# Про єдиний алгоритм визначення значень густини, потенціалу та енергії одновимірного розподілу мас еліпсоїдальної планети

Михайло Фис, Володимир Нікулішин

КафедраТМОГВ, Національний університет “Львівська політехніка”, УКРАЇНА, м.Львів, вул.С.Бандери, 12,

***The algorithm of 1D density distributien approximation by Legendre polinomials is presented. Based on this approximation the internal gravity potential and potential gravity energy of ellipsoid waz estimated.***

Ключові слова – approximation, Legendre polinomials, gravity potential, potential gravity energy, ellipsoid .

## I. Вступ

Основою для досліджень внутрішньої будови планет $\tau$ є функція розподілу мас δ, яка визначає інтегральні характеристики (потенціал, прискорення сили ваги, гравітаційна енергія). На сучасному етапі створені одновимірні моделі розподілу мас $\delta(\rho)$, які достатньо добре описують структуру в середині тіла $\tau$. Наприклад, для сферичної поверхні Землі побудовані моделі PEM[6], PREM[7] , в яких густина подється поліномами за змінною $\rho$. Для інших небесних тіл існують гіпотетичні сферично-симетричні моделі мас, в яких враховано їхню практику побудови моделі Землі. Отже, є можливість за даним розподілом $\delta$ знайти потенціал $U$ і гравітаційну енергію $E$.

## II.Виклад основного матеріалу

За даним радіальним кусково-неперервним розподілом $\delta$ (для кулі K – сферично-симетричним ) мас всередині еліпсоїдальної планети

$$\tau\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right\}\le 1$$

$$\delta(\rho)=\begin{cases}\delta_0(\rho), & 0\le\rho<\rho_0\\ \delta_1(\rho), & \rho_0\le\rho<\rho_1\\ . & \\ . & \\ . & \\ \delta_m(\rho), & \rho_{m-1}\le\rho\le 1\end{cases}, \qquad (1)$$

визначити внутрішній потенціал $U$ і гравітаційну енергію $E$, для функцій $\delta_i \quad (i=\overline{1,m})$, що мають вигляд

$$\delta_i(\rho)=\sum_{j=0}^{k}a_{ij}\rho^j \text{ і} \qquad (2)$$

$$\delta_i(\rho_l)\ne\delta_i(\rho_{l+1}),\ 0\le l\le m \qquad (3)$$

Зовнішній потенціал V однорідної кульової планети K визначається формулою

$$V=\frac{f\cdot M}{r}, \qquad (4)$$

де $M$ – маса тіла K, $r$ – радіус – вектор біжучої точки $P$ (Рис.1).

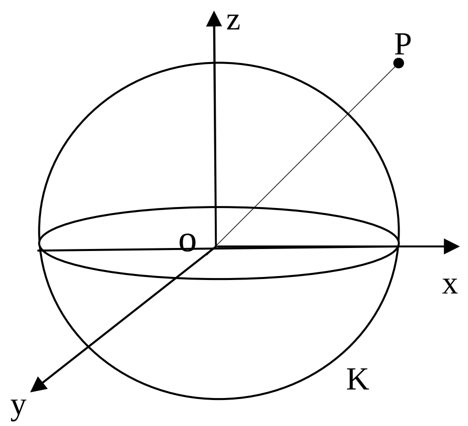



Рис. 1. Геометрична інтерпретація задачі

Зосередимось на побудові алгоритмів знаходження U і E в середині тіла, оскільки навіть для однорідної еліпсоїдальної планети τ значення V подається складним співвідношенням у вигляді квадратичної функції декартових координат x,y,z і величин, залежних від еліпсоїдальних координат ζ [2].

Вважаючи, що функція δ(ρ) визначена для $|\rho|\le 1$ (Рис.2), представимо її у вигляді ряду за поліномами Лежандра парних степенів

$$\delta(\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cdot P_{2n}(\rho)\ . \qquad (5)$$

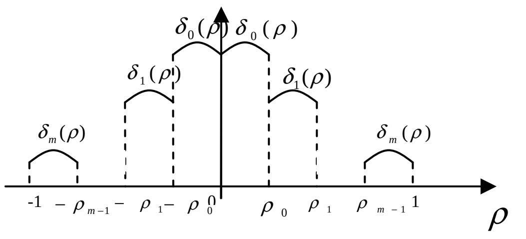
Коефіцієнти $C_n$ визначаються через лінійні комбінації степеневих моментів у вигляді

$$M_l=\int_0^1\delta(\rho)\cdot\rho^{2\cdot l}d\rho \qquad (6)$$

$$C_n=\frac{(4n+1)}{2}\int_{-1}^{1}\delta(\rho)\cdot P_{2n}(\rho)d\rho=$$

$$=(4n+1)\int_0^1\delta(\rho)P_{2n}(\rho)d\rho=$$

$$=(4n+1)\cdot\sum_{l=0}^{n}d_l\int_0^1\delta(\rho)\rho^{2l}d\rho \qquad (7)$$




Ряд (5) збігається в середньому, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left\{\delta(\rho)-\sum_{m=0}^{n}C_m P_{2m}(\rho)\right\}^2 d\rho=0,$$

звідки випливає рівність Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n^2(4n+1)=\int_0^1\delta^2(\rho)d\rho, \qquad (8)$$

яка є критерієм оптимального вибору кількості членів ряду і збіжності співвідношення (1).

Сумування в середньо-квадратичному гарантує рівномірну збіжність ряду

$$U(P)=f\int_\tau\frac{\delta}{r}d\tau=f\sum_{n=0}^{\infty}C_nU_n(P), \qquad (9)$$

де

$$U_n(P)=f\int_\tau\frac{P_{2n}(\rho)}{r(Q,P)}d\tau_Q=\sum_{l=0}^{n}d_l f\int_\tau\frac{\rho^{2l}}{r(Q,P)}d\tau=\sum_{l=0}^{n}d_lW_{2l}(P). \qquad (10)$$

Користуючись методикою, наведеною в монографії [4], запишемо потенціали

$$W_e=\frac{3fV_\tau}{4(l+1)}\int_0^\infty\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}\right)^{l+1}\right]\frac{dU}{Q(U)}, \qquad (11)$$

де $Q(U)=\sqrt{(a^2+u)\cdot(b^2+u)\cdot(c^2+u)}$,

$V_\tau$ – об'єм тіла $\tau$.

Використовуючи формули (2) і (9) визначаємо значення потенціальної енергії

$$E=-\frac{1}{2}\int_\tau\delta U d\tau=-\frac{f}{2}\sum_{n=0}^{\infty}C_n\int_\tau P_{2n}(\rho)d\tau\sum_{m=0}^{\infty}C_mU_m d\tau=-\frac{f}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\tau}C_nC_m\int_\tau P_{2n}(\rho)U_m(\rho)d\tau \qquad (12)$$

Таким чином, обчисливши один раз коефіцієнти $C_n$, здійснюємо апроксимацію густини δ, і за відповідними формулами (5) і (7) обчислюємо U та E.

Перевіримо даний алгоритм на прикладі кулі *K*, для якого можна знайти точні значення *U* і *E* і порівняти їх з обчисленими.

Введемо наступні позначення: $\tau_i$ –куля радіуса $\alpha_i R$,

$G_i$– шар обмежений сферами радіусів: $\rho_i=\alpha_i\cdot R$, $\rho_{i-1}=\alpha_{i-1}\cdot R$.

Еліпсоїдальна координата визначатиметься

$$\xi=\begin{cases}r^2-R^2,\ r>R\\ 0,\quad r\le R\end{cases}.$$

Для функції $\delta=\rho^l=(\rho^2)^{\frac{l}{2}}$ записуємо [4]

$$f(x^2)=\int_0^{x^2}(\rho^2)^{\frac{l}{2}}d(\rho^2)=\frac{2}{l+2}(x^2)^{\frac{l+2}{2}},$$

звідки отримаємо

$$W_l=\begin{cases}\dfrac{3V_{\tau_i}f}{R\cdot(l+2)\cdot\rho}, & \rho>1\\ \dfrac{3V_{\tau_i}f}{\alpha_iR}\left(1-\dfrac{\rho^{l+2}}{(l+3)\alpha_i^{l+2}}\right), & \rho\le 1,\end{cases}$$

де $\rho=\dfrac{r}{R}$ – відносний радіус, $V_\tau$ – об'єм тіла $\tau_i$.

Тоді зовнішній і внутрішній потенціали кулі $\tau_i$ з розподілом $\delta_i(\rho)$ подаються відповідно

$$V^з_{\tau_i}=\frac{3f}{R\cdot\rho}\sum_{l=0}^{k}\frac{a_{il}}{l+2}=\frac{fM_{\tau_i}}{\rho\cdot R},$$

($M_{\tau_i}$ – маса тіла $\tau_i$), (13)

$$U^в_{\tau_i}=\frac{3V_{\tau_i}}{R}\sum_{l=0}^{k}\frac{a_{ik}}{l+2}\left(1-\frac{\rho^{l+2}}{\alpha_i^{l+2}(l+3)}\right). \qquad (14)$$

Всередині тіла $G_i$ для $i>0$ маємо

$$U_{G_i}=U_{\tau_i}-U_{\tau_{i-1}}=\frac{3V_k}{R}\left[\sum_{l=0}^{i-1}\frac{a_{il}}{l+2}\left(\alpha_i^3-\alpha_{i-1}^3-\frac{\rho^{l+2}}{l+3}\left(\frac{1}{\alpha_i^{l-1}}-\frac{1}{\alpha_{i-1}^{l-1}}\right)\right)\right],$$

і $U_{G_0}=U_{\tau_0}$.

Згідно теореми Айворі [4] значення потенціалу в порожнині $G_i$ є постійним і його найпростіше знайти в центрі кулі $\tau_i$, тобто

$$U_{G_i}(0)=\int_{G_i}\frac{\delta_i(\rho)}{r}d\tau=\sum_{l=0}^{k}a_{il}\int_0^{\rho_i}\rho^l\rho d\rho\cdot\frac{3V_k}{R}=\frac{3V_k}{R}\sum_{l=0}^{k}\frac{a_{il}\cdot\rho_i^{l+2}}{l+2}.$$

Для i>0 сукупність формул можна записати у вигляді

$$U_{G_i}(P)=\begin{cases}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{f\cdot M_{G_j}}{R\cdot\rho}+\frac{3V_k}{R}f\sum_{l=0}^{k}\frac{a_{il}}{l+2}\left(\alpha_i^3-\alpha_{i-1}^3-\frac{\rho^{l+2}}{l+3}\left(\frac{1}{\alpha_i^{l-1}}-\frac{1}{\alpha_{i-1}^{l-1}}\right)\right), & P\in G_i,\\ \frac{fV_k}{R}\sum_{l=0}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}\frac{a_{jl}}{l+2}(\rho_i^{l+2}-\rho_{i-1}^{l+2}), & P\in\bigcup_{j=1}^{i-1}G_j,\\ \sum_{j=0}^{i-1}\frac{f\cdot M_{G_j}}{R\cdot\rho} & P\notin\bigcup_{j=1}^{i}G_i,\end{cases} \qquad (15)$$

а коли i=0 то матимемо

$$U_{G_0}(P)=\frac{V_k}{R}\left\{3\sum_{l=0}^{k}\frac{a_{0l}}{l+2}\left(\alpha_0^3-\frac{\rho^{l+3}}{l+3}\cdot\frac{1}{\alpha_0^{i-1}}\right)+\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{k}\frac{a_{jl}\cdot\rho_i^{l+2}}{l+2}\right\}. \qquad (16)$$

Підставляючи вирази (15), (16) в співвідношення (12) для енергії E отримаємо остаточну формулу, яку не приводимо (у зв'язку з громіздкістю).

Розглянемо конкретний приклад.

Знайти внутрішній потенціал U та енергію в середині одиничної кулі з $\delta_m=\sqrt{\rho}$.

За визначеними степеневими моментами $M_{2k} = \frac{2}{4k+3}$ апроксимуємо функцію $\delta_m$ рядом (5), із оптимальною кількістю членів, що дорівнює 50, для $S_a = 0.499995$ (теоретичне значення $S_m = \int_0^1 \delta^2(\rho)d\rho = 0{,}5$).

Далі визначаємо значення внутрішнього потенціалу $U_a$ за формулами (5), (7), (15) та відповідні теоретичні значення

$$U_m = \frac{6}{5}\left(1 - \frac{2}{7}\rho^{\frac{5}{2}}\right),\ 0 \le \rho \le 1.$$

Результати занесено в таблицю.

Порівняння теоретичних значень $\delta_m, U_m$ і апроксимаційних і $\delta_a,\ U_a$

| ρ | Значення густини | | Значення потенціалу | |
|---|---|---|---|---|
| | $\delta_a$ | $\delta_m$ | $U_a$ | $U_m$ |
| 0.0 | 0.0250072 | 0.0000000 | 1.2000000 | 1.2000000 |
| 0.1 | 0.3165041 | 0.3162278 | 1.1989159 | 1.1989158 |
| 0.2 | 0.4474749 | 0.4472136 | 1.1938671 | 1.1938668 |
| 0.3 | 0.5477847 | 0.5477226 | 1.1830990 | 1.1830988 |
| 0.4 | 0.6322026 | 0.6324555 | 1.1653050 | 1.1653053 |
| 0.5 | 0.7142857 | 0.7071068 | 1.1393911 | 1.1393908 |
| 0.6 | 0.7744211 | 0.7745967 | 1.1043927 | 1.1043926 |
| 0.7 | 0.8365385 | 0.8366600 | 1.0594409 | 1.0594411 |
| 0.8 | 0.8944955 | 0.8944272 | 1.0037372 | 1.0037371 |
| 0.9 | 0.9488155 | 0.9486833 | 0.9365372 | 0.9365371 |
| 1.0 | 1.0006086 | 1.0000000 | 0.8571429 | 0.8571429 |

Значення енергії за отриманою наближеною формулою буде $E_a = 0{,}428568$, а теоретичне – $E_m =$ 0,428571.

## Висновок

Отже, в неперервному випадку для кулі апроксимаційні формули добре відображають істинні значення, а тому можуть бути використані для обчислення величин U та E . Оскільки для еліпсоїдальної планети обчислення потенціалу U та енергії E за точними формулами можливе, але надзвичайно громіздке і фактично нездійсненне, тому отримані наближені співвідношення є практично єдиним апаратом визначення значень потенціалу U та енергії E.

## References


[1] Картвелишвили К.М. Планетарная плотностная модель и нормальное поле Земли.:М. Наука, 1983, 93с. [2] Мещеряков Г.А. О среднем значении внутреннего гравитационного потенциала Земли. // Геодезия, картография и аерофотосъемка. – Львов, 1974. Вып. 19. – С.61-62.

[3] Мещеряков Г.А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. - 1991,216 с.

[4] Муратов Р.З. “Потенциалы елипсоида”, Москва, Атомиздат, 1976, 144с.

[5] Фис М., Заяць О. , Фоца Р. , Волос В. . Про один метод визначення потенціалу неоднорідної еліпсоїдальної планети. “Сучасні досягнення геодезичної науки та вироб-ництва ”, 2005 ст. 41-42.

[6] Dziewonski A.M., Halls A.L., Lapwyyd E.R. Parametricaly Simple Earth mjdels,consisnent geophysical data .-Phys. Planet .Inter.,10,1975,p.12-48.

**[7]** Dziewonski A.M., Anderson D.L. Preliminary reference Earth model. – Physics of the Earth and Planet. Inter., 25, 1981, p.297-356.