

УДК 621.396.2

Л.О. Тігаренко

Харківський національний університет радіоелектроніки,
кафедра телекомунікаційних систем

ІМОВІРНІСНИЙ ПІДХІД ДО СИНТЕЗУ РОБАСТНИХ АЛГОРИТМІВ АДАПТИВНОЇ ПРОСТОРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

© Тігаренко Л.О., 2002

Робота присвячена аналізу та синтезу алгоритмів адаптивної просторової обробки сигналів з неточно відомими параметрами. Проаналізовано випадок розповсюдження результатів традиційної теорії обробки сигналів на випадок сигналів з неточно відомими параметрами. Наведено графіки якості алгоритмів, які є результатом імітаційного моделювання.

The work is devoted to the problem of the analysis and synthesis of adaptive signal processing algorithms for the signals with not exact parameters knowledge. The instance of the traditional signal processing theory extension for the case of signals with not exact parameters knowledge is analyzed. The diagrams of algorithms quality received as a result of imitating modeling are given.

Апріорна невизначеність про властивість сигналу типова для більшості практично важливих застосувань. Однак традиційні алгоритми в таких умовах не тільки не забезпечують оптимізацію адаптивної просторової обробки сигналів (АПОС), але можуть виявитися цілковито недієздатними. Тому проблема синтезу алгоритмів АПОС, які здатні достатньо ефективно функціонувати в умовах апріорної невизначеності про властивість сигналу (вектору сигналу), дуже актуальна. При цьому задача синтезу таких алгоритмів звичайно формулюється як задача зниження чутливості процедур, які реалізують оптимальні вектори вагових коефіцієнтів (ВВК), до похибок апріорних даних про вектор корисного сигналу. Розв'язок таких задач прийнято називати робастними алгоритмами АПОС. Під "зниженою чутливістю" розуміють повільніше спадання вихідного відношення сигнал/(завада+шум) (ОВЗШ) як функції величини, яка характеризує помилку у апріорних даних порівняно з аналогічною функціональною залежністю, яка існує у випадку алгоритмів, які реалізують відповідні оптимальні ВВК.

Проаналізувавши результати робіт, які присвячені проблемі АПОС з неточно відомими параметрами, можна виділити два основних підходи до аналізу і синтезу робастних алгоритмів: імовірнісний та детерміністський. Розглянемо перший.

Імовірнісний підхід збудовано на урахуванні апріорної невизначеності про сигнал введенням у модель вектора $\tilde{S}(t)$ випадкових складових, які інтерпретуються як флуктуації амплітуд та фаз сигналів $s_j(t)$ на виходах антенних елементів (АЕ). Такий підхід достатньо адекватний для випадку, коли основним джерелом апріорної невизначеності виявляються випадкові флуктуації власно АЕ або коефіцієнтів підсилення приймальних каналів та первісно застосовувався у задачах аналізу якості традиційних алгоритмів АПОС [1]. Подальший імовірнісний підхід розповсюджено безпосередньо на задачі синтезу робастних

алгоритмів. При цьому вихідні сигнали АЕ або власне вихідний сигнал антенної решітки (АР) преднамірено викривляють за допомогою додатково генерованих псевдовипадкових процесів, які моделюють помилки у апіорних даних, та використовують для отримання ВВК на основі алгоритмів, які реалізують ВВК $\bar{W}_{МВСЗ}$, $\bar{W}_{МВПВ}$ и $\bar{W}_{МСКВ}$.

Отже, при імовірнісному підході синтез робастних алгоритмів зводиться до викривлень безпосередньо сигналів, що наглядаються. Принциповою особливістю цього підходу є припущення про випадкову природу просторової структури корисного сигналу.

Слід відмітити, що при імовірнісному, як і при детерміністському підході усі конкретні рішення мають евристичний та суто якісний характер. Єдине, що можна сказати про такі алгоритми - що вони "менш чутливі", ніж процедури, які безпосередньо реалізують оптимальні ВВК. При цьому, як правило, не використовується ніякої кількісної міри "зниження чутливості" та можливість застосування алгоритмів обґрунтовується імітаційним моделюванням

На основі справедливості гіпотези про розділення просторової та часової структур сигналу, який наглядається на виходах АЕ, вектор $\bar{S}(t)$ зобразимо у вигляді $\bar{S}(t) = s(t)\bar{V}_s$. При цьому вектор $\bar{V}_s = [a_1(\Theta_s) e^{j\varphi_{1s}} a_2(\Theta_s) e^{j\varphi_{2s}} \dots a_N(\Theta_s) e^{j\varphi_{Ns}}]^T$ визначає просторову структуру сигналу та містить усю необхідну інформацію для застосування алгоритмів АПОС.

Аналогічно роботі [1] припустимо, що амплітуди та фази сигналів на виходах АЕ містять випадкові складові, тобто вектор $\bar{S}(t)$ має вигляд $\bar{S}(t) = s(t)\bar{\bar{V}}_s$, де $\bar{\bar{V}}_s = [(a_1(\Theta_s) + \bar{a}_1) e^{j(\varphi_{1s} + \bar{\varphi}_1)} (a_2(\Theta_s) + \bar{a}_2) e^{j(\varphi_{2s} + \bar{\varphi}_2)} \dots (a_N(\Theta_s) + \bar{a}_N) e^{j(\varphi_{Ns} + \bar{\varphi}_N)}]^T$; $\bar{a}_k = \bar{a}_k(t)$, $\bar{\varphi}_k = \bar{\varphi}_k(t)$, $k = \overline{1, N}$ - незалежні випадкові процеси, які описують амплітудні та фазові помилки. Припустимо також, що амплітудні та фазові флуктуації взаємно незалежні та при цьому $E\{\bar{a}_k \bar{a}_1^*\} = E\{\bar{\varphi}_k \bar{\varphi}_1^*\} = 0 \forall k \neq 1$; $E\{\bar{\varphi}_k\} = E\{\bar{a}_k\} = 0 \forall k = \overline{1, N}$; $E\{\bar{a}_k^2\} = \sigma_{ka}^2$, $E\{\bar{\varphi}_k^2\} = \sigma_{k\varphi}^2$. Крім того, вважаючи, що амплітудні та фазові помилки достатньо малі, згідно з [1] запишемо

$$(a_k(\Theta) + \bar{a}_k) e^{j(\varphi_{ks} + \bar{\varphi}_k)} \approx (a_k(\Theta_s) + \Delta \bar{g}_k) e^{j\varphi_{ks}}, \quad \Delta \bar{g}_k = \bar{a}_k + j\varphi_k. \quad (1)$$

Використовуючи (1) вектор $\bar{\bar{V}}_s$ подамо у вигляді

$$\bar{\bar{V}}_s = \bar{V}_s + \Delta \bar{V}_s, \quad \Delta \bar{V}_s = [\Delta \bar{g}_1 e^{j\varphi_{1s}} \Delta \bar{g}_2 e^{j\varphi_{2s}} \dots \Delta \bar{g}_N e^{j\varphi_{Ns}}]^T. \quad (2)$$

На підставі (2) безпосередньо отримаємо кореляційну матрицю (КМ)

$$R_{\bar{\bar{S}}\bar{\bar{S}}} = E\{\bar{\bar{S}}(t)\bar{\bar{S}}^H(t)\} = R_{\bar{S}\bar{S}} + G, \quad (3)$$

де $R_{\bar{\bar{S}}\bar{\bar{S}}} = P_s \bar{V}_s \bar{V}_s^H$; $G = P_s G'$; $G' = \text{diag}\{\sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_N^2\} \sigma_k^2 = \sigma_{ka}^2 + \sigma_{k\varphi}^2$.

З виразу (3) видно, що при наявності некорельованої випадкової флуктуації істина КМ $R_{\bar{\bar{S}}\bar{\bar{S}}}$ відрізняється від припущеної $R_{yy} = \beta R_{\bar{S}\bar{S}} = \bar{V}_s \bar{V}_s^H$ тільки значеннями діагональних елементів. При цьому, якщо припустити, що $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \dots = \sigma_N^2$, то $G = \sigma_0^2 I$ та діагональні елементи матриць $R_{\bar{\bar{S}}\bar{\bar{S}}}$ и R_{yy} різняться між собою на одну і ту ж величину. Отже, у розглянутому випадку залишаються справедливими вирази для оптимальних ВВК, які

отримані з використанням гіпотези про розділення просторової та часової структур сигналу. Так, у випадку критерію МВСЗ маємо

$$\bar{\bar{W}}_{\text{МВСЗ}} = \beta R_{\text{xx}}^{-1} \bar{\bar{V}}_y, \quad R_{\text{xx}} = R_{\text{ss}} + R_{\text{шш}}, \quad \bar{\bar{V}}_y = \beta \bar{\bar{V}}_s. \quad (4)$$

З (4) випливає, що при заміні \bar{R}_{xx} , відповідною оцінкою $\hat{\bar{R}}_{\text{xx}}$, наприклад $\hat{\bar{R}}_{\text{xx}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \bar{\bar{X}}(k) \bar{\bar{X}}^H(k)$ ($\bar{\bar{X}}(k) = \bar{\bar{S}}(k) + \bar{\bar{P}}(k) + \bar{\bar{\Pi}}(k)$ - вектор, який наглядається на виходах АЕ), алгоритми АПОС можуть бути зображені у традиційному вигляді.

Поданий висновок дозволяє визначити конкретні способи утворення робастних процедур. Дійсно, задавши фіксоване значення величини помилки у апіорних даних $\delta_0 = \|R_{\text{yy}} - R_{\text{ss}}\|_{\text{B}}$ ($\delta_{01} = \|\bar{\bar{V}}_y - \bar{\bar{V}}_s\| \|\bar{\bar{V}}_y\| = \|\bar{\bar{V}}_s\|$) та вводячи позначення ($\bar{W}_1 = \lim_{(P_s/\sigma_{\text{ш}}^2) \rightarrow \infty} \bar{\bar{W}}_{\text{МВСЗ}}$),

$\bar{W}_2 = \lim_{(P_s/\sigma_{\text{ш}}^2) \rightarrow \infty} \bar{\bar{W}}_{\text{МВСЗ}}$, приходимо до нерівності

$$\bar{W}_1^H R_{\text{ss}} \bar{W}_1 < \bar{W}_2^H R_{\text{ss}} \bar{W}_2. \quad (5)$$

У справедливості (5) неважко переконатися, враховуючи нерівність $\text{cond} R_{\text{xx}} < \text{cond} \bar{\bar{R}}_{\text{xx}}$, яке виходить з застосування до ідентично нормованих матриць $R_{\text{xx}}, R_{\text{xx}}$ теореми Гершгоріна [2]. Однак, можна показати, що для будь-яких $\delta_0, P_s/\sigma_{\text{ш}}^2$ існують значення дисперсій $\sigma_{\text{ка}}^2, \sigma_{\text{кф}}^2$ (існує така матриці G в (3)), що $\bar{\bar{W}}_{\text{МВСЗ}}^H R_{\text{ss}} \bar{\bar{W}}_{\text{МВСЗ}} \geq \bar{W}_{\text{МВСЗ}}^H R_{\text{ss}} \bar{W}_{\text{МВСЗ}}$. Отже, якщо преднамірено викривити амплітуди та фази сигналів на виходах АЕ за допомогою взаємно та просторово некорельованих випадкових процесів з нульовим математичним доживанням (використати замість вектора $\bar{\bar{X}}(t)$ вектор $\bar{\bar{X}}(t) = \bar{\bar{X}}(t) + \Delta \bar{\bar{V}}_s$), то для будь-якої сигнально-завадової ситуації можна підібрати значення складових вектора $\Delta \bar{\bar{V}}_s$, при яких алгоритми

$$\bar{W}_p = \beta \hat{\bar{R}}_{\text{xx}}^{-1} \hat{\bar{V}}_y, \quad \hat{\bar{R}}_{\text{xx}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \bar{\bar{X}}(k) \bar{\bar{X}}^H(k), \quad (6)$$

$$\bar{W}_p(k+1) = \bar{W}_p(k) + \mu_k \left(\bar{\bar{V}}_y - \hat{\bar{R}}_{\text{xx}} \bar{W}_p(k) \right), \quad (7)$$

$$\bar{W}_p(k) = \bar{W}_p(k-1) + \mu_k \left(\bar{\bar{V}}_y - \bar{\bar{X}}(k) \bar{y}(k) \right) \bar{y}(k) = \bar{W}_p^H(k-1) \bar{\bar{X}}(k), \quad (8)$$

будуть "більш ефективні" (забезпечать більше значення вихідного ВСЗШ) в умовах апіорної невизначеності, ніж відповідні традиційні процедури. Зазначимо, що вказаний підхід можна використовувати практично до усіх алгоритмів АПОС. При цьому ефект, аналогічний дії некорельованих флуктуацій амплітуд і фаз сигналів, може бути досягнутий як за рахунок їх безпосередньої імітації за допомогою давачів псевдо випадкових величин, так і шляхом добавлення до вибіркової КМ $\hat{\bar{R}}_{\text{xx}}$ належним чином сформованої матриці G . У якості прикладу на рис. 1, 2, 3 надані, отримані в [3] графіки, які ілюструють якість традиційних та робастних (алгоритм (6) з $G = \sigma_0^2 I$) процедур АПОС в умовах апіорної невизначеності про властивість сигналу. На рис. 1 показано залежності ВСЗШ на виході просторового фільтра (ПФ) від вхідного відношення сигнал/шум, а на рис. 2 - отримані з

використанням алгоритму (6) залежності вихідного ВСЗШ від абсолютної величини параметра σ_0^2 . Нарешті, на рис. 3 показані криві, які характеризують залежності вихідного ВСЗШ від величини помилки у заданому напрямку приходу сигналу $\Delta\Theta = \Theta_y - \Theta_s$ (Θ_y - припустимий, Θ_s - істинний напрямок приходу сигналу) для традиційних алгоритмів з $\delta_0 = 3$.

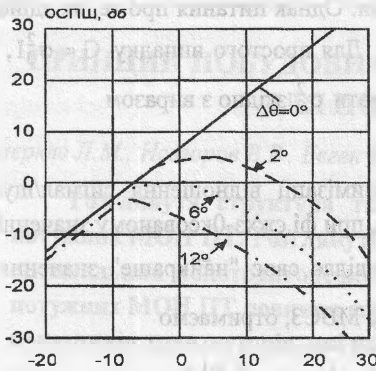


Рис. 1. Залежність вихідного ВСЗШ від вхідного відношення сигнал/шум

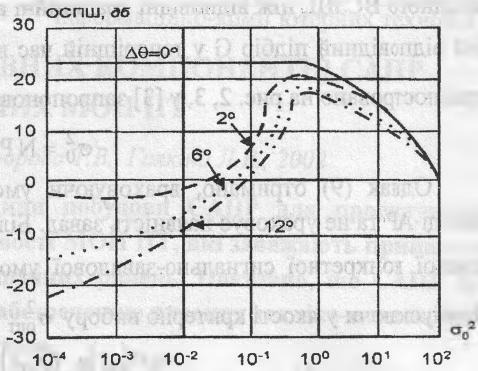


Рис. 2. Залежність вихідного ВСЗШ від величини параметра σ_0^2

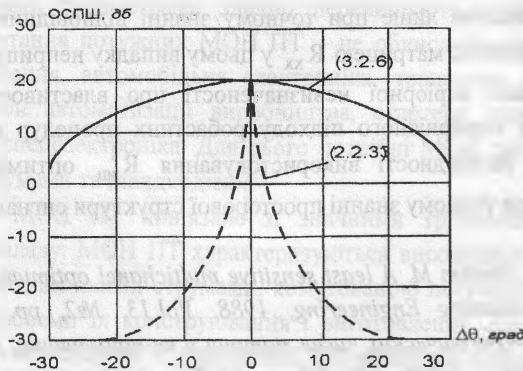


Рис. 3. Залежність вихідного ВСЗШ від величини помилки в заданому напрямку приходу сигналу

При побудові вказаних залежностей використовувались такі припущення про сигнально-завадові умови та характеристики АР: - антенна решітка чотириелементна лінійна, еквідистантна; - проміжок між АЕ дорівнює $m_0/2$; - антенні елементи ізотропні та не взаємодіючі; - вхідне відношення завади/шум $10 \lg P_1 / \sigma_{ш}^2 = 40$ дБ (припускається наявність однієї некорельованої з корисним сигналом завади); - кут приходу завади $\Theta_1 = -50^\circ$; - припущений напрямок приходу сигналу $\Theta_y = 0^\circ$; - істинний кут приходу сигналу Θ_s - змінна величина; - вхідне відношення сигнал/шум $10 \lg P_s / \sigma_{ш}^2 = 20$ дБ; - несуча частота сигналу та завади тотожні. Припускалось також, що несуча частота сигналу,

структура та характеристики АР відомі точно, а замість істинного кута приходу сигналу Θ_s відомий деякий припущений кут Θ_y , тобто єдиним джерелом різниці векторів \bar{V}_y та \bar{V}_s є неточне знання напрямку приходу сигналу.

З графіків (рис. 1 – рис. 3) видно, що в умовах апріорної невизначеності просторової структури сигналу робастні алгоритми АПОС забезпечують суттєво більше значення вихідного ВСЗШ, ніж відповідні традиційні алгоритми. Однак питання про те, як здійснити цей відповідний підбір G у теперішній час відкрито. Для простого випадку $G = \sigma_0^2 I$, який проілюстровано на рис. 2, 3, у [3] запропоновано обирати σ_0^2 згідно з виразом

$$\sigma_0^2 = NP_s / \sqrt{2}. \quad (9)$$

Однак (9) отримано, враховуючи умови максимізації відношення сигнал/шум на виході АР та не ураховує наявність завад. Більш того, при фіксованому значенні $\Delta\Theta$ кожної конкретної сигнально-завадової умови відповідає своє "найкраще" значення σ_0^2 .

Припускаючи у якості критерію вибору $\sigma_{\text{опт}}^2$ критерій МВСЗ, отримасмо

$$\sigma_{\text{опт}}^2 = \text{Argmax} \left(\frac{\bar{W}^H(\sigma_0^2) R_{ss} \bar{W}(\sigma_0^2)}{\bar{W}^H(\sigma_0^2) R_{zz} \bar{W}(\sigma_0^2)} \right), \quad \bar{W}(\sigma_0^2) = \beta (R_{xx} + \sigma_0^2 I)^{-1} \bar{V}_y. \quad (10)$$

Для будь-якої не тривіальної комбінації матриць R_{ss} та R_{zz} значення $\sigma_{\text{опт}}^2$ єдине та його визначення можливе лише при точному знанні відповідних кореляційних матриць (заміна R_{zz} кореляційною матрицею R_{xx} у цьому випадку неприпустима).

Отже, в умовах апріорної невизначеності про властивості сигналу оптимізація отриманих у межах імовірнісного підходу робастних процедур принципово неможлива. Більше того, із-за необхідності використання R_{zz} оптимізація таких алгоритмів неможлива навіть при точному знанні просторової структури сигналу.

1. Hanna M.T., Simaan M. *A least sensitive multichannel optimum filter for sensor arrays.* // *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 1988, Vol.13, №2, pp. 64-69. 2. Пароди М. *Локализация характеристических чисел матриц и ее применения.* Пер. с франц. - М.: Изд-во иностр. л-ры, 1960. 3. Takao K., Kikuma M. *Tamed adaptive antenna array.* // *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 1986, Vol. AP-34, № 3, pp. 388-394.