено на окремі модулі, кожен з яких об'єднує групу логічно зв'язаних між собою статистичних методів і в рамках конкретної моделі забезпечує повний і всебічний аналіз закономірностей. У кожному модулі можна виконати той чи інший спосіб обробки даних, не звертаючись до інших модулів. У системі STATISTICA такими модулями є:

– основні статистики та таблиці;
– множинна регресія;
– дисперсійний аналіз;
– багатовимірний аналіз.

Важливою характеристикою системи є наявність засобів всебічної графічної підтримки процесу обробки даних і візуалізації результатів аналізу. Графічні можливості й засоби системи унікальні. Вона охоплює сотні різних типів статистичних графіків. Сюди входять наукові, ділові, тривимірні та двовимірні в різних системах координат, спеціалізовані, статистичні графіки – гістограми, матричні, категоризовані графіки та ін.

У системі STATISTICA існує багато інструментів налаштування всіх компонентів графіків. Є можливість вибору різних типів ліній, форматів, кольорів, легенд, назв та інших атрибутів графіка.

Розглянемо на прикладі елементи обробки експериментальних даних із використанням програмного пакету STATISTICA.

Приклад. Потрібно знайти залежність виду $y = b_0 + b_1 x$ між критерієм відгуку y та фактором x_1 (табл. 9.1).

Опрацювання отриманих експериментальних даних відбувається в наступній послідовності. Необхідно створити таблицю даних (рис. 9.1.) (для прикладу таблиця буде мати дві змінні (x і y) для десяти експериментів.

Таблиця 9.1

Вихідні дані для розрахунків

№	x_1, кПа	x_2, мм	Y, с
1	48	4	0,167
2	40	4	0,092
3	48	3	0,233
4	40	3	0,183
5	44	4	0,1
6	44	3	0,183
7	48	2	0,333
8	44	2	0,269
9	40	2	0,248
10	48	4	0,167

Середнє значення x_{cp}, середньоквадратичного відхилення та області прогнозів для фактора x знаходимо за допомогою активації таблиці з даними.

	1 x_1	2 y
1	48	0,167
2	40	0,092
3	48	0,233
4	40	0,183
5	44	0,1
6	44	0,183
7	48	0,333
8	44	0,269
9	40	0,248
10	48	0,167

Рис. 9.1. Таблиця даних

Активація таблиці з даними. Перейшовши до вкладки „**Statistics**”, обираємо розділ **–** „**Basic Statistics/Tables**”, далі **–** „**Descriptive statistics**” (описові статистики) та натискаємо – **OK** (рис. 9.2).

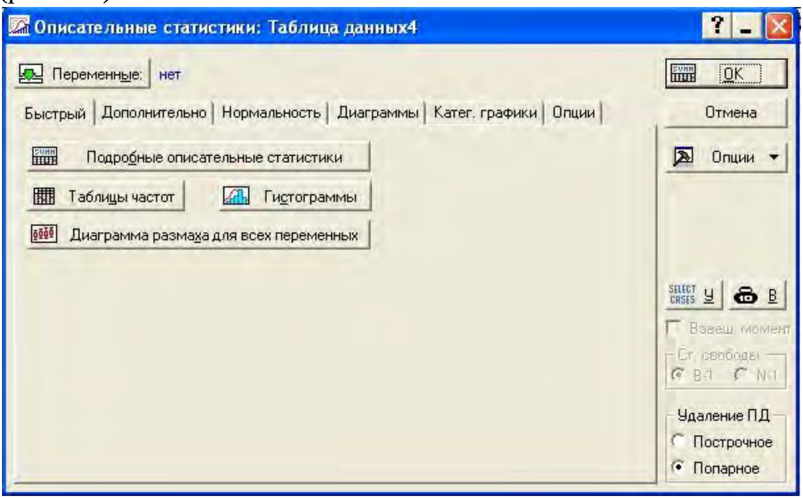


Рис. 9.2. Таблиця з даними

У діалогову вікні, що з'явилось, обираємо віконце „**Variables**" – виділити потрібну змінну (у цьому випадку *x*) та натиснути – ОК.

На вкладці „**Advanced**" виділяємо (рис. 9.3) „***Mean***" (середнє значення), „***Standard Deviation***" (середнє квадратичне відхилення), „***Minimum*** і ***Maximum***" (мінімальне і максимальне значення) – ***Summary***.

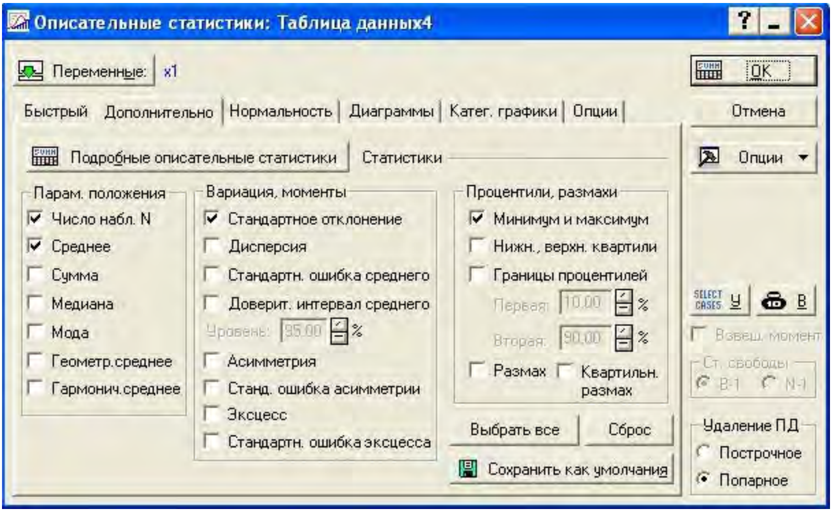


Рис. 9.3. Діалогове меню „описова статистика"

Потрібна таблиця автоматично вставляється в авто звіт (рис. 9.4).

	Описательные статистики (Вихідні данні)				
Переменная	N набл.	Среднее	Минимум	Максимум	Стд.откл.
x_1	10	44,40000	40,00000	48,00000	3,502380

Рис. 9.4. Результати аналізу

Графік та рівняння прямої регресії (виду $y = b_0 + b_1 x$) знаходимо за допомогою виконання наступних дій. Необхідно активувати таблицю з даними: **Graphs – Scatterplots** (графіки – точкові графіки) – **Variables** (виділити аргумент *x* та функцію *y*) натиснути – **OK**. На вкладці **Advanced** вибрати опції **Regular, Linear fit, Regression bands – Off** натиснути **– OK** та отримати графік залежності, як це показано на рисунку 9.5.

Щоб зробити прогноз у точці x_{cp}=44,4 і, наприклад, у точці 42, потрібно виконати такі дії:

1) додати в таблиці два рядки, у яких *у* стовпці x_1 додати числа 44,4 і 42;

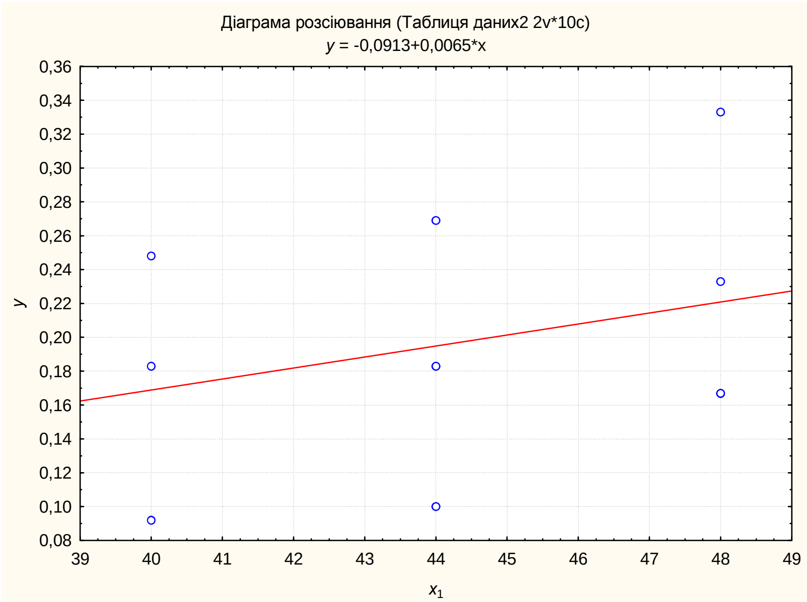


Рис. 9.5. Графічна залежність часу y від величини тиску x_1

2) додати в таблиці 3-й стовпець **Y_REGR**. Подвійним натиском клавіші на миші по імені стовпця **Y_REGR** увійти у вікно редагування стовпця. У вікні **Long Name** (унизу екрана) вписати формулу =-0,0913+0,0065*x_1 (рівняння регресії), і натиснути ОК. У стовпці **Y_REGR** з'являться значення *y*, розраховані за рівнянням прямої регресії y=-0,0913+0,0065*x* для всіх *x*, перерахованих в 1-му стовпці, зокрема й для значень 0,673 і 1,5 (рис. 9.6);

	1 x_1	2 y	3 Y _REGR
1	48	0,167	0,2207
2	40	0,092	0,1687
3	48	0,233	0,2207
4	40	0,183	0,1687
5	44	0,1	0,1947
6	44	0,183	0,1947
7	48	0,333	0,2207
8	44	0,269	0,1947
9	40	0,248	0,1687
10	48	0,167	0,2207
11	44,4		0,1973
12	42		0,1817

Рис. 9.6. Результати прогнозування

9.2 Вибір моделі однофакторної регресії

Вибір оптимальної моделі однофакторної регресії передбачає виконання таких етапів дослідження:

– знайти графік і рівняння прямої регресії;

– знайти розрахункове значення критерію відгуку y для усіх значень фактора x за лінійною моделлю;

– знайти графік і рівняння експонентної регресії;

– знайти розрахункове значення критерію відгуку y для усіх значень фактора x за нелінійною моделлю;

– знайти відхилення лінійного та експоненціального прогнозів у відсотках;

– знайти квадрати відхилень для нелінійної моделі;

– знайти суму квадратів залишків для нелінійної моделі;

– знайти суму квадратів залишків для лінійної моделі;

– вибрати оптимальну модель.

Розглянемо кожний з етапів.

	1 x_1	2 y	3 LIN_PR
1	48	0,167	0,2207
2	40	0,092	0,1687
3	48	0,233	0,2207
4	40	0,183	0,1687
5	44	0,1	0,1947
6	44	0,183	0,1947
7	48	0,333	0,2207
8	44	0,269	0,1947
9	40	0,248	0,1687
10	48	0,167	0,2207

Рис. 9.7. Результати прогнозування

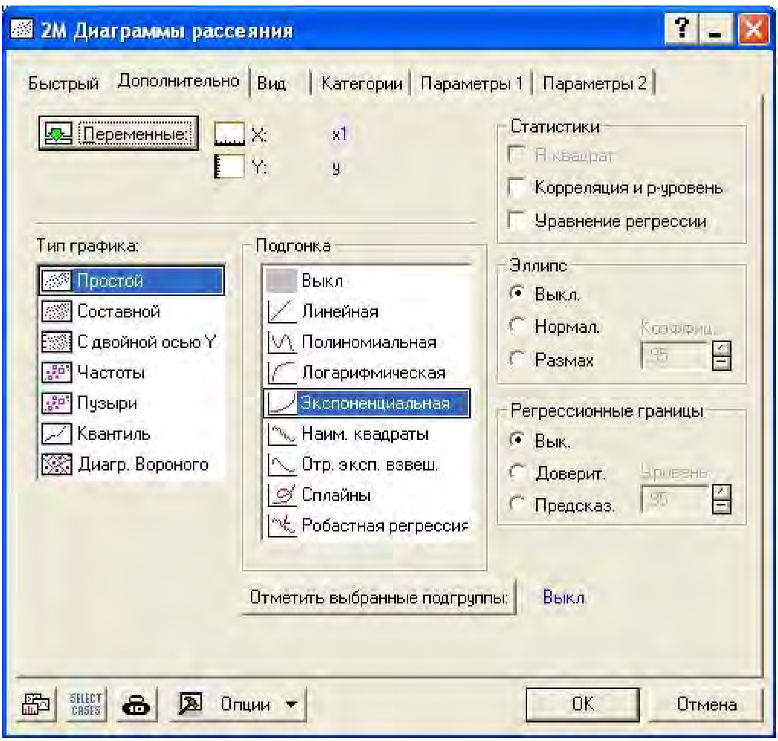


Рис. 9.8. Діалогове меню „описова статистика”

1) Графік та рівняння прямої регресії, розрахункове значення критерію відгуку *y*, для кожного значення фактора *x*, знаходять аналогічно як у пункті 9.1.

2) Графік та рівняння експонентної регресії отримують подібно до графіка і рівняння лінійної регресії. Експоненту модель STATISTICA будуємо автоматично.

Активація таблиці. Для активації таблиці необхідно вибрати пункт меню „**Craphs – Scatterplots**” **–** (Графіки, точковий графік). У діалоговому вікні, що з’явиться, задати змінні „**Variables**” (для аргументу – *x* і функції – *y*). Перейшовши на вкладку „**Advanced**”, обрати тип графіка „**Regular**” (простий), тип підгонки „**Exponential**” (експоненційний) (рис. 9.8) та натиснути – **Ok**.

З'явиться графік експонентної регресії, над яким записане рівняння регресії (рис. 9.9). Отримане рівняння експонентної регресії y=0,0348*exp^{0,0375*x}.

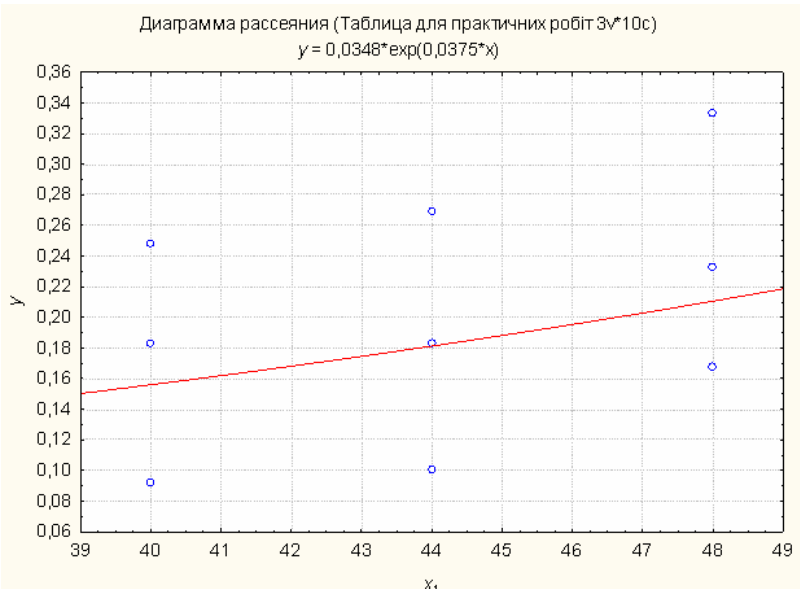


Рис. 9.9. Графічна залежність часу y від величини тиску x_1 (експонентна регресія)

3) Знаходження прогнозу за експонентною (нелінійною) моделлю проходить наступним чином:

– викликаємо вікно редагування „**NELIN_PR**";

– у вікні „**Long Name**" (внизу екрана) вписати формулу y=0,0348*exp(0,0375*x) та натиснути – **Ok**.

Таблиця набуде наступного вигляду (рис. 9.10).

4) Для знаходження відхилення між лінійним та експонентним прогнозами у відсотках потрібно додати в таблицю змінну „**RASH**" (формула =(LIN_PR-NELIN_PR)/ LIN_PR*100).

	1 x_1	2 y	3 LIN_PR	4 NELIN_PR
1	48	0,167	0,2207	0,21052773
2	40	0,092	0,1687	0,15596278
3	48	0,233	0,2207	0,21052773
4	40	0,183	0,1687	0,15596278
5	44	0,1	0,1947	0,1812029
6	44	0,183	0,1947	0,1812029
7	48	0,333	0,2207	0,21052773
8	44	0,269	0,1947	0,1812029
9	40	0,248	0,1687	0,15596278
10	48	0,167	0,2207	0,21052773

Рис. 9.10. Результати прогнозу за експонентною (нелінійною) моделлю

Таблиця набуде наступного вигляду (рис. 9.11).

	1 x_1	2 y	3 LIN_PR	4 NELIN_PR	5 RASH
1	48	0,167	0,2207	0,21052773	4,609093
2	40	0,092	0,1687	0,15596278	7,55022
3	48	0,233	0,2207	0,21052773	4,609093
4	40	0,183	0,1687	0,15596278	7,55022
5	44	0,1	0,1947	0,1812029	6,932256
6	44	0,183	0,1947	0,1812029	6,932256
7	48	0,333	0,2207	0,21052773	4,609093
8	44	0,269	0,1947	0,1812029	6,932256
9	40	0,248	0,1687	0,15596278	7,55022
10	48	0,167	0,2207	0,21052773	4,609093

Рис. 9.11. Результати відхилення

5) Розрахунок квадратів відхилень для нелінійної регресії. У таблицю (рис. 9.11) необхідно додати змінну „**KV_OST**” (формула (Y-NELIN_PR)^2). Таблиця набуде наступного вигляду (рис. 9.12).

6) Розрахунок суми квадратів залишків для нелінійної регресії відбувається в такій послідовності: необхідно активувати таблицю – „**Statistics**”, перейти до – „**Basic Statistics/Tables**”, обрати – „**Descriptive Statistics**” та в меню – „**Advanced”** – залишити прапорець тільки в опції „**Sum**” – виділити змінну „**KV_OST**” – Summary (рис. 9.13).

	1 x_1	2 y	3 LIN_PR	4 NELIN_PR	5 RASH	6 KV_OST
1	48	0,167	0,2207	0,21052773	4,609093	0,001895
2	40	0,092	0,1687	0,15596278	7,55022	0,004091
3	48	0,233	0,2207	0,21052773	4,609093	0,000505
4	40	0,183	0,1687	0,15596278	7,55022	0,000731
5	44	0,1	0,1947	0,1812029	6,932256	0,006594
6	44	0,183	0,1947	0,1812029	6,932256	3,230E-6
7	48	0,333	0,2207	0,21052773	4,609093	0,014999
8	44	0,269	0,1947	0,1812029	6,932256	0,007708
9	40	0,248	0,1687	0,15596278	7,55022	0,008471
10	48	0,167	0,2207	0,21052773	4,609093	0,001895

Рис. 9.12. Результати обчислення квадратів відхилень

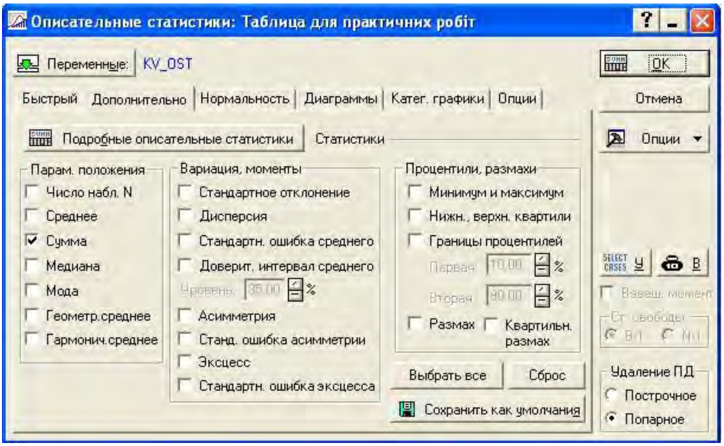


Рис. 9.13. Діалогове меню „описова статистика”

Отримуємо суму квадратів залишків для нелінійної моделі (рис. 9.14).

Переменная	Описова статистика
	Сумма
KV_OST	0,046892

Рис. 9.14. Результати обчислень суми квадратів

7) Суму квадратів залишків лінійної моделі знаходимо як суму доданків виду (Y-LIN_PR)^2, де „**LIN_PR**” = 1,265+0,573*X. Однак суму квадратів залишків лінійної моделі простіше знайти за допомогою модуля „**Multiple Regression. Statistics**”, обравши **–** „**Multiple Regression**”, необхідно вказати змінні **– „Variables**” (Dependent Y – Independent X) та натиснути – **OK**, потім – „**Advanced**”, обрати – „**ANOVA**” (Overall goodness of fit) та натиснути – **OK**. Сума квадратів залишків лінійної моделі (Residual) дорівнює 0,7726 (рис. 9.15).

Эффект	Дисперсионный анализ; ЗП: *y* (Таблица для практи				
	Сумма квадрат	сс	Средн. квадрат	F	p-уров.
Регресс.	0,004670	1	0,004670	0,820472	0,391506
Остатки	0,045531	8	0,005691		
Итого	0,050201				

Рис. 9.15. Сума квадратів залишків

8) Рішення про остаточний вибір моделі приймаємо за сумою квадратів залишків. Оскільки сума квадратів залишків для лінійної моделі 0,04553, що є менше, ніж сума квадратів залишків для експонентної моделі 0,04689 – вибираємо лінійну модель.

Рівняння лінійної регресії y = -0,0913+0,0065$\cdot x$.

Рівняння експонентної регресії y = 0,0348*exp$^{0,0375\cdot x}$.

Неправильний вибір моделі (експонентна замість лінійної) спричинить максимальне відхилення розрахункового значення критерію відгуку від експериментального 7,55% у точці x= 40.

9.3 Перевірка однофакторної лінійної регресії на адекватність

Вибір оптимальної моделі однофакторної регресії передбачає виконання наступних кроків:

– Знаходження коефіцієнта кореляції, коефіцієнта детермінації, значення критерію Фішера, кількості ступенів вільності критеріїв Фішера і Стьюдента.

– Знаходження коефіцієнтів рівняння лінійної регресії b_0 і b_1 .

– Розрахунок значення критерію Стьюдента для коефіцієнтів b_0 і b_1.

– Знаходження критичного значення критерію Стьюдента з рівнем значимості α = 0.05.

– Перевірка статистичної значимості коефіцієнтів b_0 і b_1.

– Знаходження критичного значення критерію Фішера з рівнем значимості α = 0,05.

– Перевірка лінійної моделі на адекватність за допомогою критерію Фішера.

– За значенням коефіцієнта кореляції зробити висновок про близькість зв'язку до лінійного.

Розглянемо кожний з етапів.

Розрахунки проводимо для прикладу, поданого в пункті 9.1.

1) Знаходження коефіцієнта кореляції, коефіцієнта детермінації, значення критерію Фішера, кількість ступенів вільності критеріїв Фішера і Стьюдента проводиться з використанням модуля „**Multiple Regression**" (множинна регресія) в меню „**Statistics**". В діалоговому вікні, яке з'явилось, потрібно задати змінні – „**Variables**" – (залежна змінна dependent *y* – незалежна змінна independent *x*) та натиснути – **Ok** – **Advanced** – **Summary**: Regression results (підсумки регресійного аналізу) (рис. 9.16).

У таблиці, що з'явилася, знаходяться всі потрібні відомості: коефіцієнт кореляції (R)=0,305, коефіцієнт детермінації (R2)=0,093, значення критерію Фішера F = (F(1,8))=8,205, кількість ступенів вільності критерію Фішера: k_1=1 і k_2=8, кількість ступенів вільності критерію Стьюдента (t(8)): k=8.

N=10	Итоги регрессии для зависимой переменной: *y* (Таблица) R= ,30499020 R2= ,09301902 Скорректир. R2= ----- F(1,8)=8,2047 p<,39151 Станд. ошибка оценки: ,07544					
	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	B	Стд.Ош. B	t(8)	p-уров.
Св.член			-0,091261	0,319683	-0,285473	0,782533
x_1	0,304990	0,336709	0,006504	0,007180	0,905799	0,391506

Рис. 9.16. Результати розрахунку коефіцієнтів

2) Знайдемо коефіцієнти рівняння лінійної регресії b_0 і b_1. У стовпці **B** таблиці „**Regression Summary**” (результати регресії) знаходяться значення параметрів: b_0 = -0,091261, b_1 = 0,006504 (рис. 9.16).

3) Для перевірки значимості коефіцієнтів b_0 і b_1 використовуються значення критерію Стьюдента для кожного коефіцієнта. Ці значення знаходяться у стовпці t(8) таблиці „**Regression Summary**”: $t_{набл}(b_0)$ = -0,285473, $t_{набл}(b_1)$ = 0,905799 (рис. 9.16).

4) Знайдемо критичне значення критерію Стьюдента з рівнем значимості α = 0,05. У меню „**Statistics**” потрібно вибрати команду **– „Probability Calculator**” далі **– Distributions**, вказати тип розподілу **– t(Student)** (статистика – підрахунок імовірності – розподіл – t-розподіл). З’явиться діалогове вікно імовірнісного калькулятора (рис. 9.17).

У віконце **df** (ст. віл.) необхідно внести число ступенів вільності 8 у віконце **p** внести рівень значимості (в нашому випадку дорівнює 0,05), натиснути **Compute** (підрахунок).

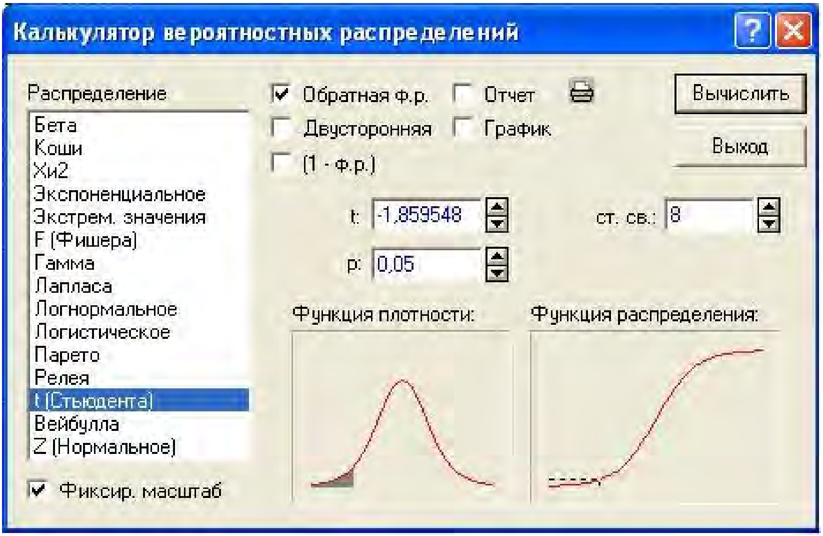


Рис. 9.17. Калькулятор імовірнісних розподілів

5) Визначаємо статистичну значимість коефіцієнтів рівняння лінійної регресії b_0 і b_1. Оскільки розрахункові значення критерію Стьюдента для кожного коефіцієнта $t_{набл}(b_0)$ = 0,285473 і $t_{набл}(b_1)$ = 0,905799 більші критичного (табличного) значення t(8) = -1,859548, то коефіцієнти b_0 = -0,091261, b_1 = 0,006504 статистично значимі.

6) Критичне значення критерію Фішера з рівнем значимості α = 0,05 (рис. 9.18) визначається аналогічно, як і для критерію Фішера. У меню „**Statistics**" потрібно вибрати команду **– „Probability Calculator**" далі **– Distributions**, вказати тип розподілу **– F (Fisher)** (статистика – підрахунок імовірності – розподілу – F(Fisher)).

У діалоговому вікні (рис. 9.18) у вікнах **df1**, **df2** внести числа ступенів вільності 1 та 8, у вікні **p** вказати рівень значимості гіпотези – 0,05, натиснути **Compute** (підрахунок). Значення критерію Фішера F(1,8)=5,318.

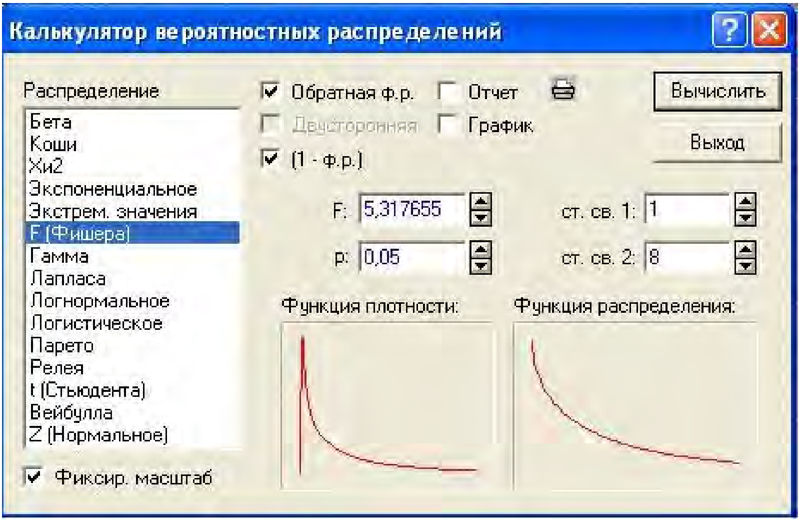


Рис. 9.18. Обчислення критичного значення критерію Фішера

7) Перевірка лінійної моделі на адекватність за допомогою критерію Фішера. Оскільки розрахункові значення критерію Фішера $F_{набл}$ = (F(1, 8))=8,2 більші критичного (табличного) значення F(1,8) =5,318 – лінійна модель адекватна.

8) Висновок про близькість зв'язку до лінійного. Коефіцієнт кореляції R = 0,783 належить до діапазону (0,6; 0,9). Лінійний зв'язок достатній.

9.4 Перевірка факторів на мультиколінеарність. Вибір моделі багатофакторної регресії

Перевірка факторів на мультиколінеарність та вибір моделі багатофакторної регресії передбачає виконання таких кроків:

– перевірка факторів x_1 і x_2 на мультиколінеарність;

– побудова двох моделей: лінійної та степеневої моделі Кобба-Дугласа, при рівні значимості α=0,05 перевірка коефіцієнти рівнянь на значимість, та адекватності моделі;

– за мінімумом суми квадратів залишків вибрати оптимальну модель.

Розглянемо детально кожен з етапів перевірки на прикладі, поданому на рисунку 9.19.

1) Перевірка факторів на мультиколінеарність. Оскільки факторів лише два, їх варто перевіряти на колінеарність за значенням парного коефіцієнта кореляції r_{x1x2}. Для цього створюємо кореляційну таблицю. Активація таблиці даних здійснюється в наступній послідовності: у меню – „**Statistics**" активуємо модуль **– „Basic Statistics/Tables**", та обираємо **– Correlation matrices,** натискаємо **– OK**, та вказуємо **– Two lists(rect.matrix) – x_1 –x_2** (вказуємо фактори) та натискаємо **– OK**, потім **– Summary**: Correlation matrix, з'являється кореляційна таблиця (рис. 9.20).

	1 x_1	2 x_2	3 y
1	48	4	0,167
2	40	4	0,092
3	48	3	0,233
4	40	3	0,183
5	44	4	0,1
6	44	3	0,183
7	48	2	0,333
8	44	2	0,269
9	40	2	0,248
10	48	4	0,167

Рис. 9.19. Дані для розрахунків

	Кореляції (Таблиця для практичних робіт) Відмічені кореляції значимі на рівні p <,05000 N=10 (Підлаштувальне видалення ПД)
Змінна	x_2
x_1	0,13

Рис. 9.20. Кореляційна таблиця

Парний коефіцієнт кореляції становить r_{x1x2} = 0,13.

Статистична значимість коефіцієнта перевіряється за допомогою критерію Стьюдента. Потрібно знайти розрахункове значення критерію Стьюдента: $t_{набл} = r_{x1x2}\,((n-2)/(1- r_{x1x2}^{2}))^{0,5} = 0{,}371$

Критичне (табличне) значення $t_{кр}$ визначається за допомогою імовірнісного калькулятора при рівні значимості α = 0,05 та числі ступенів свободи *n*-2=8 (див. пункт 9.3): t(8)=-1,8595; p=0,05.

Отже, $t_{кр}$ = -1,86.

Оскільки ($t_{роз}$) < $t_{кр}$, коефіцієнт кореляції статистично не значимий. Отже, фактори x_1 і x_2 неколінеарні.

2) Будуємо дві моделі: лінійну $y=b_0+b_1x_1+b_2x_2$ та ступеневу модель Кобба-Дугласа $y = Ax_1^{a1} \cdot x_2^{a2}$. Перевіримо коефіцієнти рівнянь на значимість і адекватність моделі.

Спочатку знайдемо рівняння лінійної регресії. Для оцінки коефіцієнтів лінійної регресії b_0, b_1 і b_2 необхідно виділити таблицю даних, для цього у меню „**Statistics**” обираємо модуль **– Multiple Regression** (Множинна регресія), вказуємо змінні **– „Variables” –** (dependent *y* – independent x_1, x_2) та натискаємо – **Ok – Ok – Summary: Regression results** (вибір змінних *y*, x_1, x_2– **Ok** – **Ok** – Підсумки регресійного аналізу) (рис. 9.21).

У стовпці **B** (рис. 9.21) потрібно взяти параметри b_0, b_1, b_2.

Результати регресії для залежної змінної: *y* (Таблиця для практичних робіт)
R= ,98238766 R2= ,96508552 Скоректов. R2= ,95510995
F(2,7)=96,745 p<,00001 Станд. помилка оцінки: ,01582

N=10	БЕТА	Стд.Пм. БЕТА	B	Стд.Ош. B	t(7)	p-рівень
Віл.член			0,041474	0,067800	0,6117	0,560062
x_1	0,427846	0,071233	0,009123	0,001519	6,0063	0,000539
x_2	-0,941892	0,071233	-0,080340	0,006076	-13,2227	0,000003

Рис. 9.21. Таблиця оцінки лінійної регресії

Перевіримо параметри b_0, b_1, b_2 на значимість. Для цих параметрів розрахункові значення критерію Стьюдента, задані в стовпці *t*(7): $t_{роз}$ (b_0)=0,6117, $t_{роз}$(b_1)=6,0063, $t_{роз}$(b_2)=-13,2227. Критичне (табличне) значення критерію Стьюдента з рівнем значимості α=0,05 та числом ступенів вільності *k*=7 знаходимо за допомогою імовірнісного калькулятора (див. Пункт 9.3): $t_{кр}(7)$=-1,894579. Оскільки лише для двох коефіцієнтів b_1 і b_2 abs($t_{спост}$)>$t_{кр}$, лише два коефіцієнти значимі. Лінійне рівняння регресії:

$$y = 6{,}0063x_1 - 13{,}2227x_2. \qquad (9.1)$$

Для перевірки рівняння на адекватність у шапці таблиці беремо розрахункове значення критерію Фішера, $F_{роз} = F(2,7)$ = 96,745, число ступенів вільності критерію Фішера: $k_1 = 2$ і $k_2 = 7$. $F_{кр}$ знаходимо з рівнем значимості α = 0,05, використовуючи імовірнісний калькулятор: $F_{кр} = F(2,7)$= 0,051671 (див. пункт 9.3). Оскільки $F_{роз} > F_{кр}$, рівняння лінійної регресії адекватне.

Знайдемо рівняння нелінійної (степеневої) регресії. Щоб знайти рівняння степеневої моделі, потрібно:

а) зробити лінеаризацію вибірки за формулами: $V = \ln(y)$, $U1 = \ln(x_1)$, $U2 = \ln(x_2)$;

б) знайти рівняння лінійної регресії для змінних: V, $U1$, $U2$;

в) повернутися до вихідних змінних: y, x_1, x_2.

Лінеаризуємо вибірку. Додаємо нові змінні і обчислюємо їхні значення за наведеними формулами (рис. 9.22).

	1 x_1	2 x_2	3 y	4 U1	5 U2	6 V
1	48	4	0,167	3,871201	1,386294	-1,78976
2	40	4	0,092	3,688879	1,386294	-2,38597
3	48	3	0,233	3,871201	1,098612	-1,45672
4	40	3	0,183	3,688879	1,098612	-1,69827
5	44	4	0,1	3,78419	1,386294	-2,30259
6	44	3	0,183	3,78419	1,098612	-1,69827
7	48	2	0,333	3,871201	0,693147	-1,09961
8	44	2	0,269	3,78419	0,693147	-1,31304
9	40	2	0,248	3,688879	0,693147	-1,39433
10	48	4	0,167	3,871201	1,386294	-1,78976

Рис. 9.22. Результати лінеаризації вибірки

У програмному пакеті Statistica натуральний логарифм ln(x) записується: log(x).

Рівняння лінійної регресії для змінних V, $U1$, $U2$ отримуємо аналогічно, як для змінних y, x_1, x_2: необхідно виділити таблицю даних. У меню „**Statistics**” вибрати модуль **–** „**Multiple Regression**” (Множинна регресія), вказати – „**Variables**” – (dependent V – independent U1, U2) та натиснути – **Ok – Ok – Summary: Regression results** (вибір змінних Y, $X1$, $X2$ – Ok – Ok – Підсумки регресійного аналізу) (рис. 9.23).

У стовпці **B** (рис. 9.23) взяти параметри b_0, b_1, b_2.

N=10	Підсумки регресії для залежної змінної: V (Таблиця для практичних робіт) R= ,94791594 R2= ,89854462 Скоректований R2= ,86955737 F(2,7)=30,998 p<,00033 Станд. помилка оцінки: ,14804					
	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	B	Стд.Ош. B	t(7)	p-рівень
Віл.член			-8,69358	2,350189	-3,69910	0,007664
U1	0,427347	0,121292	2,19816	0,623894	3,52329	0,009685
U2	-0,899747	0,121292	-1,21897	0,164325	-7,41804	0,000147

Рис. 9.23. Підсумки регресійного аналізу

Усі коефіцієнти значимі з рівнем значимості α=0,05, оскільки ($t_{роз}$) > $t_{кр}$. Отримане рівняння регресії має вигляд:

$$V = -3{,}6991+3{,}52329U1-7{,}41804U2. \qquad (9.2)$$

Перевіряємо лінеаризовану модель на адекватність. Розрахункове значення критерію Фішера становить $F_{роз}$ = 30,998 для числа ступенів вільності критерію Фішера k_1=2 і k_2=7. F_{kr} знаходимо з рівнем значимості α = 0,05, використовуючи імовірнісний калькулятор: F(2;7) = 0,051671.

Оскільки $F_{роз} > F_{кр}$, лінеаризована модель адекватна.

Повернемося до вихідних параметрів:

$$A=e^{b_0},\ b_1=a_1,\ b_2=a_2,$$

$$y = 0{,}0248x_1^{3{,}52329}\cdot x_2^{-7{,}41804}.$$

3) Обираємо оптимальну модель за мінімумом суми квадратів залишків.

Суму квадратів залишків лінійної моделі знаходимо, як у пункті 9.2: „**Analysis of Variance**” (аналіз залишків) і в таблиці, що з'явилася (рис. 9.24), у рядку „**Residual**” (залишок) отримуємо суму квадратів залишків 0,001753.

Ефект	Дисперсійний аналіз; ЗП: y (Таблиця для практичних робіт_3)				
	Сума квадрат	сс	Середн. квадрат	F	p-рівень
Регресс.	0,048448	2	0,024224	96,74494	0,000008
Залишки	0,001753	7	0,000250		
Підсумок	0,050201				

Рис. 9.24. Результати розрахунку суми квадратів залишків

Для розрахунку квадратів залишків ступеневої моделі доповнюємо таблицю двома стовпцями (рис. 9.25):

Y_NELIN= 0,0248*$x_1^{3,52329*}x_2$^(-7,41804),

та

KV_OST_ NELIN =(Y_NELIN-Y)^2.

	1 x_1	2 x_2	3 y	4 U1	5 U2	6 V	7 (_NELIN	8 OST_NEL
1	48	4	0,167	3,871201	1,386294	-1,78976	0,710963	0,295896
2	40	4	0,092	3,688879	1,386294	-2,38597	0,373997	0,079523
3	48	3	0,233	3,871201	1,098612	-1,45672	6,006861	33,33747
4	40	3	0,183	3,688879	1,098612	-1,69827	3,159869	8,861749
5	44	4	0,1	3,78419	1,386294	-2,30259	0,523247	0,179138
6	44	3	0,183	3,78419	1,098612	-1,69827	4,420868	17,95952
7	48	2	0,333	3,871201	0,693147	-1,09961	121,5905	14703,38
8	44	2	0,269	3,78419	0,693147	-1,31304	89,48691	7959,835
9	40	2	0,248	3,688879	0,693147	-1,39433	63,96186	4059,456
10	48	4	0,167	3,871201	1,386294	-1,78976	0,710963	0,295896

Рисунок 9.25 – Результати розрахунку залишків для ступеневої моделі

Суму квадратів залишків ступеневої моделі знаходимо аналогічно, як у пункті 9.2: **Statistics – Basic Statistics/Tables – Descriptive Statistics – Advanced** – залишити прапорець лише в опції ***Sum*** – виділити змінну **KV_OST_NELIN** – **Summary** (рис. 9.26).

Змінна	Описова статистика (Таблиця для практичних робіт_3)
	Сума
KV_OST_NELIN	26783,68

Рис. 9.26. Результати розрахунку суми квадратів залишків ступеневої моделі

9.5 Дисперсійний аналіз

Проведення дисперсійного аналізу в програмному пакеті STATISTICA здійснюється за допомогою модуля ANOVA.

Приклад. Провести дисперсійний аналіз з використанням модуля ANOVA в програмному пакеті STATISTICA для експериментальних даних (табл. 9.1).

Алгоритм виконання дисперсійного аналізу такий.

1. Необхідно створити таблицю даних розмірністю 3x16. Перша змінна буде призначена для фіксації значення фактора x_1 (тиску), друга – фіксації значення фактора x_2 (діаметра), третя – для фіксації критерію відгуку y (тривалості часу) (рис. 9.27).

	1 x_1	2 x_2	3 y
1	48	4	0,167
2	40	4	0,092
3	48	3	0,233
4	40	3	0,183
5	44	4	0,1
6	44	3	0,183
7	48	2	0,333
8	44	2	0,269
9	40	2	0,248

Рис. 9.27. Початкові дані для проведення дисперсійного аналізу

2. У пункті меню „**Statistics**” потрібно вибрати модуль „**ANOVA**”, який призначений для проведення процедури як однофакторного, так і багатофакторного дисперсійного аналізу. Внаслідок цього буде відкрито стартове вікно модуля (рис. 9.28).

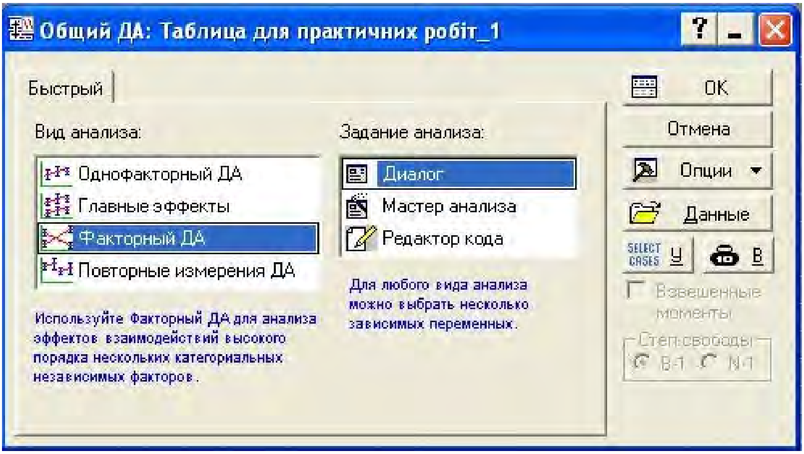


Рис. 9.28. Стартова вікно модуля ANOVA

Спочатку проведемо процедуру однофакторного дисперсійного аналізу. Для цього встановимо тип аналізу „**One-way ANOVA**” (Однофакторний ДА) і метод „**Quick specs dialog**” (Діалог). Відкриється вікно установки змінних та опцій аналізу (рис. 9.28).

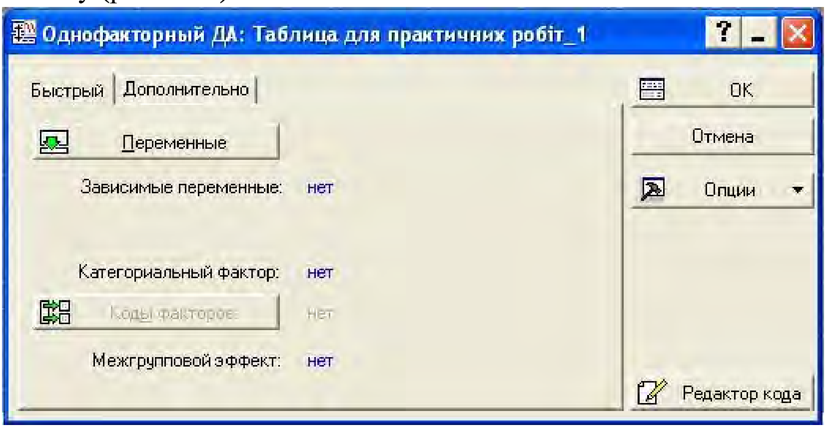


Рис. 9.29. Вікно встановлення змінних та опції аналізу

У діалоговому вікні вибираємо факторну змінну „x_1”, та критерій відгуку – „y” (рис. 9.30).

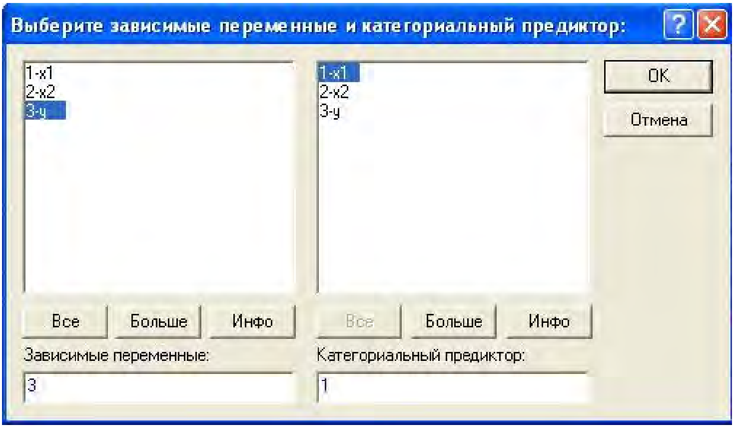


Рис. 9.30. Вікно вибору змінних для аналізу

Після вибору досліджуваних ознак відкриється вікно результатів аналізу (рис. 9.31).

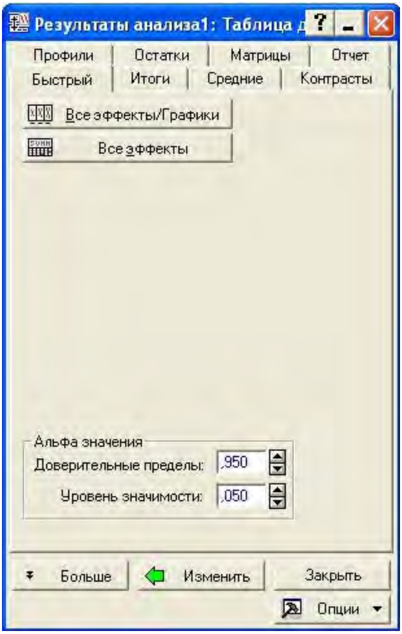


Рис. 9.31. Вікно результатів аналізу

Залишаємо рівень значимості "**Significance level**" рівним α=0,05 для розрахунку компонент варіації та перевірки гіпотези з використанням критерію Фішера (рис. 9.32).

Ефект	Одномерний критерій значимості для *y* (Таблиця для практичних робіт) Сігма-обмеження параметризація Декомпозиція гіпотези SS	Степені свободи	MS	F	p
Віл. член	0,363207	1	0,363207	53,76421	0,000329
x_1	0,008634	2	0,004317	0,63900	0,560298
Неврахованi фактори	0,040533	6	0,006756		

Рис. 9.32. Вікно результатів однофакторного дисперсійного аналізу

– Система розрахувала компоненти "Сума квадратів" (**SS**) Q_1^2 =0,0086 та Q_2^2 =0,0405 загальної варіації Q^2, які зумовлені фактором – "x_1 (величина тиску)" та неврахованих факторів.

– Визначила число ступенів свободи (**Degr. of Freedom**) кожної компоненти. Зокрема, для компоненти варіації, зумовленої факторною змінною, число ступенів свободи дорівнює m–1=2, а для компоненти, зумовленої неврахованими факторами, число ступенів вільності – $m(n–1)$=6.

– Розрахувала величини "Середній квадрат" (**MS**) $Q_1^2/(m-1) = 0{,}0043$ та $Q_2^2/m(n-1) = 0{,}0068$ відповідно.

– Розрахувала величину критерію Фішера, $F = \dfrac{Q_1^2/(m-1)}{Q_2^2/m(n-1)} = 0{,}639$ та визначила імовірність $\boldsymbol{p}$ = 0,560296, з правдивою гіпотезою H_0, величина F може прийняти такі ж або більші значення. Оскільки ця вірогідність істотно більше рівня значимості α=0,05, то гіпотезу про значимість впливу фактора "x_1 (величина тиску)" на тривалість часу можна не приймати.

4. Проведемо аналіз багатофакторного дисперсійного аналізу (на прикладі двофакторного ДА).

У стартовому вікні модуля „**ANOVA**" встановимо тип аналізу „**Main effects ANOVA**". У діалоговому вікні виберемо залежну змінну і незалежні фактори (рис. 9.33).

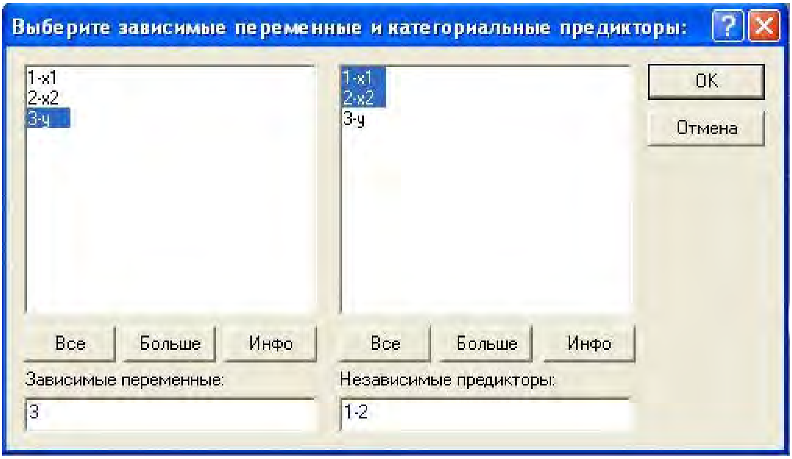


Рис. 9.33. Вікно результатів двофакторного дисперсійного аналізу

На рисунку 9.34 приведено встановлення рівнів незалежних факторів.

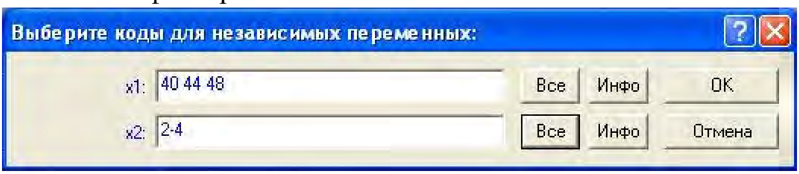


Рис. 9.34. Вікно встановлення рівнів незалежних факторів

У вікні результат аналізу залишаємо рівень значимості рівним α=0,05, після чого відкривається вікно із результатами розрахунку компонентів варіації та перевірки гіпотез з використанням критерію Фішера (рис. 9.35).

Ефект	Одномерний критерій значимості для *y* (Таблиця для практичних робіт) Сігма-обмеження параметризація Декомпозиція гіпотези				
	SS	Степені свободи	MS	F	p
Віл. член	0,363207	1	0,363207	4193,539	0,000000
x_1	0,008634	2	0,004317	49,841	0,001488
x_2	0,040187	2	0,020093	231,996	0,000073
Невраховані чинники	0,000346	4	0,000087		

Рис. 9.35. Вікно результатів двофакторного дисперсійного аналізу

– Система розрахувала компоненти "**Сума квадратів**" Q_1^2 =0,0402 та Q_2^2 =0,000346 загальної варіації Q^2 зумовлені вибраними і неврахованими чинниками.

– Визначила число ступенів свободи кожної компоненти. Зокрема для компоненти варіації, зумовленої фактором "x_1 (величина тиску)", число ступенів свободи дорівнює m–1=2, для компоненти, зумовленої фактором "x_2 (діаметр)", число ступенів свободи дорівнює n–1=2, а для компоненти, зумовленої неврахованими чинниками, число ступенів свободи дорівнює (m–1)(n–1)=4.

– Розрахувала величини "**Середній квадрат**" (**MS**) $Q_1^2/(m-1) = 0{,}0043$, $Q_2^2/(n-1) = 0{,}02$ та $Q_3^2/((m-1)(n-1)) = 0{,}000087$ відповідно.

– Розрахувала значення критерію Фішера $F_A = \dfrac{Q_1^2/(m-1)}{Q_3^2/(m-1)(n-1)} = 49{,}841$; $F_B = \dfrac{Q_2^2/(n-1)}{Q_3^2/(m-1)(n-1)} = 231{,}996$ та визначила відповідні значенням F_A і F_B з імовірністю p_A=0,001488 і p_B=0,000073 того, що за справедливості гіпотез H_0 величини F_A і F_B можуть досягти такого ж або більшого значення.

Оскільки імовірність p_A і p_B істотно менші рівня значимості α=0,05, то гіпотезу про значимість впливу факторів "x_1 величина тиску" і "x_2 діаметр" на y тривалість часу необхідно прийняти.

9.6 Кореляційно-регресійни аналіз

Вихідними даними для проведення кореляційно-регресійного аналізу в середовищі STATISTICA є значення тривалості часу y, отриманими при трьох значеннях тиску x_1 та при трьох значеннях діаметру x_2 (табл. 9.2).

Розглянемо детально кожен з етапів проведення кореляційно-регресійного аналізу:

Таблиця 9.2

Вихідні дані для розрахунків

№	x_1	x_2	y
1	48	4	0,167
2	40	4	0,092
3	48	3	0,233
4	40	3	0,183
5	44	4	0,1
6	44	3	0,183
7	48	2	0,333
8	44	2	0,269
9	40	2	0,248

1) Створюємо таблицю даних розмірністю 3x16. Перша змінна файлу буде призначена для фіксації значення тиску x_1, друга – фіксації значення діаметру x_2, третя – для фіксації тривалості часу y (рис. 9.36).

	1 x_1	2 x_2	3 y
1	48	4	0,167
2	40	4	0,092
3	48	3	0,233
4	40	3	0,183
5	44	4	0,1
6	44	3	0,183
7	48	2	0,333
8	44	2	0,269
9	40	2	0,248

Рис. 9.36. Початкові дані для виконання практичної роботи

2) Побудова кореляційної матриці і діаграми розсіювання. В меню модуля „**Основи статистики і таблиці**” необхідно вибрати пункт „**Парні і часткові кореляції**” “**Correlation matrices**” (рис 9.36).

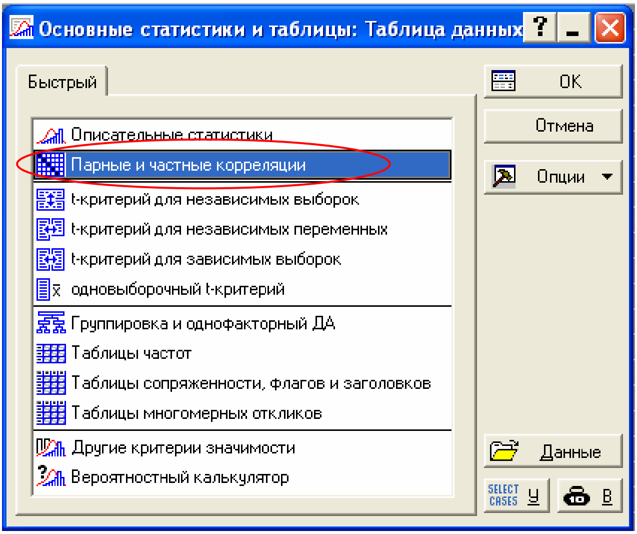


Рис. 9.37. Меню модуля „Основи статистик і таблиці”

Після вибору цієї процедури відкриється діалогове вікон „**Кореляція Пірсона**” (рис. 9.38).

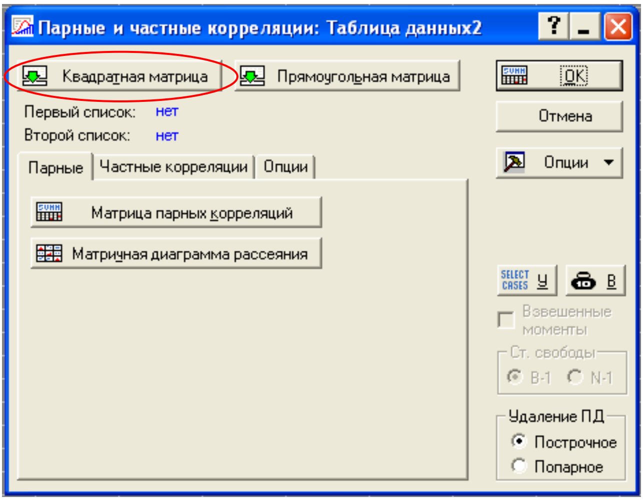


Рис.9.38. Діалогове вікно „Кореляція Пірсона”

Вибір змінних можливий як у вигляді квадратної матриці (один список), так і прямокутної матриці (два списки). Для спрощення розрахунків виберемо усі змінні для аналізу (рис. 9.39).

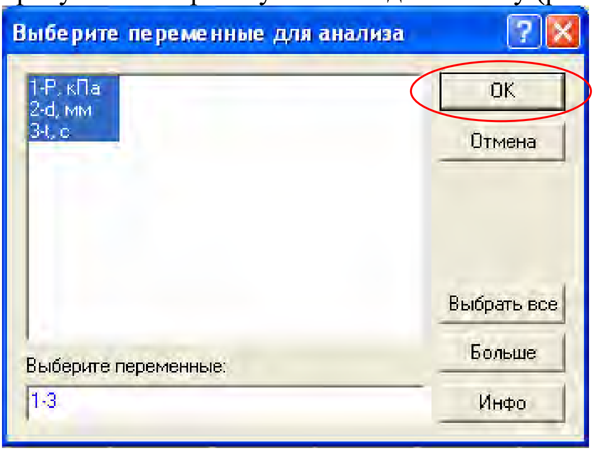


Рис. 9.39. Вибір змінних

Після вибору змінних, необхідно натиснути „**ОК**” для повернення в діалогове вікно „**Кореляція Пірсона**”, в якому для одержання результато також натискаємо „**ОК**” (рис. 9.40).

	Кореляція (Таблиця даних) Відмічені кореляції значимі на рівні p <,05000 N=9 (Построкове видалення ПВ)		
Змінна	P, кПа	d, мм	t, c
P, кПа	1,00	0,00	0,39
d, мм	0,00	1,00	-0,90
t, c	0,39	-0,90	1,00

Рис. 9.40. Кореляційна матриця

Дві інші опції діалогового вікна „**Кореліця Пірсона**” дозволяють отримати таблицю даних із коефіцієнтом кореляції, а також більш детальними статистичними відомостями (наприклад: *p* – значення, число пар *N*, r^2 – коефіцієнт детермінації, *t* – значення і інші).

Для візуалізації значення кореляцій між змінними можна побудувати графік кореляції. Якщо натиснути правою клавішею мишки на відповідний коефіцієнт кореляції, з’явиться меню (рис. 9.41).

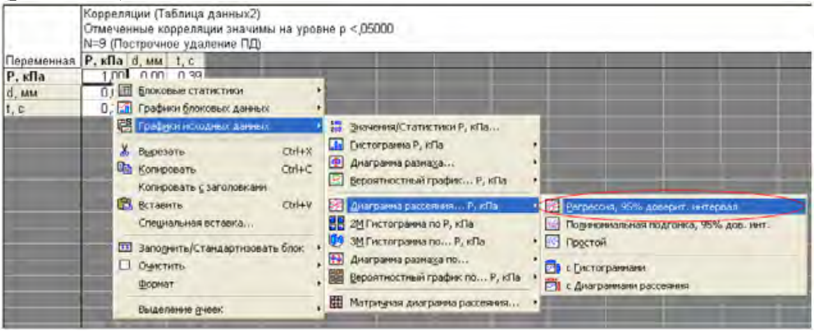


Рис. 9.41. Меню побудови діаграми розсіяння для коефіцієнта кореляції

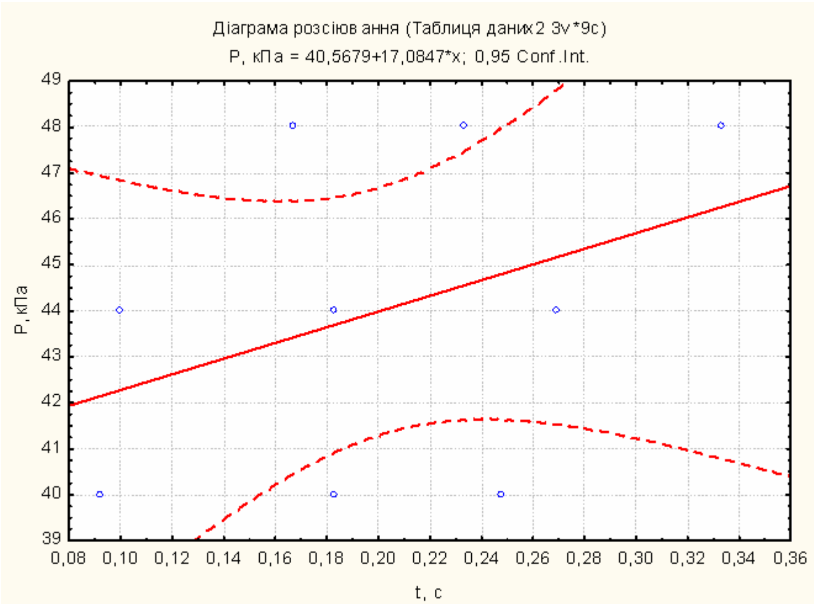


Рис. 9.42. Діаграма розсіювання коефіцієнта кореляції

Перейшовши в підменю **„Графіки вихідних даних”** вибираємо **„Діаграма розсіювання”**.

Отримаємо графік з параметрами, заданими за замовчуванням (діаграма розсіювання для вибраного коефіцієнта з прямою регресією, 95%-ва довірча полоса і рівняння регресії в заголовку (рис. 9.42).

3) **Множинна регресія**. Необхідно відкрити модуль **Multiple Regression** (Множинна регресія). На екрані з'явиться діалогове вікно модуля (рис. 9.43).

*Рис. 9.43. Діалогове вікно „**Множинна регресія**"*

В діалоговому вікні вибору змінних (рис. 9.44) вказуємо залежні та незалежні змінні та натискаємо **OK**.

Вікно результатів аналізу має таку структуру:

- **Інформаційне поле** – у верхній частині діалогового вікна (рис. 9.45). Складається з двох частин. В першій міститься інформація про результати оцінювання. В другій висвітлені значимі регресій ні коефіцієнти.

- **Функціональні кнопки** – в нижній частині діалогового вікна (рис. 9.45). Дозволяють переглянути результати аналізу.

Розглянемо інформацію, яка міститься у верхній частині діалогового вікна (рис. 9.45):

Dependent – ім'я залежної змінної – в нашому випадку **y**.

No. of cases – число спостережень (дослідів) за результатами яких побудована регресія.

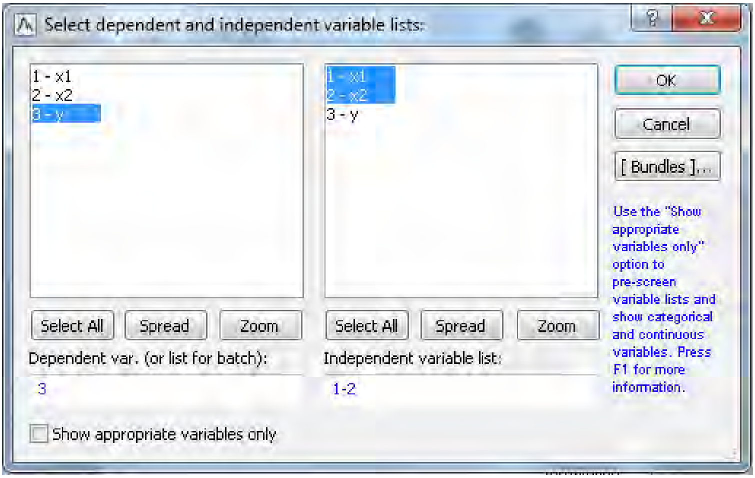


*Рис. 9.44. Діалогове вікно „**Вибір змінних**”*

Multiple R – коефіцієнт множинної кореляції.

R? – квадрат коефіцієнта множинної кореляції (коефіцієнт детермінації).

Adjusted R? – скоректований коефіцієнт детермінації:

$$AdjustedR2 = 1 - (1 - R2) \cdot (n/(n - p)), \qquad (9.3)$$

де n – число спостережень (дослідів);

p – число параметрів моделі (число незалежних змінних + 1, оскільки в моделі присутній вільний член).

Standard error of estimate – стандартна помилка оцінки. Оцінка розсіювання дослідних значень відносно регресійної прямої.

Intercept – оцінка вільного члена регресії. Значення коефіцієнта $\boldsymbol{b_0}$ в рівняння регресії.

Std. Error – стандартна помилка оцінки вільного члена. Стандартна помилка коефіцієнта $\boldsymbol{b_0}$ в рівнянні регресії.

t (df) and p-value значення ***t***-критерію та рівень р. ***t***-критерій використовується для перевірки гіпотези про рівність вільного члена регресії нулю.

F – значення *F*-критерію.

df – число степенів свободи *F*-критерію.

p – рівень значимості.

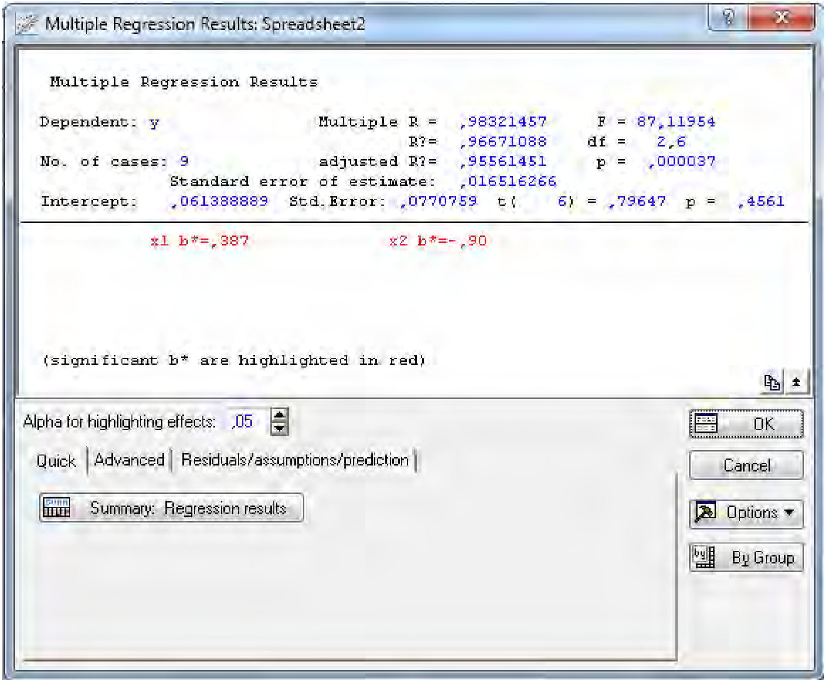


*Рис. 9.45. Діалогове вікно „**Оцінки результатів**”*

Натиснувши кнопку „**Summary: Regression Results**” (Результат регресії) на екрані з’явиться підсумкова таблиця регресії (рис. 9.46).

N=9	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	B	Стд.Ош. B	t(6)	p-уров.
	Результати регресії для залежної змінної: t,c (Таблиця даних) R= ,98321457 R2= ,96671088 Скоректов. R2= ,95561451 F(2,6)=87,120 p<,00004 Станд. помилка оцінки: ,01652					
Св.член			0,061389	0,077076	0,7965	0,456107
P, кПа	0,386640	0,074486	0,008750	0,001686	5,1908	0,002033
d, мм	-0,904002	0,074486	-0,081833	0,006743	-12,1365	0,000019

Рис. 9.46. Підсумкова таблиця регресії

В першому стовпці таблиці (рис. 9.46) подані значення коефіцієнтів **beta (b*)** – стандартизований коефіцієнт регресії рівняння, в другому **beta (b)** – стандартні помилки, в третьому точкові оцінки параметрів моделі.

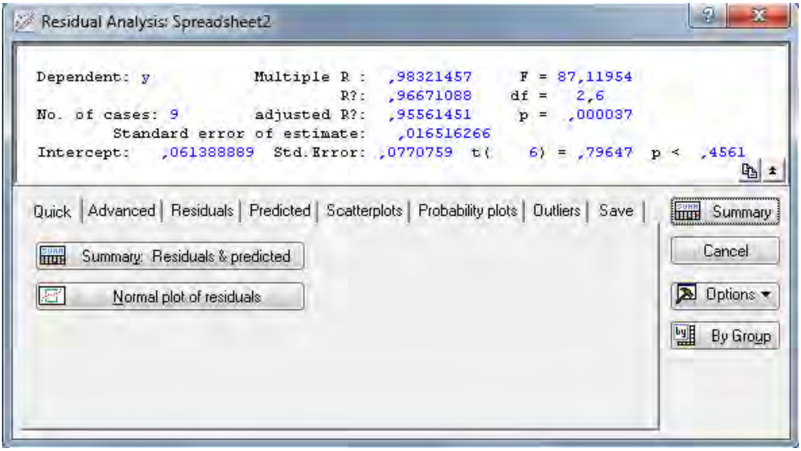


*Рис. 9.47. Діалогове вікно **„Residual Analysis”***

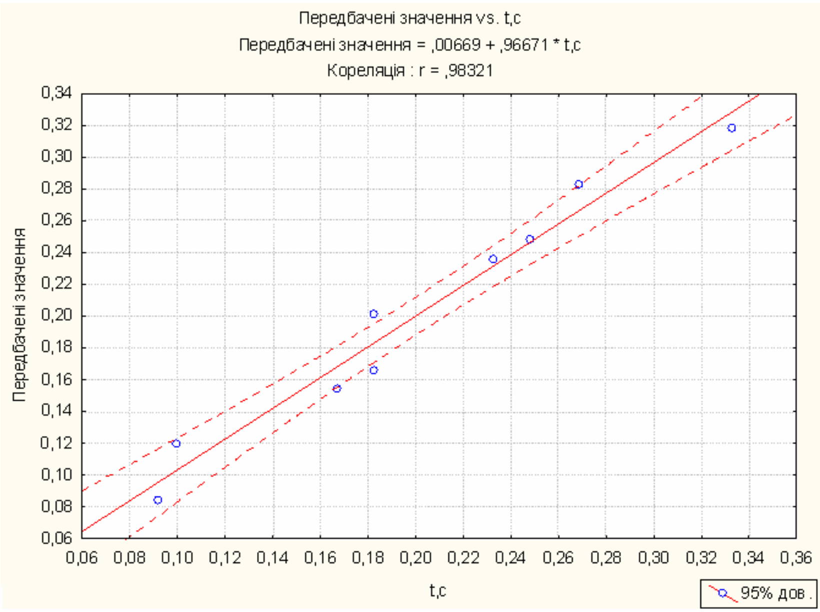


Рис. 9.48. Графік дослідні змінні - залишки

4) **Оцінка адекватності моделі.** Важливо оцінити адекватність отриманої моделі. Аналіз адекватності ґрунтується

на основі аналізу залишків (різниця між дослідними значеннями та отриманими за допомогою моделі).

В STATISTICA в модулі **Multiple Regression (Multiple Regression** → вкладка **Residuals/assumptious/prediction)** є спеціальне діалогове вікно для аналізу залишків **– Residual Analysis** (рис. 9.47).

Натиснувши в діалоговому вікні (рис. 9.47) кнопку **Residuals** і на екрані з'явиться графік (рис. 9.48), який говорить про достатню адекватність моделі.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як визначити середнє значення фактора?
2. Що таке вибіркова дисперсія отриманих експериментальних даних?
3. Як отримати значення прогнозу в довільній точці?
4. Що таке рівняння регресії?
5. Як отримати рівняння прямої регресії?
6. Як створити автозвіт?
7. Як отримати рівняння експонентної регресії?
8. Як обчислити суму квадратів залишків для нелінійної моделі?
9. З використанням якого модуля можна знайти суму квадратів залишків для лінійної моделі?
10. Як визначити розрахункове значення t – критерію?
11. Як визначити розрахункове значення F – критерію?
12. Як визначити дисперсію адекватності?
13. Як визначити табличне значення t – критерію?
14. Як визначити табличне значення F – критерію?
15. Завдання кореляційного аналізу?
16. Для чого призначене діалогове вікно „Кореляція Пірсона"?
17. Як побудувати кореляційну матрицю дослідних даних?
18. Як отримати діаграму розсіювання коефіцієнта кореляції? Про що вона говорить?

10 ПІДСИЛЮВАЧІ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ В ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

10.1 Загальна схема підсилювача

Дослідження будь-якого технічного об’єкта, для вибору оптимальної структури та параметрів на стадії проектування, потребує математичного опису. Побудові емпіричної моделі передує отримання теоретичної моделі.

Порівняння результатів експериментального дослідження з теоретичною залежністю дає змогу пояснити суть досліджуваного явища та показати переваги експерименту.

Для прикладу розглянемо підсилювач з позитивним та негативним зворотними зв’язками. Схема підсилювача зібрана на інтегральній мікросхемі серії К140УД6 (рис. 10.1). Вхідний сигнал U_{BX} подається на інвертуючий вхід. Від’ємний зворотний зв'язок створюється за допомогою опору R_1 та R_2. Опори R_3 та R_4 створюють додатній зворотний зв'язок, який за певних співвідношень між опором підвищує коефіцієнт підсилення за напругою схеми:

$$K_U = \frac{U_B}{U_{BX}}. \tag{10.1}$$

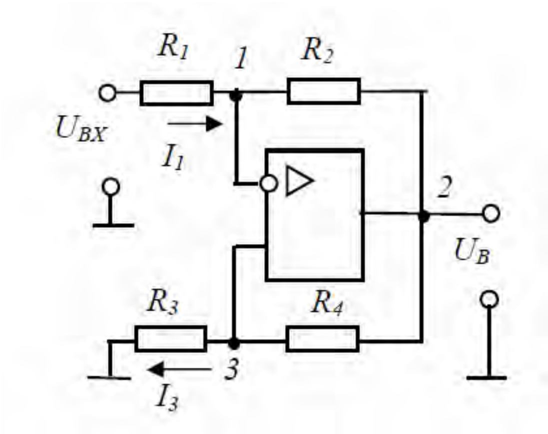


Рис. 10.1. Підсилювач з негативним та позитивним зворотними зв'язками

Задача дослідження полягає в отриманні та аналізі коефіцієнта підсилення K_U як функції опору негативної та позитивної зворотних зв'язків. Також потрібно порівняти теоретичну та емпіричну залежність K_U від опору R_1, R_2, R_3, R_4. Належить врахувати, що залежно від параметрів негативного та позитивного зворотних зв'язків коефіцієнт підсилення K_U змінюється в широких межах, а за деяких значень опору схема може виявитись непрацездатною.

Розв'язання окресленої задачі дослідження полягає в отриманні та порівнянні теоретичної та емпіричної моделей підсилювача.

10.2 Теоретична модель підсилювача

Виводячи залежність $K_U = f\left(R_1, R_2, R_3, R_4\right)$, для схеми зібраної на операційному підсилювачі, потрібно прийняти наступні допуски:

– коефіцієнт підсилення в розімкнутому стані та його вхідні опори безкінечно великі.

Відповідно потенціали в точках 1, 3 (рис. 10.1) однакові:

$$\varphi_1 = \varphi_3, \tag{10.2}$$

а вхідний струм підсилювача рівний нулю.

На основі закону Ома запишемо рівняння:

$$\varphi_1 = U_{BX} - I_1 R_1, \tag{10.3}$$

$$\varphi_3 = I_3 R_3. \tag{10.4}$$

Струми I_1, I_3 також визначаються на основі закону Ома:

$$I_1 = \left(U_{BX} - U_B\right)/\left(R_1 + R_2\right), \tag{10.5}$$

$$I_3 = U_B/\left(R_3 + R_4\right). \tag{10.6}$$

Підставивши в рівняння (10.3), (10.4) вирази для струмів (10.5), (10.6), з врахуванням відношення (10.2) отримаємо рівняння, що пов'язує вихідну та вхідну напруги:

$$U_B - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left(U_{BX} - U_B\right) = \frac{R_3}{R_3 + R_4} U_B. \tag{10.7}$$

Після перетворення відношення (10.7) отримаємо формулу для визначення коефіцієнта підсилення:

$$R_U = \frac{U_B}{U_{BX}} = \frac{1 + R_3/R_4}{\left(R_3/R_4\right) - \left(R_1/R_2\right)}. \tag{10.8}$$

Вираз (10.8) є загальним, оскільки з нього можна отримати відомі відношення коефіцієнтів підсилення за напругою для інвертуючих та неінвертуючих підсилювачів. При $R_4 = \infty$ (розімкнутий додатній зворотний зв'язок) знаходимо коефіцієнт підсилення для інвертуючого підсилювача:

$$R_{\overline{U}} = \frac{-R_2}{R_1}. \tag{10.9}$$

при $R_2 = \infty$ (розімкнутий від'ємний зворотним зв'язок) отримуємо коефіцієнт підсилення для неінвертуючого підсилювача:

$$R_U^+ = \frac{1 + R_4}{R_3}. \tag{10.10}$$

Підсилювач стабільно працює за негативних значень K_U, тобто умову роботи визначає нерівність:

$$R_1 / R_2 > R_3 / R_4 . \qquad (10.11)$$

Підвищення коефіцієнта підсилення K_U забезпечується малими значеннями знаменників формули (10.8), але при цьому потрібно враховувати, що під дією дестабілізуючих факторів чи стандартних відхилень параметрів опорів може порушитись нерівність (10.11). На рисунку 10.2 приведено залежності K_U від відношень R_3 / R_4 із $R_1 / R_2 = \text{const}$.

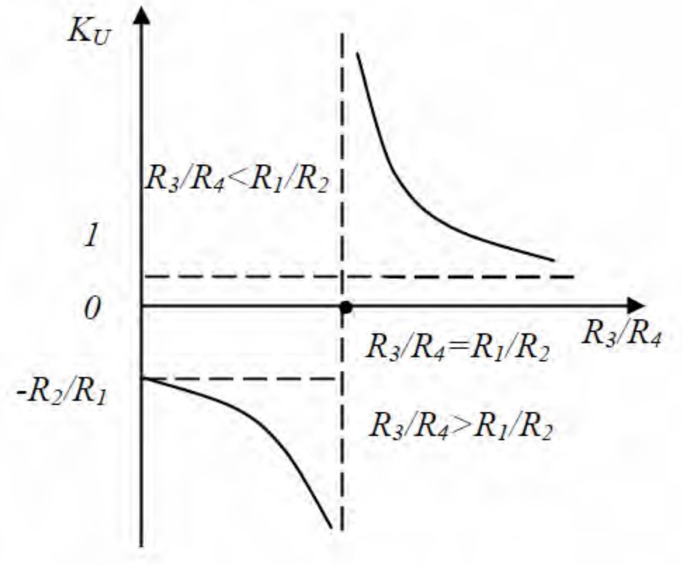


Рис. 10.2. Залежність коефіцієнта підсилення за напругою від параметрів схеми

За умови:

$$R_1 / R_2 = R_3 / R_4 , \qquad (10.12)$$

коефіцієнт підсилення приймає безпосереднє значення $\pm\infty$, тобто має місце розрив функції. В області, де $K_U < 0$, із зменшенням відношення R_3 / R_4 абсолютна величина K_U

зменшується. При $R_3 / R_4 = 0$ модуль досягає найменшого значення, що визначається виразом (10.9). За $R_3 / R_4 > R_1 / R_2$ підсилювач непрацездатний. Тому область досліджень задається нерівністю (10.11).

10.3 Емпірична модель підсилювача

Критерієм відгуку було прийнято коефіцієнт підсилення за напругою. Факторами – опори негативного та позитивного зворотних зв'язків R_1, R_2, R_3, R_4. Метою експерименту є побудова експериментальної залежності $K_U = f\left(R_1, R_2, R_3, R_4\right)$. Результати експерименту дають змогу оцінити, на скільки реальний коефіцієнт підсилення K_U відрізняється від теоретичного, та якою мірою відхилення значень факторів R_1, R_2, R_3, R_4 від номінальних значень буде впливати на зміну значення критерію відгуку K_U.

Коефіцієнт підсилення в процесі експериментальних досліджень визначався як відношення вихідного та вхідного значення напруги за формулою (10.2). Напруга вимірюється за допомогою комбінованого цифрового приладу, в якого відносна похибка δ_0 вимірювання постійної напруги визначається у відсотковому виразі:

$$\delta_0 = \pm\left[0,5 + 0,5\left(\frac{U_N}{U_X} - 1\right)\right], \tag{10.13}$$

де U_N – межа вимірювань,

U_X – виміряне значення.

Відхилення температури на напруги живлення від номінальних значень зумовлюють додаткову похибку, яка згідно з паспортними даними становить:

$$\delta_Д = 1,5\delta_0. \tag{10.14}$$

Загальна похибка засобу вимірювання становить:

$$\delta = \delta_Д + \delta_0. \qquad (10.15)$$

Величини варіювання опорів встановлюються за допомогою вимірних магазинів опорів із похибкою (%):

$$\delta_R = \pm\left[0{,}2 + 6\cdot 10^{-6}\left(\frac{R_N}{R_X} - 1\right)\right], \qquad (10.16)$$

де R_N – найбільше значення опору магазину (100 кОм),

R_X – номінальне значення увімкненого опору.

Вибір інтервалів варіювання та кодування факторів.

Інтервали варіювання факторів визначаються у попередньому експерименті із умов суттєвого впливу на критерій відгуку (коефіцієнт підсилення). У таблиці 10.1 наведено рівні варіювання факторів та їх кодові значення.

Таблиця 10.1

Рівні варіювання факторів та їх кодові значення

Фактор	Позначення	Розмірність	Рівні факторів			Інтервал варіювання ε
			верхній	нульовий	нижній	
			Кодові значення			
			+1	0	-1	
R_1	x_1	кОм	10,5	10	9,5	0,5
R_2	x_2	кОм	530	500	470	30
R_3	x_3	кОм	11	10	9	1
R_4	x_4	кОм	1200	1100	1000	100

Матриця ДФЕ 2^{4-1} для трьох факторів подана в таблиці 10.2.

Опрацювання результатів експерименту.

Результат експерименту отриманий діленням вихідної напруги (покази вольтметра) на вхідну напругу U_{BX} = 13 мВ. Повторні вимірювання показують ідентичні результати, тому в кожній стрічці плану проводимо лише одне вимірювання критерію відгуку. Дисперсію відтворюваності визначаємо за метрологічними характеристиками засобів вимірювання. Основну та додаткову похибки вимірювань вольтметра визначаємо за формулами (10.13) – (10.15). В експерименті вхідна напруга була U_N = 2 В, $U_B \approx 1 \div 1{,}5$, В. Основна відносна похибка приладу становить – δ_0 = ±1%, додаткова – $\delta_Д$ = 2,5%.

Таблиця 10.2

Матриця плану та результати ДФЕ 2^{3-1}

№ досліду	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1\, x_3$	$x_2\, x_3$	$x_3\, x_4$	y	$\tilde{y}$	$y-\tilde{y}$
1	+	-	+	-	-	+	-	+	110,0	110,7	-0,7
2	+	+	-	-	-	-	+	+	73,8	74,1	-0,3
3	+	-	-	+	-	-	-	-	107,6	107,7	-0,1
4	+	+	+	+	-	+	+	-	112,3	111,5	0,8
5	+	-	-	-	+	+	+	-	77,7	76,5	1,2
6	+	+	+	-	+	-	-	-	80,0	80,3	-0,3
7	+	-	+	+	+	-	+	+	113,8	113,9	-0,1
8	+	+	-	+	+	+	-	+	76,5	77,3	-0,8
9	-	0	0	0	0	0	0	0	91,5	94,0	-2,5

Відповідно, абсолютна похибка вимірювань:

$$\Delta U = \delta U_X / 100\%, \tag{10.17}$$

де U_X – максимальне значення вихідної напруги.

В нашому випадку ΔU = ±0,04 В. Для довірчої імовірності Р = 0,95 величина довірчого інтервалу $|\Delta U| = 2S_U$, де S_U – помилка відтворюваності результату вимірювання вихідної напруги (S_U = 0,02 В).

Оскільки коефіцієнт підсилення визначається непрямим методом, середньоквадратичне відхилення результатів вимірювань (помилка експерименту $S(y)$), яке визначається за формулою (10.18), дорівнює $S(y) \approx 1{,}5$.

$$S(y) = K_U^0 \frac{S_U}{U_B^0} = \frac{S_U}{U_{BX}}. \tag{10.18}$$

Значення коефіцієнтів рівняння регресії (10.19), розраховані за формулами (лекція 8), такі: b_0 = 94; b_1 = -8,2; b_2 = 10,1; b_3 = 8,6; b_4 = -7; b_{13} = 9,15; b_{23} = 0,44; b_{34} = -0,44;

$$\begin{gathered} \tilde{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_{13} x_1 x_3 + \\ + b_{23} x_2 x_3 + b_{34} x_3 x_4 \end{gathered}. \tag{10.19}$$

Перевірка значимості коефіцієнтів рівняння регресії (10.19) проводиться за допомогою довірчого інтервалу шириною:

$$2\Delta b = t_T S_b = 1{,}86 \cdot 0{,}5 = 0{,}93,$$

де S_b – помилка визначення коефіцієнтів рівняння регресії (S_b = 0,5).

Табличне значення t-критерію Стьюдента визначається для рівня значимості α = 0,05 та числа ступенів вільності fn=N = 8.

Оскільки коефіцієнти, які описують взаємодію факторів, виявились статистично незначними, рівняння регресії прийме вигляд:

$$\tilde{y} = 94 - 8{,}2x_1 + 10{,}1x_2 + 8{,}6x_3 - 7x_4. \tag{10.20}$$

Аналіз рівняння (10.20) показав, що коефіцієнт підсилення зменшується із збільшенням опорів R_1, R_4 та збільшується із збільшенням опорів R_2, R_3, що відповідає теоретичним висновкам (10.8).

Потрібно перевірити адекватність отриманої математичної моделі (10.20) результатам експерименту.

Дисперсія адекватності становить $S_{ад}^2 = 0{,}85$, дисперсія відтворюваності $S^2(y) = 2{,}25$.

Адекватність моделі оцінюємо за умовами:

$F_p \le F_T$ – модель адекватна;

$$F_p \geq F_T \text{ – модель не адекватна,} \tag{10.21}$$

де F_T – табличне значення F-критерію, визначене для заданого значення значимості і ступеня вільності головної дисперсії f_1=N-d та дисперсії адекватності f_2=N·(m-1).

Розрахункове значення критерію Фішера $F_{роз}$ визначаємо зі співвідношення:

$$F_{роз} = \frac{S^2_{ад}}{S^2_г}. \tag{10.22}$$

Оскільки розрахункове значення критерію Фішера $F_{роз}$ = 2,647 менше табличного значення, виконується умова $F_p \leq F_T$, тому рівняння (10.20) адекватно описує критерій відгуку.

Отримана модель дає змогу розрахувати величини коефіцієнтів впливу факторів на коефіцієнт підсилення та визначити числові характеристики K_U як випадкової величини залежно від діапазону опорів резисторів.

Перейдемо в рівнянні (10.20) від кодованих значень факторів до фізичних змінних.

$$\tilde{y} = 94 - 8{,}2\frac{R_1 - R_1^0}{\Delta R_1} + 10{,}1\frac{R_2 - R_2^0}{\Delta R_2} + 8{,}6\frac{R_3 - R_3^0}{\Delta R_3} - 7\frac{R_4 - R_4^0}{\Delta R_4}. \tag{10.23}$$

де R_i^0 – основні рівні (номінальні) опору,

ΔR_i – інтервали варіювання.

Підставляючи числові значення R_i^0 та ΔR_i в рівняння (10.23), отримаємо:

$$\begin{aligned} \tilde{y} = 80{,}7 - 1640 \cdot 10^{-5} R_1 + 33{,}7 \cdot 10^{-5} R_2 + \\ + 860 \cdot 10^{-5} R_3 - 7 \cdot 10^{-5} R_4 \end{aligned}. \tag{10.24}$$

або в загальному вигляді:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3 + a_4 R_4. \tag{10.25}$$

На відміну від b-коефіцієнтів в рівнянні (10.20), a-

коефіцієнти в рівняння (10.25) є розмірними величинами (Ом$^{-1}$).

Аналіз рівняння (10.24) показав, що найбільше впливають на коефіцієнт підсилення опори R_1 та R_3.

За рівняння моделі можна досліджувати параметричну надійність та будувати допуск на вихідний параметр – коефіцієнт підсилення за напругою. Емпірична модель більше відповідає реальному об'єкту, але висновки на підставі такої моделі справедливі лише в області експерименту, що задається інтервалами варіювання факторів.

11 ПРОГРАМНО-АПАРАТНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

11.1 Аналогово-цифрові перетворювачі

Аналогово-цифрові перетворювачі (АЦП) – пристрої для перетворення вхідного аналогового сигналу у відповідний йому цифровий код, який в подальшому придатний для опрацювання з використанням ЕОМ та інших цифрових пристроїв [].

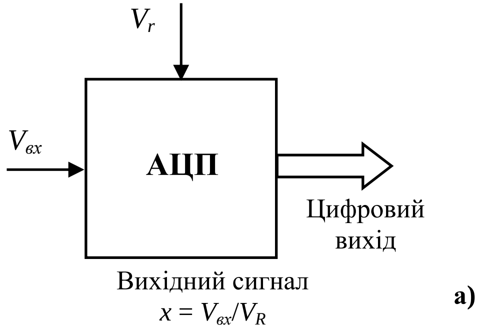
Відповідно, аналогово-цифрове перетворення полягає у встановленні відношення двох величин. Вхідний аналоговий сигнал $V_{вх}$ перетворюється в дріб x шляхом співставлення його значення із рівнем опорного сигналу V_R. Цифровий сигнал перетворювача є кодовим поданням цього дробу. Загальний вигляд цього фундаментального співвідношення приведено на рис. 11.1,а. Якщо вхідний код перетворювача є n-розрядним, число дискретних вихідних рівнів рівне 2^n. Необхідною умовою забезпечення відповідності є розбиття діапазону вхідного сигналу на таку ж кількість рівнів.

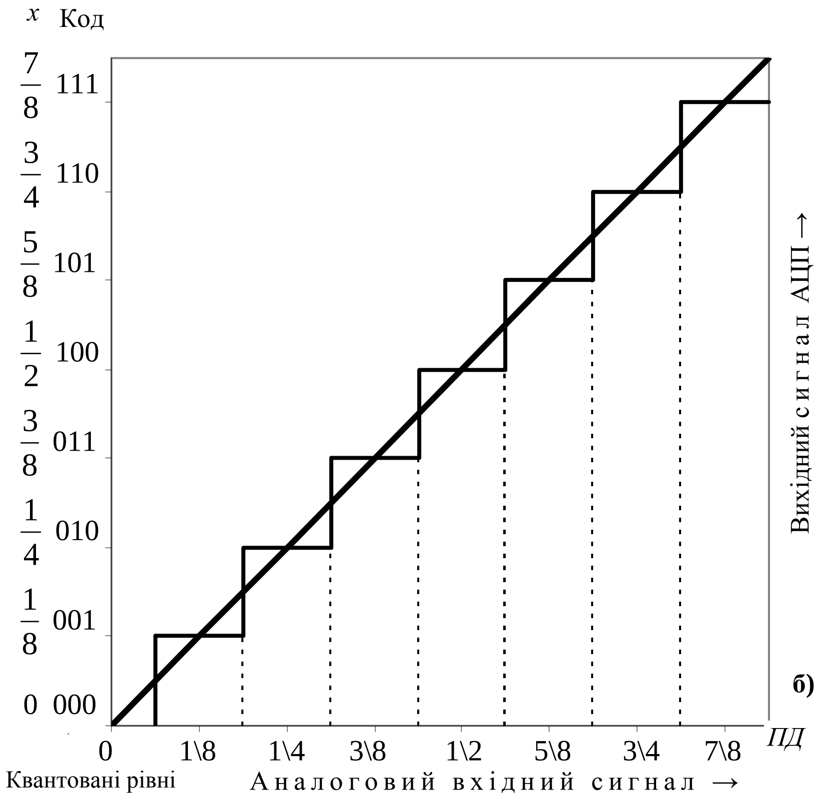
Кожен квант (величина інтервалу) такого розподілу є значенням аналогової величини, на яку відрізняється рівні вхідного сигналу (подаються двома сусідніми кодовими комбінаціями). Цей квант називають також величиною молодшого значення розряду (*МЗР*):

$$Q = МЗР = ПД/2^n , \qquad (11.1)$$

де Q – квант;

МЗР – аналоговий еквівалент МЗР;





а) – взаємозв'язок сигналів; б) – передавальна характеристика ідеального 3-розрядного АЦП

Рис. 11.1. Аналогово-цифровий перетворювач

ПД – повний діапазон зміни вхідного аналогового сигналу.

Усі аналогові величини всередині заданого інтервалу розподілу подаються одним цифровим кодом, якому ставлять у відповідність значення аналогової змінної в середній точці інтервалу (граничний рівень). Вхідний сигнал може відрізнятися від граничного рівня на величину $\pm\frac{1}{2}МЗР$, але залишатись при цьому однаковим за кодовим поданням.

Пояснюється це похибкою (невизначеністю) дискретизації процесу аналогово-цифрового перетворення ($\pm\frac{1}{2}МЗР$). Збільшуючи число розрядів у вихідному коді перетворювача дозволяє зменшити вплив похибки. На рис. 11.1,б приведено взаємозв'язок вхідних та вихідних сигналів для ідеального 3-розрядного АЦП. Величина *МЗР* рівна $\frac{1}{8}ПД$, а діапазон зміни вхідного сигналу розбита на 8 окремих рівнів (від 0 до $7/8ПД$). Аналіз (рис. 11.1,б) показує, що максимальне війкове число 111 на виході перетворювача відповідає не повному діапазону, а $\frac{7}{8}ПД$. Максимальний вихідний сигнал АЦП завжди відповідає аналоговій величині повного діапазону мінус 1 *МЗР* (враховуючи, що одна із кодових комбінацій присвоюється нульовому рівню вхідного сигналу).

11.1.1 Зовнішіні АЦП

Багатофункціональний модуль АЦП/ЦАП **Е-502** (рис. 11.2) [42].

Універсальний модуль введення/виведення аналогових та цифрових сигналів в ПК за допомогою інтерфейсів USB 2.0 (high-speed) і Ethernet (100 Мбіт) дозволяє здійснювати їх опрацювання в реальному часі.

Рис. 11.2. Загальний вигляд багатофункціонального модуля АЦП/ЦАП Е-502

Модуль обладнаний процесором Blackfin (ADSP-BF523) з тактовою частотою 530 МГц та об'ємом SDRAM 32 Мбайти.

До переваг даного модуля слід віднести наявність 2-канальної 16-бітної ЦАП з можливістю синхронізації виведення з частотою до 1 МГц на кожен канал. Основні характеристики приведені в табл. 11.1.

Таблиця 11.1

Технічні характеристики багатофункціонального модуля АЦП/ЦАП Е-502 [42]

Назва параметра	Характеристика
1	2
АЦП	
Кількість каналів	16 диференційних або 32 із „загальною землею”
Розрядність АЦП	16 біт
Піддіапазони вимірювань вхідного сигналу	±10 В, ±5 В, ±2 В, ±1 В, ±0,5 В, ±0,2 В
Максимальна частота перетворення АЦП	2 МГц (1,5 МГц синхронізуючи частоту перетворення від іншого модуля Е-502)
Стійкість до перевантажень вхідним вимірювальним сигналом напруги постійного струму	±15 В

Продовження таблиці 11.1

1	2
Кількість каналів	16 диференційних або 32 із „загальною землею”
Синхронізація	- внутрішня; - з використанням зовнішнього синхронізатора; - створення мережі декількох E-502
Захист входів	±15 В
Коефіцієнт подавлення синфазного сигналу 50 Гц з амплітудою 1 В у диференційному режимі (на піддіапазоні)	- 77 дБ (±10 В), - 83 дБ (±5 В), - 90 дБ (±2 В), - 92 дБ (±1 В), - 92 дБ (±0,5 В), - 92 дБ (±0,2 В),
Характеристики процесора	
Тип	Blackfin ADSP-BF523
Тактова частота	530 МГц
ОЗУ	32 Мбайт (SDRAM, 16 біт, 132,5 МГц)
Програмний інтерфейс з ADSP-BF523	Незалежний, через HOST DMA процесора ADSP-BF523
Основний інтерфейс роботи з периферійними засобами	SPORT0, > 120 Мбіт/с, дуплекс
Налагоджувальний інтерфейс	JTAG
Енергозалежна пам’ять	
Flash-пам'ять	2 Мб (1 Мб доступний для зберігання інформації)
Цифрові входи	
Загальна кількість цифрових TTL-сумісних входів загального призначення	17 (4 – використовуються для синхронізації)
Режим введення даних	Синхронний, асинхронний
Резисторні підтяжки до високого логічного рівня	Відсутні
Максимальна швидкість у синхронному режимі	2 МГц
Високоімпедансний стан при вимкненому живленні	Присутній

Продовження таблиці 11.1

1	2
Робочий діапазон напруги	від -0,2 до +0,6 В («логічний нуль»); від +2,4 до +3,6 В («логічна одиниця» на входах DI14 / DI_SYN2, DI15 / CONY_IN, DI16 / START_IN); від +2,4 до +5,0 В («логічна одиниця» на інших цифрових входах).
Максимальний вхідний струм за вимкненого живлення	10 мкА
Власний вхідний струм в робочому режимі (програмно ввімкнені резистині підтяжки)	10 мкА
Цифрові виходи	
Загальна кількість TTL-сумісних цифрових виходів	16
Керування третім станом виходів	Присутнє
Режим введення даних	Синхронний, асинхронний
Максимальна швидкість в синхронному режимі	1 Мслів/с
Гранично допустимий струм в колі навантаження	20 мА
Рекомендований струм в колі навантаження	не більше 8 мА
Діапазон напруги на цифрових виходах	від 0 до +0,4 В («логічний нуль»); не менше 2,4 В («логічна одиниця»), вихідні логічні елементи з напругою живлення 3,3 В.
Вихідний опір (номінальний)	110 Ом
Максимальний струм витоку в робочому режимі у високоімпедансному стані	±1 мкА
Високоімпедансний стан при вимкненому живленні	Відсутній

Продовження таблиці 11.1

1	2
Конструкційні характеристики	
Габарити	не більше 142x117x40 мм
Маса	не більше 0,3 кг.
Живлення модуля	
Блок живлення	~220 В / =12 В, не менше 0,5 А
Діапазон напруги входу низьковольтного живлення Е-502	від +8 до +30 В
Максимальна потужність споживання від джерела живлення	6 Вт
Струм споживання від кола живлення інтерфейсу USB	Незначний, менше 5 мА
Живлення зовнішніх кіл	
Виходи живлення зовнішніх аналогових та цифрових кіл	+15 В, -15 В, +3,3 В

Метрологічні характеристики багатофункціонального модуля АЦП/ЦАП Е-502 приведені в таблиці 11.2.

Таблиця 11.2

Метрологічні характеристики багатофункціонального модуля АЦП/ЦАП Е-502 [42]

Назва параметра	Характеристика
1	2
Діапазон вимірювань напруги постійного струму	від -10 до +10 В
Межі допустимої приведеної (до верхнього значення межі вимірювань) основної похибки вимірювань напруги постійного струму для меж: - 10; 5; 2 В, - 1 В, - 0,5 В, - 0,2 В.	 ±0,05%, ±0,07%, ±0,1%, ±0,2%

Продовження таблиці 11.2

1	2
Діапазон вимірювань напруги змінного струму в діапазоні частот від 0,01 до 999 кГц	від 0,2 до 7 В
Межі допустимої відносної основної похибки вимірювань напруги змінного струму	$\Delta = \pm\left[0{,}15 + 0{,}02 \cdot \left(\frac{X_{AC}}{X} - 1\right)\right]$, % де X_{AC} – межа вимірювань напруги змінного струму; X – значення вимірюваної напруги змінного струму
Вхідний опір постійному струму в одно канальному режимі роботи	не менше 20 МОм
Коефіцієнт подавлення синфазних перешкод	не менше 70 дБ
Межі допустимої відносної основної похибки частоти перетворення АЦП	±0,005 %

Спеціалізований модуль АЦП для тензовимірювань **LTR212M** (рис. 11.3) [43]. Призначений для підключення до 8 тензосенсорів опором від 100 Ом до 1 кОм. Дозволяє забезпечити точне вимірювання напруги розбалансування мостових, напівмостових, чвертьмостових резистивних сенсорів (тензосенсорів, сенсорів тиску).

Особливістю даного модуля є наявність вбудованого компенсаційного ЦАП кожного каналу АЦП для проведення програмного керування апаратною компенсацією початкового розбалансування тензосенсорів без зменшення динамічного діапазону АЦП.

Наявне джерело опорної напруги (для живлення тензосенсорів) із програмним перемиканням вихідної напруги (+2,5 В чи +5 В) постійної чи змінної та сумарним робочим струмом до 400 мА.

Основні характеристики приведені в табл. 11.3.

Рис. 11.3. Загальний вигляд спеціалізованого модуля АЦП LTR212M

Таблиця 11.3

Технічні характеристики спеціалізованого модуля АЦП LTR212M [43]

Назва параметра	Характеристика
1	2
АЦП	
Кількість каналів	4/8
Розрядність АЦП	24 біта
Піддіапазони вимірювання вхідного сигналу	±80 мВ, ±40 мВ, ±20 мВ, ±10 мВ
Вхідний опір	не менше 10 МОм
Межі допустимої основної відносної похибки (без застосування операції „Калібрування нуля”). де X_K – кінцеве значення встановленого піддіапазону вимірювань; X – показники LTR212M, В	$\pm\left[0{,}05+0{,}015\cdot\left(\frac{X_K}{X}-1\right)\right]$, % для піддіапазона ±80 мВ, 0-80 мВ, ±40 мВ
	$\pm\left[0{,}07+0{,}02\cdot\left(\frac{X_K}{X}-1\right)\right]$, % для піддіапазона ±40 мВ, 0-40 мВ, ±20 мВ
	$\pm\left[0{,}1+0{,}05\cdot\left(\frac{X_K}{X}-1\right)\right]$, % для піддіапазона ±20 мВ, 0-20 мВ, ±10 мВ

Продовження таблиці 11.3

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Діапазон синфазних напруг на вимірних входах (на “AIN+” і “AIN-”) відносно точки живлення моста “-EXP”</td><td>від +1,25В до +3,75В</td><td>За напруги живлення моста 5±0,2В</td></tr>
<tr><td>від +1,25В до +2,5В</td><td>За напруги живлення моста 2,5±0,1В</td></tr>
<tr><td>Коефіцієнт подавленн вхідних синфазних перешкод за розбалансування опорів зовнішніх вхідних кіл, рівному 1 кОм</td><td colspan="2">Не менше 100 дБ</td></tr>
<tr><td>Схеми підключення</td><td colspan="2">- до 4-х повних мостів в 4-х канальному режимі (4-х чи 6-ти провідна схема);
- до 8-х повних мостів в 8-х канальному режимі (4-х чи 6-ти провідна схема);
- до 4-х півмостів в 4-х канальному режимі (3-х провідна схема);
- до 4-х півмостів та 4-х повних мостів в 8-х канальному режимі (змішана схема);</td></tr>
<tr><td colspan="3">Амплітудно-частотні характеристики</td></tr>
<tr><td>Максимальна частота дискретизації (4-х канальний режим)</td><td colspan="2">7600 Гц для кожного каналу</td></tr>
<tr><td>Стабільність частоти перетворення одного модуля</td><td colspan="2">±50 ppm</td></tr>
<tr><td>Смуга частот пропускання сигналу на рівні -3 дБ (без цифрової фільтрації)</td><td colspan="2">2000 Гц</td></tr>
</table>

Спеціалізований високочастотний тензометричний АЦП **QMBox85-128** (рис. 11.4) виробництва R-Technology призначений дляя статичних та динамічних тензовимірювань із використанням стандартних тензосенсорів [44].

Аналіз характеристик даного пристрою (табл. 11.4) показав доцільність його використання для реєстрації та подальшого аналізу динамічних механічних навантажень та деформацій (випробування ДВЗ, турбін).

Рис. 11.4. Загальний вигляд спеціалізованого високочастотного тензометричного АЦП QMBox85-128

Таблиця 11.4

Технічні характеристики спеціалізованого високочастотного тензометричного АЦП QMBox85-128 [44]

Назва параметра	Характеристика
1	2
Кількість вимірювальних входів	128
Схема підключення сенсорів	повний міст, напівміст
Максимальна швидкість оцифрування даних (загальна)	2 МГц
Максимальна швидкість дискретизації (на канал)	250 кГц
Розрядність АЦП	16 біт
Діапазон вхідних сигналів	±35 мВ, ±25 мВ, ±10 мВ, ±5 мВ, ±2,5 мВ, програмне перемикання
Вбудоване джерело живлення сенсорів	до 25 мА на канал
Температурний дрейф авто балансування нуля сенсорів	0.1 ppm / ^{0}C

Продовження таблиці 11.4

1	2
Габарити, мм	260x260x160
Інтерфейс	USB 2.0
Живлення	Від 100 до 240 В (змінна напруга); 24 В (постійна напруга)

Багатофункціональний модуль АЦП **LabJack-U3** (рис. 11.5) виробництва LabJack Measurement & Automation [45] призначений для збору та опрацювання сигналів та керування в аналогових і цифрових системах.

Основні характеристики приведені в табл. 11.5.

Рис. 11.5. Загальний вигляд АЦП LabJack-U3

Таблиця 11.5

Технічні характеристики багатофункціонального модуля АЦП LabJack-U3 [45]

Назва параметра	Характеристика
1	2
Кількість вимірювальних входів	16
Розрядність АЦП	12 біт
Кількість таймерів	до 2-х (час імпульсу, ШІМ вихід)
Кількість лічильників	до 2-х (32 біти кожен)

Продовження таблиці 11.5

1	2
Додаткові цифрові входи/виходи	4
Аналогові виходи	2 (10 біт, від 0 до 5 В)
Швидкість передачі даних	від 2,5 до 5- кГц
Інтерфейс	USB 2.0/1.1, SPI, I2C
Габарити, мм	75x115x30
Робочий діапазон температур	Від -40 до +85 ^{0}C

Багатофункціональний модуль АЦП **USB-4704** [46] призначений для невеликих промислових або науково-дослідних систем вимірювання. Загальний вигляд модуля приведений на рис. 11.6.

До основних перевах даного модуля (табл. 11.6) слід віднести наявність 4 диференційних чи 8 звичайних каналів перетворення АЦП із швидкістю 48 тисяч вибірок за секунду та розрядністю 14 біт.

Рис. 11.6. Загальний вигляд багатофункціонального модуля АЦП USB-4704

Таблиця 11.6

Технічні характеристики багатофункціонального модуля АЦП USB-4704 [46]

Назва параметра	Характеристика
1	2
Аналогові входи	
Частота дискретизації, kS/s	48

Продовження таблиці 11.6

1	2
Розрядність, біт	14
Діапазон вхідних сигналів, В	диференційних: ±1, ±1,25, ±2, ±2,5, ±4, ±5, ±10, ±20; звичайних: ±10
Аналогові виходи	
Розрядність, біт	12
Кількість каналів	2
Частота оновлення	статична
Таймер	
Розширення, біт	32
Кількість каналів	1
Максимальна вхідна частота, МГц	5
Цифрові канали	
Кількість вхідних каналів	8
Кількість вихідних каналів	8

11.1.2 Вбудовані АЦП

Багатофункціональна плата АЦП/ЦАП **L-791** (рис. 11.7) із гальванічною розв’язкою [47].

Рис. 11.7. Загальний вигляд багатофункціональної плати АЦП/ЦАП L-791

Прямий доступ до пам’яті комп’ютера значно підвищує швидкодію системи вимірювань та дозволяє здійснювати опрацювання результатів в режимі реального часу.

До переваг даного типу плат слід віднести різночастотність опитування окремих каналів.

Групова гальванічна розв’язка всіх зовнішніх входів та виходів від комп’ютера реалізована на сучасні елементні базі, що уможливлює безперервну передачу даних без втрат на максимальні частоті роботи АЦП та ЦАП.

Більш детально характеристики плати приведені в табл. 11.7.

Таблиця 11.7

Технічні характеристики багатофункціональної плати АЦП/ЦАП L-791 [46]

Назва параметра	Характеристика
1	2
АЦП	
Кількість каналів	16 диференційних чи 32 із „загальною землею”
Розрядність АЦП	14 біт
Ефективна розрядність (вх. сигнал – синус 10 кГц / 4,9 В)	13,3 біт (частота перетворення – 300 кГц)
Вхідний опір (одноканальне введення)	не менше 1 МОм
під діапазони вимірювань вхідного сигналу	±10 В, ±5 В, ±2,5 В, ±1,25 В, ±0,6 В, ±0,3 В, ±0,15 В, ±0,07 В.
Частоти дискретизації	до 400 кГц
Групова гальванічна розв’язка	500 В
Захист входів	±25 В (живлення ввімкнене), ±10 В (живлення вимкнене)
Відношення сигнал / (шум + нелінійне викривлення) на частоті 400 Гц	74 дБ
ЦАП	
Кількість виходів напруги із загальною землею	2
Розрядність	12 біт

Продовження таблиці 11.7

1	2
Час встановлення	8 мкс
Вихідний діапазон	±5 В
Вихідний струм (не більше)	2 мА
Тип ЦАП	Синхронний
Цифрові входи та виходи	
Кількість входів	16 (паралельних, синхронних, асинхронних)
Кількість виходів	16 (паралельних, асинхронних)

Аналогово-цифровий перетворювач **L-154**.

Алгоритм багатоканального введення з аналогових каналів дозволяє зчитувати сигнали з частотою до 70 кГц на канал, або здійснювати асинхронне введення з різних аналогових каналів [37, 40].

Загальний вигляд комп'ютера з вмонтованою платою АЦП L-154 наведено на рис. 11.8. Структурна схема АЦП приведена на рис. 11.9.

Рис. 11.8. Загальний вигляд материнської плати комп'ютера з вмонтованою платою АЦП L-154

Основні технічні характеристики АЦП L-154 приведені в табл. 11.8

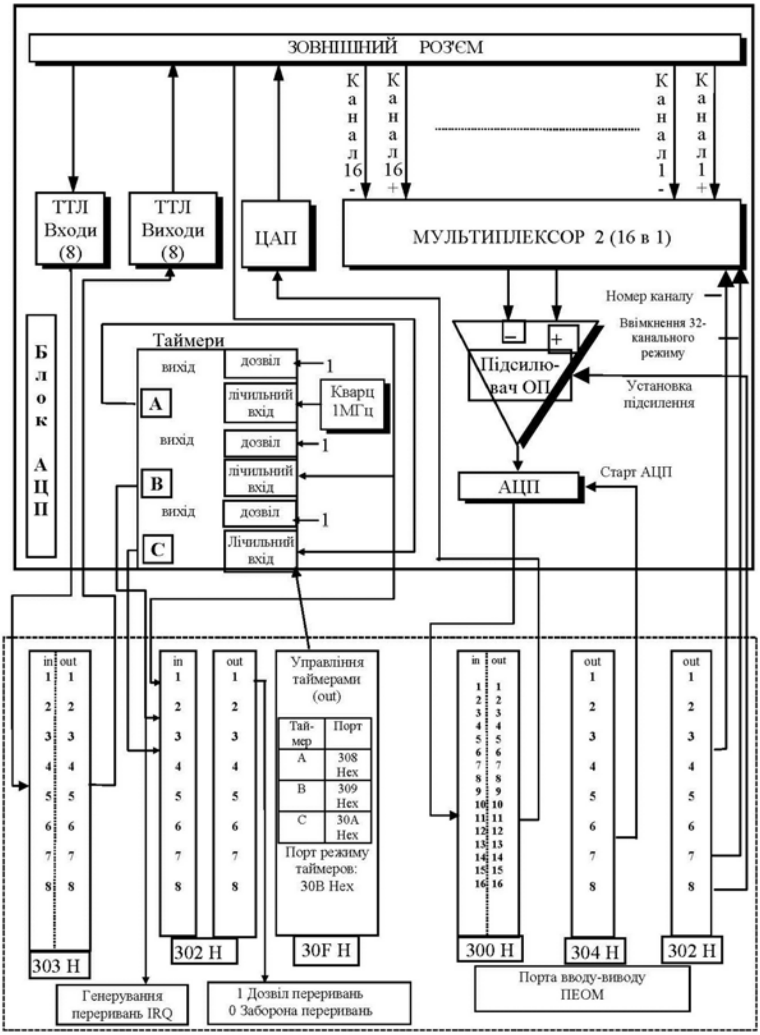


Рис. 11.9. Структурна схема аналогово-цифрового перетворювача L-154

Таблиця 11.8

Технічні характеристики АЦП L-154

Назва параметра	Характеристика
1	2
Розрядність	12 біт
Вхідний опір	2 МОм
Максимальна частота вхідного сигналу	70 кГц
Нелінійність перетворення	±0,8 МЗР, макс ±1,2 МЗР
Відсутність пропусків коду	12 біт
Зміщення нуля	±0,5 МЗР

11.2 Мікропроцесори в наукових дослідженнях

На сьогодні, мікропроцесор є не лише основним елементом електронної техніки, а поряд з цим і одним з основних блоків обчислювальної машини, а саме процесором. В теорії планованого факторного експерименту МП виконує дві важливі функції [34, 41]:

1) обробка цифрової інформації;

2) управління процесом обробки інформації та роботою решти вузлів обчислювальної машини.

МП змінює свої робочі функції під дією зовнішніх сигналів (команд). А тому потребує для забезпечення своєї роботи інших елементів:

- елементів пам'яті – для збереження команд, адресів та даних;

- технічних засобів – призначених для узгодження його роботи з іншими елементами пристрою чи системи.

Усі необхідні засоби виконуються у вигляді мікросхем, які можуть входити до складу відповідних мікропроцесорних комплектів (МПК) тієї чи іншої серії [41].

Розглянемо використання мікропроцесорів (МП) фірми Microchip Technology (колишня Atmel Corporation) – **Atmega328** (рис. 11.10), як основи вимірювального комплексу для наукових досліджень. Основним завданням якого буде керування роботою сенсорів, обробка інформаційного сигналу (як аналогового так і цифрового) та подання отриманих результатів у зручній для дослідника формі.

Вивчення основних принципів роботи з 8-бітними мікропроцесором доцільно проводити використовуючи плату розробників **Arduino UNO** (рис. 11.11), засновану на 8-бітному мікропроцесорі **ATmega328** [48].

Ядро Atmel AVR® поєднує в собі великий набір інструкцій з 32 загальними робочими регістрами. Всі 32 регістри безпосередньо пов'язані з блоком арифметичної логіки (**ALU**), що дозволяє отримати доступ до двох незалежних регістрів за допомогою однієї інструкції, виконаної за один такт. Отримана архітектура більш ефективна для коду при досягненні пропускної здатності в десять разів швидше, ніж звичайні мікропроцесори **CISC**.

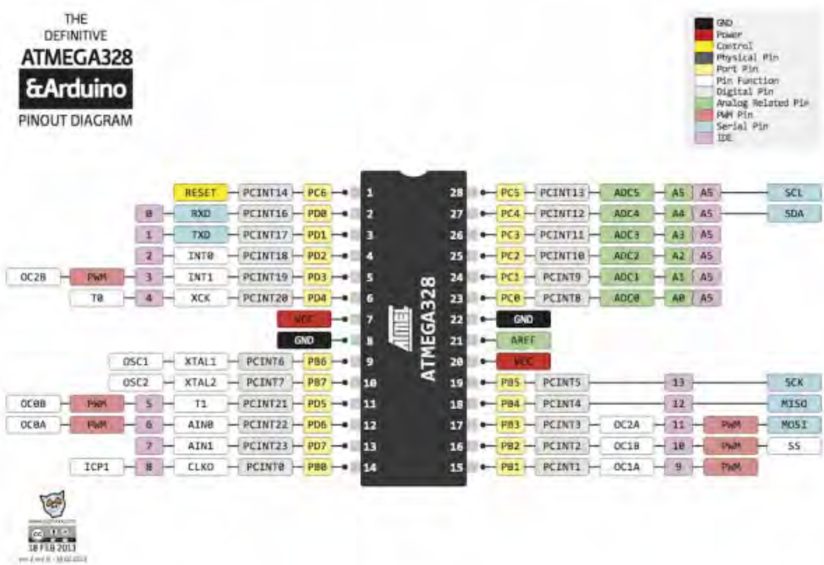


Рис. 11.10. Мікропроцесор Atmega328 [47]

ATmega328/P забезпечує наступні функції:

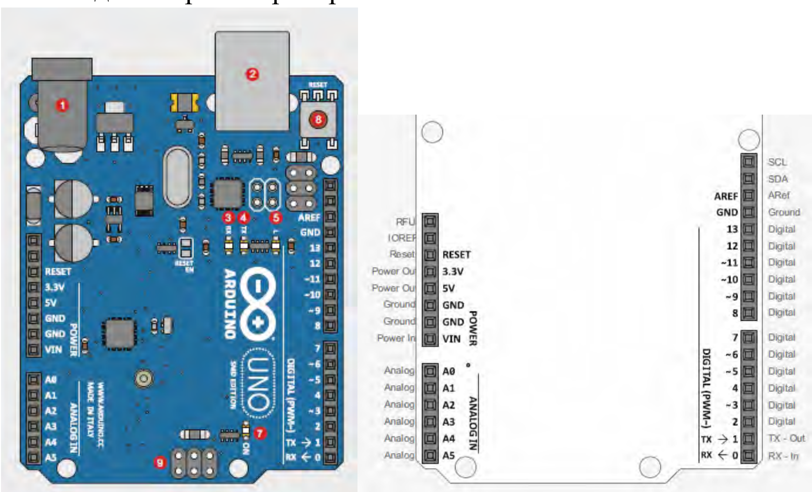
Пам'ять:

- 32 kB Flash (пам’ять програм, що має властивість самопрограмуватись);

- 2 kB ОЗП;
- 1 kB EEPROM (постійна пам’ять даних).

Периферійні прилади:

- o Два 8-бітних таймера/лічильники із модулями порівняння та дільниками частоти;
- o 16-бітний таймер/лічильник із модулем порівняння та дільником частоти, з режимом запису;
- o Лічильник реального часу із окремим генератором;
- o Шість каналів **PWM** (аналог **ЦАП**);
- o 6-канальний **ЦАП** із вбудованим сенсором температури;
- o Програмований послідовний порт **USART**;
- o Послідовний інтерфейс **SPI**;
- o Інтерфейс **I^{2}C**;
- o Програмований таймер із окремим внутрішнім генератором;
- o Внутрішня схема порівняння напруг;
- o Блок обробки переривань і вмикання при зміні напруги на виводах мікроконтролера.



а) б)

а) загальний вигляд; б) схема портів введення/виведення

Рис. 11.11. Arduino UNO (на SMD компонентах)

Спеціальні функції мікропроцесора ATmega328:

- Скидання при ввімкненні живлення і програмне розпізнавання зниження напруги живлення;
- Внутрішній калібрований генератор тактових імпульсів;
- Опрацювання внутрішніх та зовнішніх переривань;
- 6 режимів сну (понижене енергоспоживання та зниження шумів для більш точного перетворення **ЦАП**).

Напруга живлення та швидкість процесора:

- 1.8 — 5.5 В при частоті до 4 МГц
- 2.7 — 5.5 В при частоті до 10 МГц
- 4.5 — 5.5 В при частоті до 20 МГц

Приклад. Розглянемо використання мікропроцесора ATmega328 для керування роботою світлодіоду (LED).

Код керування пишеться та завантажується до мікропроцесора за допомогою програмного продукту **Arduino IDE** (рис. 11.12).

Рис. 11.12. Загальний вигляд інтерфейсу Arduino IDE

Принципова схема лабораторного стенда подана на рис. 11.13. Загальний вигляд приведено на рис. 11.14 – 11.15.

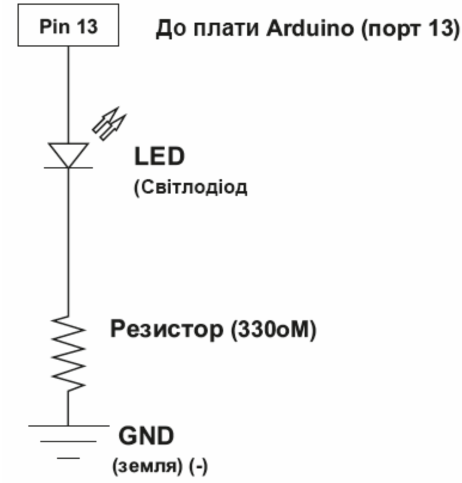


Рис. 11.13. Принципова схема лабораторного стенда

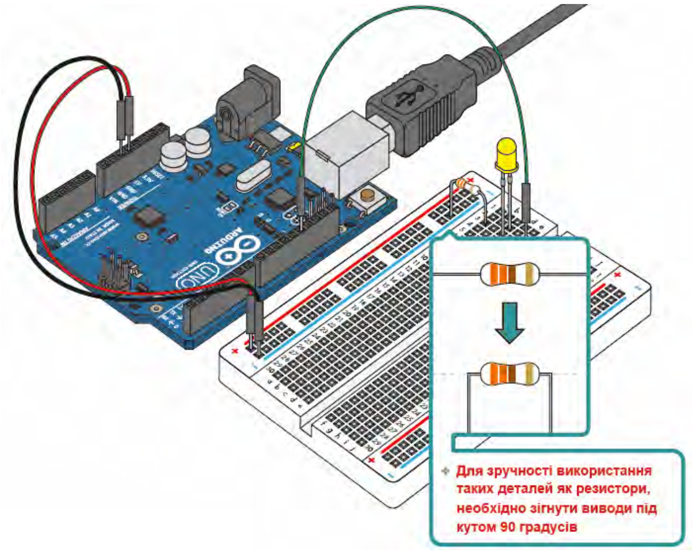


Рис. 11.14. Загальний вигляд зібраного лабораторного стенда

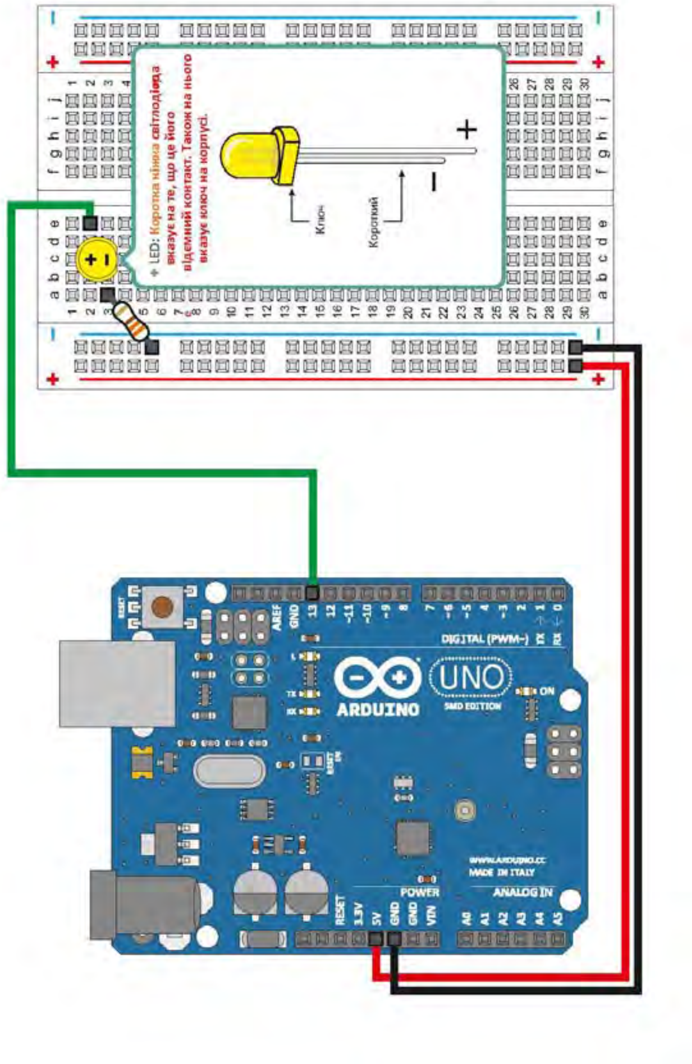


Рис. 11.15. Схема підключення елементів лабораторного стенда

Приклад коду керування світлодіодом (LED):

```
1. // ATmega 328 LED
2. int led = 13
3. void setup ()
4. {
5. pinMode (led, OUTPUT);
6. }
7. void loop ()
8. {
9. digitalWrite (led, HIGH);
10. delay (1000);
11. digitalWrite (led, LOW);
12. delay (500);
13. }
```

Перший рядок коду:

```
1. // ATmega 328 LED
```

Є лише коментарем, оскільки починається він із двох косих ліній (//). А тому, будь-який текст в цьому рядку ігнорується компілятором. Для подання зауважень використовується також оператор блоку:

```
Bookended /* I */
```

Другий рядок коду:

```
2. int led = 13
```

оголошення змінної цілого типу (**int**). Змінна містить інформацію про номер порту до якого підключаємо **LED**.

Для звернення до змінної в мові програмування **Сі** (**С**) її ім'я має починатись з літери. До складу імені можуть входити крім букв також цифри та символи підкреслення.

Не можна використовувати імена процедур та перемикання в якості імен змінних.

Далі йде процедура (функція) **setup**:

```
3. void setup ()
4. {
5. pinMode (led, OUTPUT);
6. }
```

Обов'язковими елементами будь-якої програми є процедури **setup()** та **loop()**. Оголошення процедур (функцій) необхідне для реалізації режимів роботи контактів, встановлення швидкості передачі даних. Оголошення процедур розпочинається словом **void**. Компілятор отримує інформацію про назву процедури (**setup**), яка не повертає дані (**void**), а також використовується без параметрів () – порожні дужки.

Якщо ваша процедура повертає ціле значення і до процедури надходять теж цілі значення (наприклад, для процедури опрацювання), змінна прийме наступний вигляд:

```
int myFunc (int x, int y)
```

Функція **myFunc** передає два цілих значення x і y. Після того, як функція закінчена, вона буде повертати ціле значення в точку після якої ваша функція оголошена в програмі. Весь код у функції міститься у фігурних дужках: { – символ початку блоку коду і } – символ завершення блоку коду. Все, що знаходиться між цими двома символами це код, який належить функції.

В нашому прикладі присутні дві функції. Перша називається „налаштування" її мета полягає в установці всього необхідного для вашої програми, щоб працювати до початку роботи функції циклу:

```
void setup ()
{
pinMode (led, OUTPUT);
}
```

Функція „налаштування" має тільки один оператор, і це **pinMode**. Його суть полягає у встановлені порту у режим виведення або введення. У дужках, вписується номер виводу (**pin number**) і режим роботи (виведення даних – **OUTPUT** або введення даних – **INPUT**). Номер **led**, який був раніше встановлений як порт виведення **13**.

Процедура **setup ()** виконується лише один раз. Для багаторазового повторення (циклічності) використаємо основну процедуру циклу **loop**:

```
void loop ()
{
```

9. digitalWrite (led, HIGH);
10. delay (1000);
11. digitalWrite (led, LOW);
12. delay (500);
13. }

Процедура **loop**, як основна процедура забезпечує безперервне виконання команд розміщених у фігурних дужках.

Команда (**digitalWrite**):

9. digitalWrite (led, HIGH);

використовується для встановлення виводу порта у високий (**HIGH**) - +5 В. чи низький (**LOW**) – 0 В. рівні.

Команда **delay** використовується для очікування (затримки) між діями:

10. delay (1000);

аргумент в дужках (**1000**) – час очікування в мілісекундах перед виконанням наступної команди:

11. digitalWrite (led, LOW);

встановлення порта в низький рівень (0 В.). Та задаємо затримку 500 мілісекунд:

12. delay (500);

Останній рядок:

13. }

закінчення функції.

Враховуючи процедуру **loop**, цикл буде безкінечно повторюватись.

11.3 Основи програмування Arduino

Для програмування плати **Arduino UNO**, основою якої є мікроконтролер серії ATmega 328 використовується програмне забезпечення **Arduino IDE**. Структура програм **Arduino** достатньо проста. Елементами, які має містити програмний код є наступні процедури (функції):

- **setup ()**:

```
void setup ()
```

процедура **setup ()** є обов'язків елементом, який запускає початкові налаштування змінних, регістрів. Виконується лише один раз після ввімкнення живлення чи скидання налаштувань контролера.

- loop ():

```
void loop ()
```

циклічно виконує команди прописані у фігурних дужках після процедури.

Елементи синтаксису мови програмування **С**:

- „ ; ” – крапка з комою виражає завершення виразу;
- „ {} ” – фігурні дужки визначають блок процедур чи виразів. Наприклад для процедур **setup ()** і **loop ()**;
- „ /*…*/ ” – блок для коментарів;
- „ // ” – одно стрічковий коментар.

11.3.1 Типи даних та змінні

Для коректної роботи програми, точності необхідних розрахунків важливим є правильний вибір типу змінних. Для прикладу, вибір змінної типу **long** для лічильника, що рахує до 100 збільшить кількість використовуваної пам'яті та тривалість розрахунків. Основні типи змінних приведені в табл. 11.9.

Таблиця 11.9

Основні типи змінних мови програмування С

Тип даних	Розрядність, біт	Діапазон чисел
1	2	3
boolean	8	True, false
char	8	-128…127
unsigned char	8	0…255
byte	8	0…255
int	16	-32768…32767
unsigned int	16	0…65535
word	16	0…65535
long	32	-2147483648…2147483647
unsigned long	32	0…4294967295
short	16	-32768…32767

Продовження таблиці 11.9

float	32	-3.4028235+38 … 3.4028235+38
double	32	-3.4028235+38 … 3.4028235+38

Оголошення змінних. Всі змінні мають бути оголошені до того, як будуть використані. Змінна може бути оголошена в будь-які частині програми. Від цього залежить які блоки програми зможуть її використовувати (області видимості):

- змінні оголошені на початку програми, до функції **void setup ()**, вважаються глобальними та доступні у всій програмі;

- локальні змінні оголошуються всередині процедур (функцій) чи певних блоків (наприклад **for**). В такому разі вони доступні лише в оголошених блоках.

`int mode;` - змінна доступна всім процедурам.

`void setup () {}` – пустий блок, який не потребує початкової установки.

`void loop () {`

`long count;` – змінна **count** доступна лише в процедурі **loop ()**.

`for (int i=0; i<10;)` – змінна **i** доступна лише всередині циклу.

```
  {
    i++;
   }
}
```

Оголошуючи змінну є можливість задати її початкове значення:

`int x = 0;` - оголошення змінної **x** з початковим значенням **0**.

`Char d = 'a';` - оголошення змінної **d** з початковим значенням рівним коду символу **'a'**.

Здійснюючи арифметичні операції з різними типами даних, програма автоматично перетворює типи даних. Але краще використовувати явне перетворення:

```
int x;
char y;
int z;
```

z = x + (int) y; - змінна **y** явно перетворена в **int**.

Основні типи операції з даними приведені в таблицях 11.10-11.14.

Таблиця 11.10

Арифметичні операції

№	Тип операції	Зміст операції
1	=	присвоєння
2	+	додавання
3	-	віднімання
4	*	множення
5	/	ділення
6	%	залишок від ділення

Таблиця 11.11

Операції відношення

№	Тип операції	Зміст операції
1	==	рівне
2	! =	не рівне
3	<	менше
4	>	більше
5	< =	менше чи рівне
6	> =	більше чи рівне

Таблиця 11.12

Логічні операції

№	Тип операції	Зміст операції
1	&&	логічне І
2	||	логічне ЧИ
3	!	Логічне НЕ

Таблиця 11.13

Операції над вказівниками

№	Тип операції	Зміст операції
1	*	адресація
2	&	отримання адреси змінної

Таблиця 11.14

Бітові операції

№	Тип операції	Зміст операції
1	2	3
1	&	І
2	|	ЧИ
3	^	ВИКЛЮЧНО ЧИ

Продовження таблиці 11.14

1	2	3
4	~	ІНВЕРСІЯ
5	<<	ЗМІЩЕННІ ВЛІВО
6	>>	ЗМІЩЕННЯ ВПРАВО

11.3.2 Оператори

Оператор IF перевіряє умову в дужках та виконує наступний вираз чи блок у фігурних дужках, якщо умова істинна:

```
if (x == 5) - якщо x=5, виконується z=0.
z=0;
if (x > 5) - якщо x > 5, виконується блок z=0, y=8.
{   z=0;   y=8; }
```

IF … ELSE дозволяє зробити вибір між двома варіантами:

```
if (x > 5) - якщо x > 5, виконується блок z=0, y=8;
 {
  z=0;
  y=8;
 }
else - в іншому випадку виконується блок:
 {
  z=0;
  y=0;
 }
```

ELSE IF – дозволяє зробити множинний вибір:

```
if (x > 5) - якщо x > 5, виконується блок z=0, y=8;
 {
  z=0;
  y=8;
 }
else if (x > 20) - якщо x > 20, виконується блок:
 {
 }
else – в іншому разі виконується блок:
```

```
{
 z=0;
 y=0;
 }
```

SWITCH CASE – множинний вибір. Дозволяє порівнювати змінну (в даному прикладі це **x**) з декількома константами (5 і 10) та виконувати блок, в якому змінна рівна константі:

```
switch (x) {
case 5 :
```

код виконується, якщо x = 5

```
break;
case 10 :
```

код виконується, якщо x = 10

```
break;
default :
```

код виконується, якщо не співпало жодне із попередніх значень

```
break;
}
```

BREAK – оператор виходу із цикла. Використовується для переривання виконання циклів **for**, **while**, **do while**.

```
x = 0;
while ( x < 10 )
{
 if ( z > 20 ) break;
```

- якщо z > 20, то вийти із циклу

код тіла циклу

```
 x++;
 }
```

GOTO – оператор безумовного переходу.

`goto metka1;` - перехід на **metka1**

………………

```
metka1:
```

CONTINUE - пропуск операторів до кінця тіла циклу.

```
x = 0;
while ( x < 10 )
```

{
код тіла циклу
if (z > 20) continue; - якщо z > 20, необхідно повернутися на початок тіла циклу
код тіла циклу
x++;
}

11.3.3 Цикли

Цикл FOR. Конструкція дозволяє організувати цикли із заданою кількістю ітерацій. Синтаксис має наступний вигляд:

```
for ( дія до початку циклу;
умова продовження циклу;
дія в кінці кожної ітерації ) {
код тіла циклу
}
```

Приклад циклу із 100 ітерацій:

for (i=0; i < 100; i++)   - початкове значення 0, кінцеве 99, крок 1:

```
{
   sum = sum + I;
}
```

Цикл WHILE. Оператор дозволяє організувати цикли із конструкцією:

```
while ( вираз )
{
код тіла циклу
}
```

Цикл виконується поки вираз у дужках істинний. Приклад циклу на 10 ітерацій:

```
x = 0;
while ( x < 10 )
{
код тіла циклу
  x++;
```

```
}
```

DO WHILE – цикл із умовою на виході:

```
do
{
код тіла циклу
}  while ( вираз );
```

Цикл виконується поки вираз істинний.

11.3.4 Масиви та функції

Масив це область пам'яті, де послідовно зберігаються декілька змінних.

Оголошуються масиви наступним чином:

int ages[10]$ - масив із 10 змшнних типу **int**

float weight[100]; - масив із 100 змінних типу **float**

Оголошуючи масиви, їх можна ініціалізувати:

int ages[10] = { 23, 54, 34, 24, 45, 56, 23, 23, 27, 28};

Звертатись до змінних масивів необхідно наступним чином:

x = ages[5]; - **x** присвоюється значення з 5 елементів масиву.

ages[9] = 32; - 9 елементу масиву задається значення 32

Нумерація елементів масиву завжди починається із нуля.

Функції дозволяють виконувати дії з різними даними. Функції володіють наступними елементами

- ім'я, за яким її викликають;
- аргументи – тобто дані, які функція використовує для розрахунків;
- тип даних, що повертається функцією.

Опишемо користувацькі функції за межами функцій **setup()** і **loop()**:

```
void setup()
{
код виконується один раз при завантаженні програми
}
void loop()
```

```
{
основний код, виконується в циклі
}
```

Оголошення користувацької функції із іменем **functionName**:

```
type  functionName (type argument1, type argument1, ... , type
argument)
  {
тіло функції
   return();
  }
```

Приклад функції, що розраховує суму квадратів двох аргументів:

```
int sumQwadr (int  x, int y)
{
 return( x* x + y*y);
}
```

Виклик функції здійснюється наступним чином:

```
d= 2; b= 3;
z= sumQwadr(d, b);
```

- в z буде сума квадратів змінних d та b

Функції бувають вбудовані, користувацькі, підключувані.

Приклад. Цифровий комбінований сенсор температури та вологості **АМ2320** (рис. 11.16) має відкалібрований цифровий сигнал. Сенсор складається із ємнісного елемента визначення вологості та вбудованих високоточних засобів для вимірювання температури.

АМ2320 для зв'язку із мікроконтроллером використовує одну шину з двома режимами зв'язку I2C. Передача сигналу забезпечується на відстань до 20 метрів. Загальна схема сенсора приведена на рис. 11.17.

Невеликі габарити, низький рівень енергоспоживання та достатньо висока точність вимірювань температури (рис. 11.18) та вологості (рис. 11.19) зумовлюють широку сферу застосування сенсора від систем вентиляцій та кондиціонування до систем автомобільної автоматики та АСУ ТП.

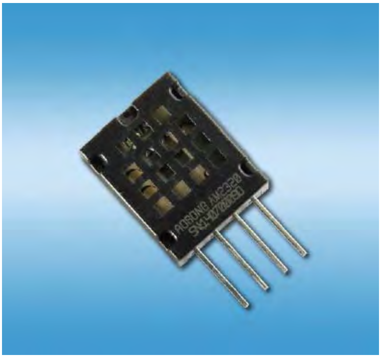
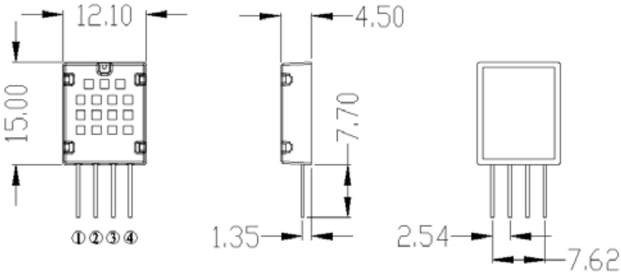


Рис. 11.16. Загальний вигляд сенсора AM2320



1 – Vdd; 2 – SDA; 3 – GND; 4 - SCL

Рис. 11.17. Схема сенсора AM2320

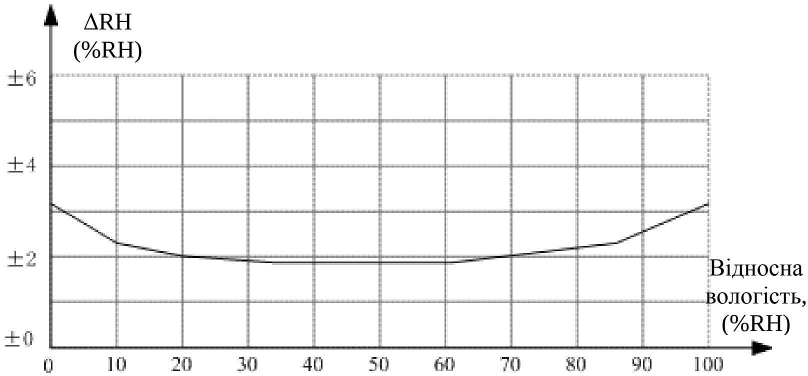


Рис. 11.18. Залежність похибки вимірювання вологості від значень відносної вологості

Основні характеристики сенсора:

- напруга живлення: від 3,1 до 5,5 В.;
- діапазон вимірювання температури: від -40 до +80 ^{0}C;
- діапазон вимірювання вологості: від 0 до 99,9% відносної вологості;
- точність показів температури (при 25^{0}C): ±0,5 ^{0}C;
- точність показів температури: ±0,1 ^{0}C;
- точність показів вологості (при 25^{0}C): ±3% відносної вологості (10-90%RH);
- точність показів вологості: ±0,1% відносної вологості;
- час реакції: 5 с.;
- матеріал корпусу: пластик;

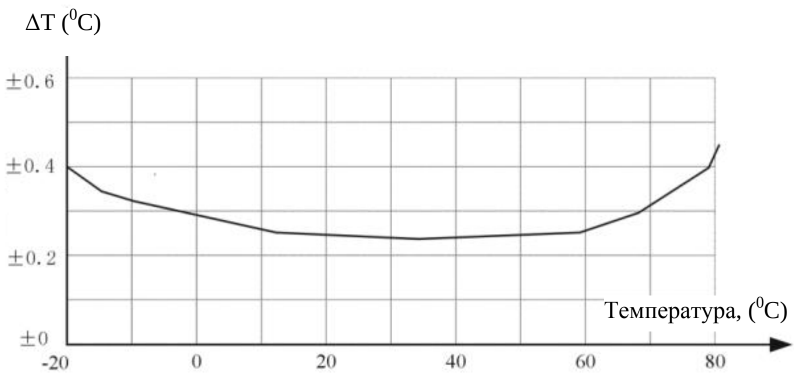


Рис. 11.19. Залежність похибки вимірювання температури від значень температури

Розглянемо код для збору інформації із цифрового сенсора температури **AM2320**:

```
// Sensor AM2320
# include <iarduino_AM2320.h>
iarduino_AM2320 sensor;
void setup ()
{
   sensor.begin ();
   Serial.begin (9600);
```

```
}
void loop ()
 {
  switch (sensor.read ())
   {
    case AM2320_OK: Serial.println ((String) "СЕНСОР AM2320: T="  + sensor.tem + "*C, PH=" + sensor.hum + "%");
    break;
    case AM2320_ERROR_LEN: Serial.println ("ВІДПРАВЛЕННЯ НЕМОЖЛИВЕ");
    break;
    case AM2320_ERROR_ADDR: Serial.println ("НЕМАЄ СЕНСОРА");
    break;
    case AM2320_ERROR_DATA: Serial.println ("ВІДПРАВЛЕННЯ НЕМОЖЛИВЕ");
    break;
    case AM2320_ERROR_SEND: Serial.println ("ВІДПРАВЛЕННЯ НЕМОЖЛИВЕ");
    break;
    case AM2320_ERROR_READ: Serial.println ("НЕМАЄ ВІДПОВІДІ ВІД СЕНСОРА");
    break;
    case AM2320_ERROR_ANS: Serial.println ("ВІДПОВІДЬ НЕ КОРЕКТНА");
    break;
    case AM2320_ERROR_LINE: Serial.println ("НЕРІВНІСТЬ CRC");
    break;
   }
```

30. delay (2000);

31. }

Другий рядок коду:

2. # include <iarduino_AM2320.h>

підключення бібліотеки (iarduino_AM2320) для роботи із сенсором.

В подальшому необхідно оголосити об'єкт **sensor** для роботи із сенсором:

3. iarduino_AM2320 sensor;

Це дозволяє використовувати функції та методи бібліотеки **iarduino_AM2320**.

Наступний етап – ініціалізація роботи із сенсором:

6. sensor.begin ();

І використовуємо передачу даних на монітор послідовного порту із швидкістю 9600:

7. Serial.begin (9600);

Функція **switch** дозволяє зчитати покази сенсора:

11. switch (sensor.read ())

Функція read дозволяє читати покази модулів. Якщо функція повернула значення **AM2320_OK**, то коректні значення можна прочитати використовуючи змінні **tem** (температура) та **hum** (вологість) типу **float**:

13. case AM2320_OK: Serial.println ((String) "СЕНСОР AM2320: T=" + sensor.tem + "*C, PH=" + sensor.hum + "%");

Діагностика сенсора та перевірка якості сигналу проводиться наступним чином:

15. case AM2320_ERROR_LEN: Serial.println ("ВІДПРАВЛЕННЯ НЕМОЖЛИВЕ");

об'єм переданих даних перевищує буфер I2C;

17. case AM2320_ERROR_ADDR: Serial.println ("НЕМАЄ СЕНСОРА");

отриманий NACK при передачі даних сенсора;

19. case AM2320_ERROR_DATA: Serial.println (“ВІДПРАВЛЕННЯ НЕМОЖЛИВЕ”);
отриманий NACK при передачі сенсора;
21. case AM2320_ERROR_SEND: Serial.println (“ВІДПРАВЛЕННЯ НЕМОЖЛИВЕ”);
помилка передачі даних;
23. case AM2320_ERROR_READ: Serial.println (“НЕМАЄ ВІДПОВІДІ ВІД СЕНСОРА”);
отримано пусту відповідь від сенсора;
25. case AM2320_ERROR_ANS: Serial.println (“ВІДПОВІДЬ НЕ КОРЕКТНА”);
відповідь сенсора не відповідає запису;
27. case AM2320_ERROR_LINE: Serial.println (“НЕРІВНІСТЬ CRC”); перешкоди в лінії зв’язку.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Призначення аналогово-цифрових перетворювачів?
2. Дайте визначення терміну „молодшого значення розряду”
3. Характеристика та призначення багатофункціонального модуля АЦП/ЦАП Е-502?
4. Характеристика та призначення модуля АЦП LTR212M?
5. Характеристика та призначення спеціалізованого високочастотного тензометричного АЦП QMBox85-128?
6. Характеристика та призначення модуля АЦП LabJack-U3?
7. Характеристика та призначення багатофункціональної плати АЦП L-154?
8. Які Вам відомі периферійні прилади контролера ATmega328?

9. Назвіть спеціальні функції мікроконтролера ATmega328.

10. Як здійснюється виклик процедур (функцій)? Наведіть приклад.

11. Як здійснюється оголошення процедур (функцій)? Наведіть приклад.

12. Назвіть основні типи змінних та їх діапазони.

13. Назвіть основні типи операцій із даними.

14. Вкажіть різницю між глобальними та локальними типами змінних. Наведіть приклад.

15. Порядок звернення до змінних в масиві? Наведіть приклад

16. Порядок оголошення масивів? Наведіть приклад.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Семенова І. Ю. Математичні моделі МСС : навч. посібн. К. : Київський нац. ун-тет імені Т. Шевченка, 2014. 82 с.

2. Ахназаров С. Л., Кафаров В. В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологи : учеб. пособие для хим.-технол. спец. вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Высш. шк., 1985. 327 с. : ил.

3. Волков В. П., Подригало М. А., Кравченко О. П., Міщенко В. М., Мармур І. А. Методологія наукових досліджень (на прикладах автомобільного транспорту) : навч. посібн. Луганськ : СНУ ім. В. Даля, 2009. 352 с. : 27 табл., 71 іл., 58 бібліогр. назв.

4. Реброва И. А. Планирование эксперимента: учебное пособие. Омск : СибАДИ, 2010. 105 с.

5. Дмитрів І. В. Обґрунтування режиму роботи і конструкційно-технологічних параметрів адаптивного пнемо-електромагнітного пульсатора доїльного апарата: дисс. ... канд. техн. наук: 05.05.11 / Глеваха, 2015. 209 с.

6. Вознесенский В. А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях М. : Финансы и статистика, 1981. 263 с.

7. Грановский В. А., Сирая Т. Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. Л. : Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1990. 228 с.

8. Дороժовець М. Опрацювання результатів вимірювань : навч. посібн. Львів : Вид-во Національного університету „Львівська політехніка”, 2007. 624 с.

9. Налимов В. В., Чернова Н. А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М. : Наука, главн. ред. Физико-математ. Литературы, 1965. 327 с.

10. Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. 2-е изд. перераб. и доп. М. : Наука, 1976. 279 с.

11. Красовский Г. И., Филаретов Г. Ф. Планирование эксперимента. Мн. : Изд-во БГУ, 1982. 302 с.

12. Мельников С. В., Алешкин В. Р., Рощин П. М. Планирование эксперимента в исследованиях сельскохозяйственных процессов. 2-е изд., перераб. и доп. Л. : Колос. Ленингр. отд-ние, 1980. 168 с.

13. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента / пер. с англ. Е.Г. Коваленко. М. : Мир, 1972. 375 с.

14. Хаушильд В., Мош В. Статистика для электротехников в приложении к технике высоких напряжений / пер. с нем. Л. : Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1989. 312 с.

15. Дмитрів І. В. Багатофакторне моделювання відкачування повітря в системі "доїльний стакан-пульсатора". *Вісник Львівського національного аграрного університету : агроінженерні дослідження*. 2014. № 18. С. 99-105.

16. Adamchuk V., Dmytriv V., Dmytriv I. Experimental studies of duration of air pumping out from the „TEAT CUP – PULSATOR" system. *Econtechmod: an International quarterly journal on economics in technology new technologies and modeling processes.* Lublin : Rzeszow, 2015. Vol. 4, № 4. P. 3-6.

17. Дмитрів В. Т., Дмитрів І. В. Результати експериментальних досліджень тривалості наповнення повітрям системи „доїльний стакан – пульсатор". *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України: техніка та енергетика АПК*. К., 2015. Вип. 212/2. С. 142-148.

18. Адамчук В.В., Дмитрів І.В., Дмитрів В.Т. Результати експериментальних досліджень доїльного апарата з адаптивним пневмоелектромагнітним пульсатором. *Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів [Науковий журнал]* . Харків, 2016. № 5. С. 238–245. URL : http://www.khntusg.com.ua/node/1323

19. Дрогомирецька Х. Т., Рибицька О. М., Слюсарчук О. З., Пабирівська Н. В., Гошко Л. В., Веселовська О. В., Білонова Д. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Львів : В-во Львівська політехніка, 2012. 396 с.

20. Адамчук В.В., Дмитрів В.Т., Дмитрів І.В., Лаврик Ю.М. Адаптивний мікропульсатор автоматизованого доїльного апарата. Теорія та експеримент : монографія. Львів : СПОЛОМ, 2016. 152 с.

21. Дмитрів В.Т., Адамчук В.В., Лаврик Ю.М., Дмитрів І.В. Енергоощадний пневмоелектромагнітний пульсатор автоматизованого доїльного апарата. Теорія та експеримент: монографія. Львів : СПОЛОМ, 2016. 180 с.

22. Дмитрів І.В. Статистичне опрацювання експериментальних результатів. Методичні рекомендації для виконання практичних робіт з дисципліни «Теорія і технологія наукових досліджень» студентами напряму підготовки 8.10010203 – „Механізація сільського господарства", 8.07010601 – „Автомобілі та автомобільне господарство" ОС "Магістр". Дубляни : Львів. нац. агр. ун-т, 2016. 69 с.

23. Дмитрів І.В. Визначення оптимального числа вимірювань. Методичні рекомендації для виконання практичних робіт з дисципліни «Теорія і технологія наукових досліджень» студентами напряму підготовки 8.10010203 – „Механізація сільського господарства", 8.07010601 – „Автомобілі та автомобільне господарство" ОС "Магістр" Дубляни : Львів. нац. агр. ун-т, 2016. 13 с.

24. Дмитрів В. Т. Методи і засоби діагностики й дослідження елементів систем доїльних установок. Науково-технічні та енергетичні засади агропромислового виробництва : колективна монографія / За ред. В.В. Снітинського, В.М. Боярчука й ін. (7 осіб). Львів : Львів нац. агро університет, 2012. С. 66-85.

25. Дмитрів В. Т., Банга В. І., Жиничин Я. С. Експериментальні дослідження охолодника молока пластинчатого типу. Науково-технічні та енергетичні засади агропромислового виробництва : колективна монографія / За ред. В.В. Снітинського, В.М. Боярчука й ін. (7 осіб). Львів : Львів нац. агро університет, 2012. – С. 85-88.

26. Дмитрів В. Т., Банга В. І., Жінчин Я. С. Метод вимірювання маси потоку сипких матеріалів. Науково-технічні та енергетичні засади агропромислового виробництва : колективна монографія / За ред. В.В. Снітинського, В.М. Боярчука й ін. (7 осіб). Львів : Львів. нац. агро університет, 2012. С. 88-95.

27. Дмитрів В. Т., Банга В. І. Вимірювач крутного моменту приводу обертових елементів. Науково-технічні та енергетичні засади агропромислового виробництва : колективна монографія / За ред. В.В. Снітинського, В.М. Боярчука й ін. (7 осіб). Львів : Львів нац. агро університет, 2012. С. 88-95.

28. Дмитрів В. Т., Жінчин Я. С., Банга В. І. Експериментальні дослідження охолодника молока пластинчатого типу. *Вісник Харківського нац. техніч. університету с. г. ім. Петра Василенка. Вип. 107 "Механізація сільськогосподарського виробництва"*. Харків : ХНТУСГ, 2011. – Т. 2. С. 222-225.

29. Дмитрів В., Жінчин Я., Дмитрів Г., Гончаров В. Методологічні основи дослідження якості процесу змішування кормів. *Вісник Львівського національного аграрного університету : агроінженерні дослідження*. Львів : Львів. національний агроуніверситет, 2012. № 16. С. 55-62.

30. Дмитрів В. Т., Дмитрів І. В., Максимів І. І. Термоанемометричний вимірювач пульсуючих потоків двофазних середовищ. *Вісник Львівського національного аграрного університету: Агроінженерні дослідження*. Львів : Львів. національний агроуніверситет, 2013. № 17. С. 71-79.

31. Дмитрів В. Т., Дмитрів І. В. Імітатор інтенсивності молоковіддачі при експериментальних дослідженнях доїльних апаратів. *Вісник Львівського національного аграрного університету: Агроінженерні дослідження*. Львів : Львів. національнальний агроуніверситет, 2013. № 17. С. 124– 129.

32. Дмитрів В. Т., Банга В. І., Банга Ю. В. Методика калібрування вимірювача крутного моменту приводу обертових елементів. *Вісник Львівського національного аграрного університету: Агроінженерні дослідження*. Львів : Львів. національний агроуніверситет, 2013. № 17. С. 137-143.

33. Дмитрів В., Городняк Р. Контроль якості змішування на основі теорії розмірностей. *Управління якістю в освіті та промисловості: досвід, проблеми та перспективи: тези доповідей ІІ Міжнародної науково-практичної конференції, 28-30 травня 2015 р*. Львів : В-во Львівської політехніки, 2015. С. 138-139.

34. Дмитрів В. Т., Шиманський В. М. Електроніка і мікросхемотехніка : навч. посібн. Львів : Афіша, 2006. 175 с.

35. Дмитрів В. Т. Проектування підсилювачів електричних сигналів : навч. посібн. Львів: ЛДАУ, 2007. 103 с.

36. Дмитрів В. Т., Дмитрів Г. М. Обґрунтування повторюваності вимірювань при експериментальних дослідженнях. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії.* Вип. 26. Мелітополь : ТДАТА, 2005. С. 27-32.

37. Дмитрів В. Т. Тензометричні первинні перетворювачі для дослідження параметрів доїльного обладнання. *Агромех-2004: Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, 22-24 вересня 2004 р.* Львів : ЛДАУ, 2004. С. 110-118.

38. Дмитрів В., Жінчин Я., Дмитрів Г., Михайленко П., Остапенко М., Дріго В. Динамічні характеристики витратомірів стосовно АСК ТП машинного доїння. *Вісник Львівського державного аграрного університету: Агроінженерні дослідження.* 2005. № 9. С. 255-263.

39. Дмитрив И., Дмитрив В. Алгоритмы диагностики двигателей внутреннего сгорания. *MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture* . Lublin-Rzeszow, 2016. Vol.18, № 5. P. 27-33. URL: http://www.pan-ol.lublin.pl/wydawnictwa/Motrol18_5/Motrol18_5_ 2016.pdf

40. Дмитрів В. Т. Механіко-технологічні основи систем доїльних установок : монографія. Львів : Сполом, 2017. 350 с.

41. Дмитрів В. Т., Ванько В. М., Лаврик Ю. М., Гонсьор О. Й., Банга В. І. Мікроконтролери і мікроконтролерні системи : лабораторний практикум. Львів : СПОЛОМ, 2017. 176 с.

42. Багатофункціональний модуль АЦП/ЦАП Е-502. URL: http://www.lcard.ru/products/external/e-502?qt-ltab=1#qt-ltab (дата звернення: 06.01.2019).

43. Спеціалізований модуль АЦП для тензовимірювань LTR212M. URL: http://www.lcard.ru/products/ltr/ltr212?qt-ltab=0#qt-ltab (дата звернення: 06.01.2019).

44. Спеціалізований високочастотний тензометричний АЦП QMBox85-128. URL: http://www.r-technology.ru/products/adc/qmbox85-128.php (дата звернення: 7.01.2019 р.).

45. Багатофункціональний модуль АЦП LabJack-U3. URL: https://labjack.com/products/u3 (дата звернення: 8.01.2019 р.).

46. Багатофункцыональний модуль АЦП USB-4704. URL : https://www.advantech.com/products/1-2mlkno/usb-4704/mod_4d0800cc-f6fd-402a-9782-24cd0ffdaf42 (дата звернення: 9.01.2019 р.).

47. Багатофункціональна плата АЦП/ЦАП L-791. URL: http://www.lcard.ru/products/boards/l-791?qt-ltab=1#qt-ltab (дата звернення: 9.01.2019 р.).

48. Atmel ATmega328/P [DATASHEET]. URL : http://ww1.microchip.com/ downloads/en/DeviceDoc/Atmel-42735-8-bit-AVR-Microcontroller-ATmega328-328P_Datasheet.pdf (дата звернення: 14.09.2018 р.).

49. Дмитрів І. В. Теорія та технологія наукових досліджень: механічна інженерія : навч. Посібн. Львівський національний аграрний університет. Львів : СПОЛОМ, 2017. 212 с.

50. Зубчук В. И., Сигорский В. П., Шкуро А. Н. Справочник по цифровой схемотехнике. К.: Тэхника, 1990. 448 с.

51. Дмитрів В. Т. Проектування підсилювачів та електронних пристроїв обробки електричних сигналів: Методичні рекомендації до виконання курсового проекту з дисципліни “Електроніка і мікросхемотехніка. Львів: ЛДАУ, 2003. 60 с.

52. Dmytriv V. T., Dmytriv I. V., Bubela T. Z., Yatsuk V. O., Lavryk Y. M., Krasnytsia B. Study of the pressure regulator work with a spring-damper system applied to milking machine / Дослідження роботи регулятора тиску з пружинно-демпферною системою стосовно до доїльних установок. *INMATEH - Agricultural Engineering. National institute of research-development for machines and installations designed to agriculture and food industry - INMA Bucharest*. vol. 52, no.2 / 2017. P. 61-68 eISSN: 2068-2239 (**Scopus**).

53. Vasyl Dmytriv, Dmytriv Ihor, Yurij Lavryk, Ivan Horodeckyy. Models of adaptation of the milking machines systems.

BIO Web Conf. Contemporary Research Trends in Agricultural Engineering.Volume 10, 2018. Kraków, Poland, September 25-27, 2017. P. 1-7. eISSN: 2117-4458 (**Web of science**)

54. Dmytriv V., Dmytriv I., Dmytriv T. Recearch in thermoanemometric measuring device of pulse flow of two-phase medium. *17th International Scientific Conference Engineering for Rural Development. Proceedings.* Volume 17, 2018. Jelgava, Latvia, May 23-25, 2018. P. 898-904. ISSN 1691-5976 (**Scopus, Web of science**).

55. Dmytriv V., Dmytriv I., Krasnytsia B. Influence of the mode of work of milking rubber on the dynamics of the stream of two-phase mixture. *VI International Scientific Congress / Agricultural machines. Research and testing. New machine desighs.* Volume 1, Burgas, Bulgaria, 25.06-28.06.2018. P. 33-36. ISSN 2535-0269.

56. Дмитрів В. Т., Дмитрів І. В., Красниця Б. С. Коливання тиску в системах повітропроводу технологічного обладнання. *Вібрації в техніці та технологіях: збірник тез XVII-ої Міжнародної науково-технічної конференції.* Львів: Національний університет „Львівська політехніка”, 2018. С. 47-48

57. Багатофакторний дисперсійний аналіз. Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з дисципліни “Теорія і практика наукових досліджень” для студентів спеціальності 274 «Автомобільний транспорт». Укл. Дмитрів І. В. Львів: 2018. 27 с.

58. Теорія і практика наукових досліджень. Частина 1. Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни “Теорія і практика наукових досліджень” для студентів спеціальності 274 «Автомобільний транспорт». Укл. Дмитрів І. В. Львів: 2018. 70 с.

59. Теорія і практика наукових досліджень. Частина 2. Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни “Теорія і практика наукових досліджень” для студентів спеціальності 274 «Автомобільний транспорт» другого (магістерського) рівня вищої освіти. Укл. Дмитрів І. В. Львів: 2018. 81 с.

Навчальне видання

Дмитрів Ігор Васильович

АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ. ТЕОРІЯ І ПРАКТИКА НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Навчальний посібник

Авторська редакція
Відповідальний за випуск – Олег Дук

Підписано до друку 11.07.2019 р.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 18,4. Зам. № 68/03-07.

Видавництво „СПОЛОМ”
79008 Україна, м. Львів, вул. Краківська, 9. Тел.: (380-32) 297-55-47.
E-mail: spolom_lviv@ukr.net.
Свідоцтво суб’єкта видавничої діяльності:
Серія ДК, № 2038 від 02.02.2005 р.

Друк ФОП Гуменецький М. В. 81630 Львівська обл.,
Миколаївський р-н, с. Гонятичі, вул. Польова, 10.
Свідоцтво фізичної особи підприємця:
№ 083631 від 18.08.2008 р.