УДК 621.91:621.391

І.Ю. Ісаєв, Г.Р. Трохим, І.М. Яворський
Фізико-механічний інститут ім.Г.В.Карпенка НАН України,
відділ відбору та обробки стохастичних сигналів

ВЛАСТИВОСТІ ВЗАЄМНОЇ СПЕКТРАЛЬНОЇ ГУСТИНИ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

У статті подані вирази для взаємної кореляційної функції нестаціонарних випадкових процесів. Досліджуються властивості взаємної спектральної густини та її компонентів розкладу в ряд Фур'є у припущенні періодичної корельованості процесів.

In this paper expressions for the cross correlation function of non-stationary random processes are showing. The properties of cross spectral density and its decomposition components in Fourier series are investigated.

Для задачі дефектоскопії рейок залізничної колії, за результатами дослідження властивостей сукупних змін рейок можуть бути дані рекомендації щодо пошуку та локалізації дефектів. Якісні та енергетичні характеристики цих змін можна дослідити за допомогою взаємної кореляційної функції та взаємної спектральної густини. Враховуючи апріорні відомості про спосіб відбору сигналів збурення рейок залізничної колії [1], можемо припускати їх періодичну структуру, основним періодом якої виступає міжшпальний інтервал. В такому разі виявляється доцільним розглядати сигнали збурення з точки зору нестаціонарності в часі. Такий підхід приводить до необхідності вивчити властивості нестаціонарних взаємно кореляційної функції та взаємної спектральної густини.

Розглянемо два періодично корельованих випадкових процеси (ПКВП) $\xi(t)$ і $\eta(t)$. Моментні функції цих процесів періодичні за часом з періодом корельованості T: $m_\xi(t+T)=m_\xi(t)$, $m_{\eta\xi}(t+T)=m_\eta(t)$, $b_\xi(t+T,u)=b_\xi(t,u)$, $b_\eta(t+T,u)=b_\eta(t,u)$ [2].

Ступінь сукупної зміни процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ описується взаємною кореляційної функцією [3]:

$$b_{\xi\eta}(t+T,u)=b_{\xi\eta}(t,u)=E\left[\overset{\circ}{\xi}(t)\,\overset{\circ}{\eta}(t+u)\right],$$

де θ - довжина реалізації процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$, u - зсув.

При нульовому зсуві маємо: $b_{\xi\eta}(t,0)=b_{\eta\xi}(t,0)$.

Взаємно кореляційна функція обмежена за амплітудою:

$$\left|b_{\xi\eta}(t,u)\right|\le\sigma_\xi(t)\sigma_\eta(t+u).$$

Для статистично незалежних процесів $b_{\xi\eta}(t,u)=b_{\eta\xi}(t,u)=0$.

Властивості симетрії мають вигляд:

$$b_{\xi\eta}(t,u)=b_{\eta\xi}(t+u,-u), \qquad b_{\xi\eta}(t,-u)=b_{\eta\xi}(t-u,u).$$

В силу періодичності, $b_{\xi\eta}(t,u)$ допускає розклад в ряд Фур'є:

$$b_{\xi\eta}(t,u) = \sum_{k\in Z} B_k^{\xi\eta}(u)\exp\left(ik\frac{2\pi}{T}t\right),$$

де $$B_k^{\xi\eta}(u) = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} b_{\xi\eta}(t,u)\exp\left(-ik\frac{2\pi}{T}t\right)dt.$$

Для від'ємних зсувів $B_k^{\xi\eta}(-u) = B_k^{\eta\xi}(u)\exp\left(-ik\frac{2\pi}{T}u\right)$.

Кореляційні компоненти взаємно кореляційної функції також є комплексними. Подамо $B_k^{\xi\eta}(u)$ через парну і непарну частини:

$$B_k^{(\xi\eta)c}(u) = B_k^{\xi\eta}(u) + B_{-k}^{\xi\eta}(u) = \frac{2}{T}\int_0^T b_{\xi\eta}(t,u)\cos\frac{2\pi}{T}tdt,$$

$$B_k^{(\xi\eta)s}(u) = B_{-k}^{\xi\eta}(u) - B_k^{\xi\eta}(u) = \frac{2}{T}\int_0^T b_{\xi\eta}(t,u)\sin\frac{2\pi}{T}tdt.$$

тоді $$B_k^{\xi\eta}(u) = \frac{1}{2}\left[B_k^{(\eta\xi)c}(u) - iB_k^{(\eta\xi)s}(u)\right].$$

За аналогією з теоремою Вінера-Хінчина, запишемо вираз для взаємної спектральної густини, як Фур'є-перетворення взаємної кореляційної функції:

$$f_{\xi\eta}(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b_{\xi\eta}(t,u)e^{-i\omega u}du, \quad f_{\eta\xi}(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b_{\eta\xi}(t,u)e^{-i\omega u}du.$$

Взаємна спектральна густина є комплекснозначною функцією і за допомогою парної $b_{\xi\eta}^c(t,u)$ та непарної $b_{\xi\eta}^s(t,u)$ частин взаємної кореляційної функції, де

$$b_{\xi\eta}^c(t,u) = \frac{1}{2}\left[b_{\xi\eta}(t,u) + b_{\xi\eta}(t,-u)\right], \quad b_{\xi\eta}^s(t,u) = \frac{1}{2}\left[b_{\xi\eta}(t,u) - b_{\xi\eta}(t,-u)\right],$$

може бути подана через дійсну і уявну частини:

$$f_{\xi\eta}(\omega,t) = \operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\omega,t) - i\operatorname{Im} f_{\xi\eta}(\omega,t) = c_{\xi\eta}(\omega,t) - iq_{\xi\eta}(\omega,t),$$

де

$$c_{\xi\eta}(\omega,t) = \operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b_{\xi\eta}(t,u)\cos\omega u du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} b_{\xi\eta}^c(t,u)\cos\omega u du,$$

$$q_{\xi\eta}(\omega,t) = \operatorname{Im} f_{\xi\eta}(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b_{\xi\eta}(t,u)\sin\omega u du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} b_{\xi\eta}^s(t,u)\sin\omega u du.$$

За аналогією зі стаціонарним випадком, назвемо $c_{\xi\eta}(\omega,t)$ - коспектром, а $q_{\xi\eta}(\omega,t)$ - квадратурним спектром. Тоді $A_{\xi\eta}(\omega,t) = c_{\xi\eta}^2(\omega,t) + q_{\xi\eta}^2(\omega,t)$ - амплітуда спектра. В експоненціальному вигляді отримаємо:

$$f_{\xi\eta}(\omega,t) = \sqrt{A_{\xi\eta}(\omega,t)}e^{-i\operatorname{arctg}\frac{c_{\xi\eta}(\omega,t)}{q_{\xi\eta}(\omega,t)}}.$$

Властивість симетрії взаємної спектральної густини за частотою має вигляд:

$$f_{\xi\eta}(-\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}b_{\xi\eta}(t,u)e^{i\omega u}du=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{b_{\xi\eta}(t,u)e^{-i\omega u}}du=\overline{f_{\xi\eta}(\omega,t)}.$$

Звідси знаходимо, що дійсна частина $f_{\xi\eta}(\omega,t)$ є парною функцією частоти, а уявна частина - непарною.

В силу періодичності процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ за часом з періодом корельованості T, при умові існування інтегралу $\int\limits_0^T\left|f_{\xi\eta}(\omega,t)\right|<\infty$, взаємна спектральна густина має розклад в ряд Фур'є по базисних функціях:

$$f_{\xi\eta}(\omega,t)=\sum_{k\in Z}f_k^{\xi\eta}(\omega)e^{ik\omega_0 t},$$

де $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$. Компоненти розкладу взаємної спектральної густини мають вигляд:

$$f_k^{\xi\eta}(\omega)=\frac{1}{\theta}\int\limits_0^{\theta}f_{\xi\eta}(\omega,t)e^{-ik\omega_0 t}dt,$$

де θ - довжина реалізації процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$.

$$f_k^{\xi\eta}(\omega)=\frac{1}{\theta}\int\limits_0^{\theta}f_{\xi\eta}(\omega,t)e^{-ik\omega_0 t}dt=\frac{1}{\theta}\int\limits_0^{\theta}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}b_{\xi\eta}(t,u)e^{-i\omega u}du\right]e^{-ik\omega_0 t}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi\theta}\int\limits_0^{\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{l\in Z}B_l^{\xi\eta}(u)e^{il\omega_0 t}\right]e^{-i\omega u}e^{-ik\omega_0 t}dudt=\frac{1}{2\pi\theta}\sum_{l\in Z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_l^{\xi\eta}(u)e^{-i\omega u}\left[\int\limits_0^{\theta}e^{i(l-k)\omega_0 t}dt\right]du.$$

Оскільки $\int\limits_0^{\theta}e^{i(l-k)\omega_0 t}dt=\begin{cases}0, & l\neq k,\\ \theta, & l=k,\end{cases}$ тоді $f_k^{\xi\eta}(\omega)$ і $B_k^{\xi\eta}(u)$ є парою взаємних перетворень Фур'є:

$$f_k^{\xi\eta}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_k^{\xi\eta}(u)e^{-i\omega u}du,\qquad B_k^{\xi\eta}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_k^{\xi\eta}(\omega)e^{i\omega u}d\omega.$$

Розглянемо властивості компонентів взаємної кореляційної функції. За допомогою парної $B_k^{\xi\eta(c)}(u)$ та непарної $B_k^{\xi\eta(s)}(u)$ частин компонентів взаємно кореляційної функції вираз для компонентів взаємної кореляційної функції набуде вигляду

$$f_k^{\xi\eta}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_k^{\xi\eta}(u)\left[\cos\omega u-i\sin\omega u\right]du=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left[B_k^{\xi\eta(c)}(u)\cos\omega u-iB_k^{\xi\eta(s)}(u)\sin\omega u\right]du..$$

Отже, компоненти є комплекснозначними:

$$f_k^{\xi\eta}(\omega)=\mathrm{Re}\,f_k^{\xi\eta}(\omega)-i\,\mathrm{Im}\,f_k^{\xi\eta}(\omega)=c_k^{\xi\eta}(\omega)-iq_k^{\xi\eta}(\omega),$$

де

$$\operatorname{Re} f_k^{\xi\eta}(\omega) = c_k^{\xi\eta}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_k^{\xi\eta}(u)\cos\omega u du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} B_k^{\xi\eta(c)}(u)\cos\omega u du,$$

$$\operatorname{Im} f_k^{\xi\eta}(\omega) = q_k^{\xi\eta}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_k^{\xi\eta}(u)\sin\omega u du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} B_k^{\xi\eta(s)}(u)\sin\omega u du.$$

Оскільки

$$f_k^{\xi\eta}(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_k^{\xi\eta}(u)e^{i\omega u}du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{B_{-k}^{\xi\eta}(u)e^{-i\omega u}}du = \overline{f_{-k}^{\xi\eta}(\omega)},$$

та

$$f_k^{\xi\eta}(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_k^{\xi\eta}(-u)e^{-i\omega u}du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_k^{\eta\xi}(u)e^{-ik\omega_0 u}e^{-i\omega u}du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_k^{\eta\xi}(u)e^{-i(\omega+k\omega_0)u}du = \overline{f_{-k}^{\xi\eta}(\omega)},$$

тоді

$$f_k^{\xi\eta}(-\omega) = \overline{f_{-k}^{\xi\eta}(\omega)} = f_k^{\eta\xi}(\omega + k\omega_0).$$

Нульовий компонент взаємної спектральної густини володіє всіма властивостями взаємної спектральної густини стаціонарних випадкових процесів і є комплекснозначною функцією: $f_0^{\xi\eta}(\omega) = \overline{f_0^{\eta\xi}(\omega)}$.

Дійсну та уявну частини взаємної спектральної густини можна подати за допомогою компонентів так:

$$c_{\xi\eta}(\omega,t) = \sum_{k\in Z}\left[c_k^{\xi\eta}(\omega)\cos k\omega_0 t + q_k^{\xi\eta}(\omega)\sin k\omega_0 t\right],$$

$$q_{\xi\eta}(\omega,t) = \sum_{k\in Z}\left[q_k^{\xi\eta}(\omega)\cos k\omega_0 t - c_k^{\xi\eta}(\omega)\sin k\omega_0 t\right].$$

Висновки

Для задачі дефектоскопії рейок залізничної колії дослідження властивостей взаємних кореляційної функції, спектральної густини та їх компонентів розкладу в ряди Фур'є становлять інтерес з погляду вибору діагностичних параметрів.

1. Ісаєв І., Трохим Г., Яворський І. Статистичний аналіз ритмічних сигналів для діагностики стану рейок// Праці П'ятої Всеукр. міжнар. конф. «Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів» (УкрОБРАЗ'2000), 27 листопада-1 грудня 2000 р., С.113-116.. 2. Я.П.Драган, В.А.Рожков, И.Н.Яворский Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. - Л.: Гидрометеоиздат. - 1987. 3. І.Ю.Ісаєв, Г.Р.Трохим Порівняльні властивості авто- і взаємно-кореляційних функцій // Матеріали XVI відкритої науково-технічної конференції молодих науковців і спеціалістів ФМІ НАН України. - Львів-2001. - С.162-165.