ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 601, 2007, с. 59–66

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 601, 2007, p. 59–66

ЕКОНОМНІ ІЗОТОПІЇ ЛАМАНИХ НА ПЛОЩИНІ

І.Я. Олексів

Національний університет "Львівська політехніка"
(79013, Львів, вул. С.Бандери 12)

(Отримано 3 вересня 2007 р.)

Побудовано ізотопії між двома простими ламаними A і B на площині, які мають спільні кінцеві точки, за додаткових вимог, щоб проміжні дуги при ізотопіях знаходилися в замиканні об'єднання обмежених компонент доповнення до $A \cup B$ і мали довжини, що не більші за суму довжин A і B.

Ключові слова: поліедр, поліедральний диск, кусково-лінійне відображення, проста крива

2000 MSC: 57N12, 57N37

УДК: 517.51:519.5

Вступ

Важливе місце в топології евклідових просторів займають задачі про продовження відображень з підмножин простору на весь простір і побудову ізотопій між відображеннями і підмножинами у просторах. У таких задачах звичайно зосереджують увагу на топологічних підходах до їх розв'язання. Формулювання нових цікавих задач можна деколи отримати, вимагаючи, щоб множини чи відображення, зокрема, ізотопії мали додаткові властивості ([1] – [3]). Такі задачі можуть потребувати для свого розв'язання не лише топологічних методів.

I. Основні результати

Нехай A – проста ламана на площині E^2. Вкладення A в площину називається *кусково лінійним*, якщо воно є лінійним на кожному симплексі деякої тріангуляції T ламаної A. *Ізотопією* (*кусково лінійною ізотопією*) $H_t : A \to E^2$, $t \in [0;1]$, називається неперервна сім'я вкладень (кусково лінійних вкладень) H_t ламаної A в площину. Якщо $H_t : A \to E^2$ – ізотопія і $H_0 = \mathrm{id} : A \to A$ – тотожне відображення, то кажуть, що H_t переводить A в ламану $H_1(A)$ і записують $H_t : A \to H_1(A)$, $t \in [0;1]$. Якщо ізотопія H_t переводить A в $H_1(A)$, то ізотопія $h_t = H_{1-t} \circ H_1^{-1} : H_1(A) \to A$, $t \in [0;1]$, яка переводить $H_1(A)$ в A, називається *оберненою* до H_t.

Замикання, внутрішність і границю множини D позначатимемо $\overline{D}$, $\mathrm{Int}D$ і ∂D відповідно.

Означення 1. Якщо кусково лінійна ізотопія $H_t : A \to E^2$, $t \in [0;1]$, є тотожною всюди на A, крім відкритої зірки однієї вершини c деякої тріангуляції ламаної A, і для кожних s і t, $0 \le s < t \le 1$, $H_s(c)$ і $H_t(c)$ розташовані на одному і тому самому відрізку $[c; H_1(c)]$ так, що $H_t(c)$ знаходиться між $H_s(c)$ і $H_1(c)$, то ізотопія H_t називається *поштовхом*, який переводить c в $H_1(c)$.

Декілька ізотопій, виконаних послідовно одна за одною, називають добутком ізотопій. Для того, щоб явно записати добуток H_t, $t \in [0;1]$, ізотопій $H_t^1, H_t^2, ..., H_t^n$, потрібно виконати заміну аргументів t в ізотопіях співмножниках (наприклад, як в [4, с.9]). Надалі припускаємо, що така заміна в разі необхідності виконана. З означення 1 випливає, що ізотопія, обернена до поштовху, є поштовхом, а обернена до добутку поштовхів – добутком поштовхів.

Означення 2. Нехай A і B – дві прості ламані на площині, які мають спільні кінцеві точки u і v. Ізотопія $H_t : A \to B$, $t \in [0;1]$, яка переводить A в B, називається *економною*, якщо H_t є нерухомою на u і v (тобто $H_t(u) = u$ і $H_t(v) = v$ для всіх $t \in [0;1]$) і для кожних s і t, $0 \le s < t \le 1$, ламана $H_t(A)$ не має спільних точок з необмеженою компонентою множини $E^2 \backslash (H_s(A) \cup B)$. Будемо говорити, що H_t економно переводить A в B.

Довжину ламаної A позначатимемо довжA. Якщо A і B – дві ламані, які мають спільні кінцеві точки u і v, то позначимо $M(A \cup B)$ – максимум довжин простих ламаних, які мають кінці в u і v і розташовані в $A \cup B$. Із визначення $M(A \cup B)$ випливає:

1) $M(A \cup B) \le$ довж$A +$ довжB;

2) якщо A і B – прості ламані, для яких $A \cap B$ складається лише з двох компонент (одна з них містить u, а інша – v), то $M(A \cup B) = \max($довжA,довж$B)$.

Теорема 1. *Якщо A і B – дві прості ламані на площині, які мають спільні кінцеві точки, то існує економна ізотопія $H_t : A \to B$, $t \in [0;1]$, побудована як добуток поштовхів, для якої* довж$H_t(A) \le$ $\le M(A \cup B) \le$ довж$A +$ довжB.

Якщо A – проста замкнена ламана на площині, то $D(A)$ позначатиме обмежену компоненту $E^2 \backslash A$.

Теорема 2. *Нехай A і B – дві прості замкнені ламані на площині і D_0 – компонента* $\mathrm{Int}D(A) \cap$ $\cap \mathrm{Int}D(B)$. *Тоді існує ізотопія $H_t : A \to B$, $t \in [0;1]$, побудована як добуток поштовхів, така, що для всіх*

$t \in [0;1]$*:1)* $H_t(A)$ *не має спільних точок з* D_0 *і з необмеженою компонентою* $E^2 \backslash (A \cup B)$*;* *2)* довж$H_t(A) \leq$ довж$A +$ довжB.

II. Допоміжні результати

Поліедральний диск D можна розглядати як многокутник на площині; у цьому випадку сторони многокутника D – це максимальні відрізки, з яких складається ∂D, а вершини – кінці цих відрізків. Відомо, що сума кутів n-кутника (тобто многокутника, який має n сторін) становить $\pi(n-2)$. Звідси випливає, що кожен n-кутник має не менше трьох кутів, які менші від π. Діагоналлю многокутника D назвемо відрізок, кінці якого є вершинами ∂D, а всі інші його точки належать Int$D$.

Нехай D – поліедральний диск на площині, T – його тріангуляція, а $\Delta_1^2, ..., \Delta_N^2$ – двовимірні її елементи, $D = \bigcup\limits_{j=1}^{N} \Delta_j^2$. Можна припустити [5, с. 80], що ці елементи упорядковані так, що для кожного $k = 1, ..., N$ об'єднання $\bigcup\limits_{j=1}^{k} \Delta_j^2$ є поліедральним диском. Описане упорядкування двовимірних елементів T називається *вилущенням* D; при цьому говорять, що Δ_N^2 вилущується першим, а Δ_1^2 – останнім. Для будь-якої тріангуляції D і виділеного в ній двовимірного елемента існує таке вилущення, в якому виділений елемент є останнім. Якщо D розглядати як многокутник, то можна побудувати тріангуляцію D за допомогою діагоналей, не вводячи внутрішніх 0-вимірних (тобто тих, що розташовані в Int$D$) елементів тріангуляції.

Якщо A – дуга і x, y – точки на ній, то A_{xy} позначає частину дуги A між точками x і y.

Лема 1. *Нехай A – проста ламана на площині E^2, x і y – дві точки на A такі, що відрізок $[x;y]$ перетинає A лише в точках x і y і диск D_{xy}, обмежений $[x;y] \cup A_{xy}$, не містить у своїй внутрішності точок A. Тоді існує ізотопія $H_t : A \to E^2$, $t \in [0;1]$, побудована як добуток поштовхів, яка:*

1) переводить A в $A^1 = (A \backslash A_{xy}) \cup [x;y]$;

2) є нерухомою на $A \backslash A_{xy}$;

3) для кожних s і t, $0 \leq s < t \leq 1$, $H_t(A) \subset (A \backslash A_{xy}) \cup D_{xy}^s$, де D_{xy}^s – диск, обмежений $[x;y] \cup H_s(A_{xy})$, а тому H_t– економна ізотопія;

4) довж$H_t(A) \leq M(A \cup A^1) = \max($довж$A$, довж$A^1) =$ довжA.

□ *Доведення.* Якщо на відкритій дузі A_{xy} розташована лише одна вершина c, ламаної A, то на інтервалі $(x;y)$ вибираємо довільну точку c_1. Тоді шуканою ізотопією є поштовх, який переводить c в c_1.

Якщо на відкритій дузі A_{xy} розташовано не менше двох вершин A, то тріангулюємо диск D_{xy} за допомогою діагоналей і знаходимо вилущення, в якому трикутник зі стороною $[x;y]$, є останнім. Добуток поштовхів, виконаних послідовно для першого, другого і т.д. елементів вилущення, визначає шукану економну ізотопію A в A^1. Лема доведена. ■

Зауваження 1. Якщо H_t – напівлінійна ізотопія, побудована у доведенні леми 1, і $0 \leq s < t \leq 1$, то $H_s(A) \subset (A^1 \backslash [x;y]) \cup (D_{xy} \backslash IntD_{xy}^t)$.

Наслідок 1. Якщо H_t, $t \in [0;1]$, – напівлінійна економна ізотопія, побудована у доведенні леми 1, то обернена ізотопія $h_t = H_{1-t} \circ H_1^{-1} : H_1(A) \to A$, $t \in [0;1]$, переводить $H_1(A) = A^1$ в A і задовольняє умови:

1) є нерухомою на $A^1 \backslash (x;y)$;

2) для кожних s і t, $0 \leq s < t \leq 1$, $h_t(A^1) \subset$ $\subset (A^1 \backslash [x;y]) \cup (D_{xy} \backslash IntD_{xy}^{1-s})$, а тому h_t – економна ізотопія;

3) довж$h_t(A^1) \leq \max($довжA, довж$A^1) =$ довжA.

Доведення наслідку випливає із зауваження 1, якщо взяти до уваги, що $h_t(A^1) = H_{1-t}(A)$.

Лема 1 і наслідок 1 свідчать також про те, що обидві ізотопії H_t і h_t (пряма і обернена) побудовані як добутки поштовхів і обидві є економними.

Лема 2. *Нехай границю многокутника D на площині складають дві прості ламані A і B, які мають спільними лише свої кінцеві точки і кожна пара сусідніх ланок на A визначає в D кут, який більший від π. Тоді:*

1) довж$A<$довжB*;*

2) існує економна ізотопія H_t, побудована як добуток поштовхів, яка переводить A в B і для якої довж$H_t(A)<M(A \cup B) \leq$ довжB.

Доведення леми виконаємо індукцією за кількістю n ланок A. Під ланкою ламаної A розуміємо максимальний відрізок, що належить A. Якщо $n = 1$, то очевидно, що довж$A<$довжB. Скориставшись наслідком з леми 1, застосованої до ламаної B і відрізка A, можна задовольнити ще і вимогу 2) леми 2.

Припустимо, що лема доведена для всіх $n \leq k$ і доведемо її для $n = k+1$. Нехай u і v – спільні кінці A і B і $[u;u_1]$ – перша від u ланка на A. Продовжимо прямолінійно $[u;u_1]$ поза u_1 до u_1' – першої точки перетину продовження $[u;u_1]$ з ∂D . Покажемо, що $u_1' \in B$. Справді, якщо припустити, що $u_1' \in A$, то дуга $A_{u_1 u_1'}$ разом з $[u_1;u_1']$ обмежує поліедральний диск $D' \subset D$. У цьому диску принаймні один з кутів, які утворені двома послідовними ланками ламаної A, менший від π, що суперечить умовам леми. Отже, $u_1' \in B$.

Ламана $A_{u_1 v}$ має k ланок і разом з $B^1 = [u_1;u_1'] \cup B_{u_1' v}$ задовольняє умови леми 2. Тому за припущенням індукції:

– довж$A_{u_1 v} <$ довж$B^1 = |u_1 - u_1'| +$ довж$B_{u_1' v}$, де $|u_1 - u_1'| =$ довж$[u_1;u_1']$;

– існує економна ізотопія H_t^1, побудована як добуток поштовхів, яка переводить $A_{u_1 v}$ в B^1 і така, що довж$H_t^1(A_{u_1 v}) <$довжB^1.

Продовжимо тотожно H_t^1 на $[u;u_1]$. Тоді отримаємо ізотопію, залишимо для неї позначення H_t^1, яка:

а) переводить A в $B' = [u; u_1'] \cup B_{u_1' v}$;

б) є нерухомою на $A \backslash A_{u_1 v}$;

в) для кожних s і t, $0 \le s < t \le 1$, ламана $H_t^1(A)$ не має спільних точок з необмеженою компонентою $E^2 \backslash (H_s^1(A) \cup B')$ і тим паче з необмеженою компонентою $E^2 \backslash (H_s^1(A) \cup B)$;

г) довж$H_t^1(A)$ <довжB'<довжB.

Остання нерівність випливає з того, що довж$B' = |u - u_1'| +$довж$B_{u_1' v}$ і $|u - u_1| <$ довж$B_{uu_1'}$. Зокрема, якщо $t = 0$, то довж$H_0^1(A) =$ довжA<довжB.

Далі, застосовуючи до B і $[u; u_1']$ наслідок з леми 1, побудуємо за допомогою поштовхів економну ізотопію H_t^2, яка:

д) переводить B' в B;

е) є нерухомою на $B' \backslash [u; u_1']$;

є) для кожних s і t, $0 \le s < t \le 1$, ламана $H_t^2(B')$ не має спільних точок з необмеженою компонентою $E^2 \backslash (H_s^2(B') \cup B)$ і тим паче з необмеженою компонентою $E^2 \backslash (H_s^1(B') \cup B)$;

ж) довж$H_t^2(B')$ <довжB.

Побудуємо ізотопію H_t як добуток ізотопій (поштовхів) H_t^1 і H_t^2 і покажемо, що H_t задовольняє умови означення 2. Очевидно, що H_t переводить A в B і H_t є нерухомою на кінцях A і B (бо такими є H_t^1 і H_t^2). Економність H_t випливає з умов економності в) і є) для H_t^1 і H_t^2, а нерівність довж$H_t(A)$<довжB – з нерівностей г) і ж). Лему 2 доведено. ■

III. Доведення теореми 1

Припущення 1. Прості ламані A і B мають спільними лише свої кінцеві точки u і v. За цієї умови $M(A \cup B) = \max($довжA, довж$B)$. Поліедральний диск, обмежений цими ламаними, позначимо D.

Доведення виконаємо індукцією за кількістю k ланок B. Якщо $k = 1$, то доведення теореми випливає з леми 1, застосованої до ламаної A і відрізка B, який з'єднує її кінці. Нехай теорема справджується для ламаної B, яка має не більше ніж k ланок, $k \ge 1$, і доведемо її за умови, що B має $k+1$ ланок.

1. Припустимо спочатку, що в диску D існує діагональ $[x; y]$, яка з'єднує дві вершини x і y на B. Тоді ламані A і $B' = (B \backslash B_{xy}) \cup [x; y]$ задовольняють умови теореми 1 і B' має не більше, ніж k ланок. Тому на основі припущення індукції побудуємо за допомогою поштовхів економну ізотопію $H_t^1 : A \to B'$, $t \in [0; 1]$, таку, що довж$H_t^1(A) \le \max($довжA, довж$B') \le \max($довжA, довж$B)$. Далі до дуги B і відрізка $[x; y]$ застосуємо наслідок з леми 1 і знову за допомогою поштовхів побудуємо економну ізотопію $H_t^2 : B' \to B$, $t \in [0; 1]$, таку, що довж$H_t^2(B') \le \max($довжB', довж$B) =$ довжB. І, нарешті, побудуємо ізотопію H_t як добуток (тобто послідовне виконання) ізотопій H_t^1 і H_t^2. За допомогою міркувань, аналогічних до викладених в лемі 2, можна переконатися, що H_t – ізотопія, про яку йдеться в теоремі 1. Тому надалі припускатимемо, що в диску D немає діагоналей, які з'єднують вершини на B.

2. Якщо в D існує діагональ $[x_1; y_1]$, яка з'єднує дві вершини x_1 і y_1 на A, то позначимо $A^1 = (A \backslash A_{x_1 y_1}) \cup [x_1; y_1]$ і, застосовуючи лему 1, побудуємо за допомогою поштовхів економну ізотопію $H_t^1 : A \to A^1$, нерухому на $A \backslash A_{x_1 y_1}$, і таку, що довж$H_t^1(A) \le \max($довжA, довж$A^1) =$ довжA. Ламана A^1 має меншу кількість ланок, ніж A і разом з B обмежує поліедральний диск D^1, $D^1 \subset D$. Далі, якщо в D^1 існує діагональ $[x_2; y_2]$, яка з'єднує дві вершини x_2 і y_2 на A^1, то для ламаних A^1 і $A^2 = (A^1 \backslash A^1_{x_2 y_2}) \cup [x_2; y_2]$ побудуємо за допомогою поштовхів економну ізотопію $H_t^2 : A^1 \to A^2$, нерухому на $A^1 \backslash A^1_{x_2 y_2}$, і таку, що довж$H_t^2(A^1) \le \max($довж$A^1$, довж$A^2) \le$ довжA. Застосувавши, якщо необхідно, описані міркування лише скінченну кількість, нехай m разів (через те, що кількість ланок A^i меншає із збільшенням i), отримаємо просту ламану A^m, $m \ge 1$, що разом з B обмежує розташований в D диск D^m, для якого не виконуються умови п.п.1 і 2. За побудовою довж$A^m \le$ довжA. Надалі для A^m і D^m залишимо початкові позначення A і D.

3. Припускаємо, що в диску D немає діагоналей які з'єднують дві вершини на A або дві вершини на B. Кут многокутника D з вершиною x позначимо $\hat{x}(D)$.

3.1. Якщо кожна пара сусідніх ланок на A визначає у многокутнику D кут, більший від π, то теорема випливає з леми 2.

3.2. Якщо на A існують пари сусідніх ланок, що визначають в D кути, менші від π, то нехай $\hat{y}(D)$ – перший з таких кутів у відліку від кінця u на A, утворений ланками $[x; y] \subset A_{uy}$ і $[y; z] \subset A_{yv}$, і $\triangle xyz$ – трикутник з вершинами x, y і z.

3.2.1. Припустимо спочатку, що $x \ne u$ (тобто, що x не є першою вершиною на A) і тому $\hat{x}(D) > \pi$. Оскільки $(\triangle xyz) \cap B \ne \emptyset$ (бо виконуються умови п.3), то на $(y; z)$ існує найближча до y точка y' така, що $(x; y') \cap \partial D \ne \emptyset$ і тоді $(x; y') \cap \partial D = (x; y') \cap B \ne \emptyset$. Якщо b – найближча до x, а b' – найближча до y' точки з $(x; y') \cap B$ і $b \ne b'$, то $[b; b']$ є ланкою на B. Відрізок $[x; y']$ розбиває D на три поліедральні диски: трикутник $\triangle xyy'$, диск D_u, обмежений $A_{ux} \cup [x; b] \cup B_{ub}$ і диск D_v, обмежений $A_{y'v} \cup B_{vb'} \cup [b'; y']$.

Перейдемо до опису ізотопій. Спочатку побудуємо ізотопію-поштовх H_t^1, яка переводить A в $A' = (A \backslash A_{xy'}) \cup [x; y']$, є нерухомою на $A \backslash A_{xy'}$ і для якої

$$\text{довж} H_t^1(A) \le \max(\text{довж} A, \text{довж} A') = \text{довж} A. \quad (1)$$

Далі до ламаних B_{ub} і $B_{b'v}$, кожна з яких має не більше ніж k ланок, можна застосувати припущення індукції, але для отримання бажаних оцінок довжин ламаних розглянемо дві можливості: а) довж$(A_{ux} \cup [x; b]) \ge$ довжB_{ub} і б) довж$(A_{ux} \cup [x; b])$<довжB_{ub}.

За можливості а) на основі припущення індукції будуємо за допомогою поштовхів економну ізотопію H_t^2, яка переводить $A_{ux} \cup [x; b]$ в B_{ub}. Якщо H_t^2 продовжити тотожно на $[b; y'] \cup A_{y'v}$, то можна вважати, що H_t^2 переводить A' в $B_{ub} \cup [b; y'] \cup A_{y'v}$ і

$$\text{довж}H_t^2(A') \le \max(\text{довж}A', \text{довж}(B_{ub} \cup [b; y'] \cup A_{y'v})) = \text{довж}A' \le \text{довж}A. \tag{2}$$

Далі знову на основі припущення індукції будуємо за допомогою поштовхів економну ізотопію H_t^3, яка переводить $[b'; y'] \cup A_{y'v}$ в $B_{b'v}$. Якщо H_t^3 продовжити тотожно на $B_{ub} \cup [b; b']$, то можна вважати, що H_t^3 переводить $B_{ub} \cup [b; y'] \cup A_{y'v}$ в B і

$$\text{довж}(H_t^3(B_{ub} \cup [b; y'] \cup A_{y'v}) \le \max(\text{довж}(B_{ub} \cup [b; y'] \cup A_{y'v}), \text{довж}B) \le$$
$$\le \max(\text{довж}A', \text{довж}B) \le \max(\text{довж}A, \text{довж}B). \tag{3}$$

Шукану економну ізотопію $H_t : A \to B$ отримаємо як добуток ізотопій H_t^1, H_t^2 і H_t^3. Нерівність довж$H_t(A) \le \max$(довжA, довжB) випливає з нерівностей (1) – (3). Отже, теорему доведено за умови п.3.2.1 і можливості а).

У випадку можливості б) після описаної вище ізотопії H_t^1 на основі припущення індукції побудуємо за допомогою поштовхів дві економні ізотопії – спочатку G_t^2, а потім G_t^3 (подібно було побудовано H_t^2 і H_t^3). За допомогою ізотопії G_t^2 переведемо A' в $A_{ux} \cup [x; b'] \cup B_{b'v}$ так, щоб дуга $[b'; y'] \cup A_{y'v}$ перейшла в $B_{b'v}$, а дуга $A_{ux} \cup [x; b']$ і вершина v залишилися нерухомими і щоб

$$\text{довж}G_t^2(A') \le \max(\text{довж}A', \text{довж}(A_{ux} \cup [x; b'] \cup B_{b'v})) \le$$
$$\le \max(\text{довж}A', \text{довж}B) \le \max(\text{довж}A, \text{довж}B). \tag{4}$$

За допомогою ізотопії G_t^3 переведемо $A_{ux} \cup [x; b'] \cup B_{b'v}$ в B так, щоб дуга $A_{ux} \cup [x; b]$ перейшла в B_{ub}, а дуга $[b; b'] \cup B_{b'v}$ і вершина u залишилися нерухомими і щоб

$$\text{довж}G_t^3(A_{ux} \cup [x; b'] \cup B_{b'v}) \le \max(\text{довж}(A_{ux} \cup [x; b'] \cup B_{b'v}), \text{довж}B) \le \text{довж}B. \tag{5}$$

Добуток ізотопій H_t^1, G_t^2 і G_t^3 визначає економну ізотопію $H_t : A \to B$, для якої внаслідок (1), (4), (5) справджується нерівність довж$H_t(A) \le \max$(довжA, довжB). Теорему доведено за умови п.3.2.1 і можливості б).

3.2.2. Припустимо, що $x = u$ є першою, а тоді y – другою вершиною на A. За умовою $\hat{y}(D) < \pi$. Якщо $[u; b]$ – перша ланка на B, то легко дійти висновку, що $[u; b]$ можна продовжити прямолінійно поза b до розрізу $[b; y']$ (диску D), який сполучає b з точкою $y' \in A \subset \partial D$. Не розглядаючи деталі (вони подібні до побудов, описаних в п.3.2.1), зазначимо, що шукану ізотопію $H_t : A \to B$ можна побудувати, виконуючи спочатку поштовх $H_t^1 : A_{uy'} \to [u; y']$, а потім – економну ізотопію (добуток поштовхів) $H_t^2 : ([b; y'] \cup A_{y'v}) \to B_{bv}$ (ізотопія H_t^2 існує на основі припущення індукції, оскільки B_{bv} має k ланок).

Теорему доведено за припущення 1.

4. **Припущення 2.** Ламані A і B мають спільними лише дві компоненти U і V, принаймні одна з яких не є точкою (а тому є простою ламаною). Тоді, як і за припущення 1, $M(A \cup B) = \max$(довжA, довжB). Прості ламані $A' = \overline{A \backslash (U \cup V)}$ і $B' = \overline{B \backslash (U \cup V)}$ обмежують поліедральний диск, який позначимо D'. Нехай D – обмежена компонента $E^2 \backslash (A \cup B)$; очевидно, що $D = \text{Int}D' \backslash (U \cup V)$ (рис. 1). Залежно від будови і розташування U і V множина D може виявитися:

а) поліедральним диском IntD' (рис. 1а), б)),

б) поліедральним диском IntD', з якого вилучено дугу-розріз, що сполучає точку в IntD' з точкою на $\partial D'$ (рис. 1 в), г)),

в) поліедральним диском IntD', з якого вилучено дві дуги-розрізи, що не мають спільних точок, і кожна з яких сполучає точку в IntD' з точкою на $\partial D'$ (рис. 1д)).

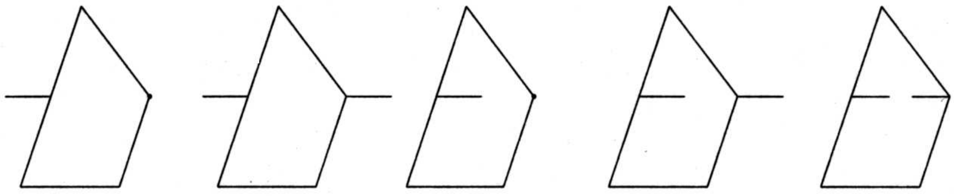

Рис. 1.

У випадку а) для A' і B' справджується припущення 1. Тому за допомогою поштовхів можна побудувати економну ізотопію $H_t : A' \to B'$, $t \in [0;1]$, таку, що довж$H_t(A') \le \max($довжA', довж$B')$. Оскільки ця ізотопія є тотожною поза D', то можна вважати, що вона задовольняє також твердження теореми 1.

У випадку б) припустимо, що компонента U множини $A \cap B$ є розрізом-ламаною в D', послідовні вершини якої $u_0 = u, u_1, ..., u_m$, $m \ge 1$, є також вершинами і A, і B; отже, $U = A_{u_0u_m} = B_{u_0u_m}$, $A_{u_0u_m} \backslash \{u_m\} \subset \mathrm{Int}D'$. Нехай $[u_m; a]$ і $[u_m; b]$ – це ланки відповідно на A і B, які сусідні з $[u_{m-1}; u_m]$, $(u_m; a) \cap (u_m; b) = \emptyset$. Із двох трикутників $\triangle u_{m-1}u_m a$, $\triangle u_{m-1}u_m b$ виберемо той, що має менший кут при вершині u_m, а якщо таких трикутників два, то – $\triangle u_{m-1}u_m a$. Припустимо, що вибрано $\triangle u_{m-1}u_m a$. Нехай u'_m – точка в $\mathrm{Int}(\triangle u_{m-1}u_m a)$, розташована настільки близько до u_m, що $((u_{m-1}; u'_m] \cup [u'_m; a)) \subset \subset \mathrm{Int}D$; тоді довж$([u_{m-1}; u'_m] \cup [u'_m; a]) <$ довж$A_{u_{m-1}a}$ (бо $A_{u_{m-1}a} = [u_{m-1}; u_m] \cup [u_m; a]$). Якщо позначимо $A^m = A_{u_0u_{m-1}} \cup [u_{m-1}; u'_m] \cup [u'_m; a] \cup A_{av}$, то з останньої нерівності отримаємо, що довж$A^m <$ довжA і тому $\alpha =$ довж$A -$ довж$A^m > 0$. Побудуємо ізотопію-поштовх $H^m_t : A \to A^m$, $t \in [0;1]$, який переводить u_m в u'_m (а тому $A_{u_{m-1}a}$ в $A^m_{u_{m-1}a} = [u_{m-1}; u'_m] \cup [u'_m; a]$) і нерухомий на $A \backslash A_{u_{m-1}a}$. Очевидно, що H^m_t – економна ізотопія і довж$H^m_t(A) <$ довжA для всіх $t \in [0;1]$. Обмежену компоненту $E^2 \backslash (H^m_t(A) \cup B)$ позначимо D^m_t, $D^m_0 = D^m$. Очевидно, що $D^m \subset D^m_t \subset D$.

Кожну вершину u_i, $i = 1, ..., m-1$, оточимо настільки малим околом $O(u_i)$, щоб різні околи не мали спільних точок і коли u_i замінити довільною точкою $u'_i \in O(u_i)$, то отримаємо ламану $u_0u'_1...u'_{m-1}u'_m a$, для якої |довж$(u_0u'_1...u'_{m-1}u'_m a)$–довж$A^m_{u_0a}| < \frac{\alpha}{2}$, а тому і

$$|\text{довж}(u_0u'_1...u'_{m-1}u'_m a \cup A_{av}) - \text{довж}A^m| < \frac{\alpha}{2}. \quad (6)$$

Останні дві нерівності є наслідком того, що довжина ламаної неперервно залежить від розташування її вершин за умови однакової кількості ланок.

Надалі припускатимемо, що виконується нерівність (6) і конкретизуємо вибір точок $u'_1, ..., u'_{m-1}$. Із кожної вершини u_i, $i = 1, ..., m-1$, проведемо бісектрису двох кутів, утворених у цій вершині парою сусідніх ланок ламаної $A^m_{u_0a}$, і виберемо на бісектрисі точку u'_i так, щоб:

1) $[u_i; u'_i] \subset O(u_i) \cap \mathrm{Int}D$;

2) для кожної ланки $[u_i; u_{i+1}]$, $i = 1, ..., m-1$, точки u'_i, u'_{i+1} були розташовані в одній і тій самій півплощині відносно $[u_i; u_{i+1}]$;

3) якщо вибрати довільну точку $u''_i \in (u_i; u'_i]$, то ламана $u_0u''_1...u''_{m-1}u'_m a$ не мала точок самоперетину і була розрізом в $\mathrm{Int}D$, який сполучає $u_0 \in \partial D$ і $a \in \partial D$.

Очевидно, що

$$|\text{довж}(u_0u''_1...u''_{m-1}u''_m a \cup A_{av}) - \text{довж}A^m| < \frac{\alpha}{2}. \quad (7)$$

Визначимо такі $m-1$ прості ламані $A^{m-1}, A^{m-2}, ..., A^1$:

$$A^{m-i} = A_{u_0u_{m-i-1}} \cup [u_{m-i-1}; u'_{m-i}] \cup [u'_{m-i}; u'_{m-i+1}] \cup A^{m-i+1}_{u'_{m-i+1}v}, \quad i = 1, ..., m-1.$$

Зокрема,

$$A^{m-1} = A_{u_0u_{m-2}} \cup [u_{m-2}; u'_{m-1}] \cup [u'_{m-1}; u'_m] \cup A^m_{u'_m v}, A^1 = [u_0; u'_1] \cup [u'_1; u'_2] \cup A^2_{u'_2 v}.$$

Кожна множина $E^2 \backslash (A^{m-i} \cup B)$, $i = 1, ..., m-1$, складається з двох компонент – необмеженої і обмеженої, яку позначимо D^{m-i}. Оскільки $A^{m-j} \subset \overline{D^{m-i}}$, якщо $j \ge i$, то

$$D^1 \subset D^2 \subset ... \subset D^{m-1} \subset D^m \subset D, \quad (8)$$

причому D^1 – це поліедральний диск, обмежений простими ламаними A^1 і B, які мають спільними лише свої кінцеві точки u і v.

Для кожної ламаної A^{m-i+1}, $i=1, ..., m-1$, побудуємо ізотопію-поштовх H^{m-i}_t, який переводить u_{m-i} в u'_{m-i} і тому нерухомий на

$A^{m-i+1} \backslash A^{m-i+1}_{u_{m-i-1}u'_{m-i+1}}$ (при цьому $A^{m-i+1}_{u_{m-i-1}u'_{m-i+1}}$ переходить в $[u_{m-i-1}; u'_{m-i}] \cup [u'_{m-i}; u'_{m-i+1}]$). За побудовою $H_1^{m-i}(A^{m-i+1}) = A^{m-i}$. Із визначення H_t^{m-i} випливає, що $E^2 \backslash (H_t^{m-i}(A^{m-i+1}) \cup B)$ складається з двох компонент – необмеженої і обмеженої. Якщо останню позначити D_t^{m-i+1} (тоді $D_0^{m-i+1} = D^{m-i+1}$, $D_1^{m-i+1} = D^{m-i}$), то для $s < t$, $0 \leq s < t \leq 1$, маємо

$$D \supset D^{m-i+1} \supset D_s^{m-i+1} \supset D_t^{m-i+1} \supset D^{m-i}, \quad i = 1, ..., m-1. \tag{9}$$

Звідси отримуємо, що кожна ізотопія H_t^{m-i}, $i = 1, ..., m-1$, є економною.

Далі визначимо ізотопію H'_t як добуток поштовхів H_t^m, H_t^{m-1},..., H_t^1. За побудовою $H'_t : A \to A^1$, $t \in [0; 1]$, є нерухомою в u і v (кінцях A), а внаслідок економності H_t^m і за співвідношеннями (8), (9) вона є економною.

Тепер щодо оцінки довж$H'_t(A)$. Вище ми отримали співвідношення

$$\text{довж} H_t^m(A) < \text{довж} A, \ t \in [0; 1] \tag{10}$$

і

$$\text{довж} A^m = \text{довж} - \alpha, \ \alpha > 0. \tag{11}$$

Для A^{m-i} і $H_t^{m-i}(A^{m-i+1})$ на основі (7) і (11) запишемо нерівності

$$\text{довж} A^{m-i} < \text{довж} A^m + \frac{\alpha}{2} = \text{довж} A - \frac{\alpha}{2}, \ i = 1, ..., m-1,$$

$$\text{довж} H_t^{m-i}(A^{m-i+1}) < \text{довж} A^m + \frac{\alpha}{2} =$$
$$= \text{довж} A - \frac{\alpha}{2}, t \in [0; 1], i = 1, ..., m-1,$$

які разом з (10), (11) свідчать про те, що довж$H'_t(A) <$ довжA для всіх $t \in [0; 1]$.

Зауважимо, що обернена до H'_t ізотопія h'_t економно переводить A^1 в A і при цьому довж$h'_t(A^1) =$ $=$ довж$H'_{1-t}(A) <$ довжA, $t \in [0; 1]$.

Для завершення доведення зазначимо, що ламані A^1 і B задовольняють умови припущення 1. Тому існує економна ізотопія (добуток поштовхів) $H''_t : A^1 \to B, t \in [0; 1]$, для якої довж$H''_t(A^1) \leq$ $\leq \max($довж$A,$ довж$B)$. Добуток H'_t і H''_t визначає ізотопію, яка задовольняє твердження теореми 1.

Тепер припустимо, що за умов випадку б) кут $\hat{u}_m$ у $\triangle u_{m-1}u_m b$ менший від кута $\hat{u}_m$ у $\triangle u_{m-1}u_m a$. Далі до ламаної B і її дуги $B_{u_0 b}$ застосуємо побудови, аналогічні тим, що описані вище для A і $A_{u_0 a}$. У результаті отримаємо ламану B^1 та ізотопію F'_t такі, що:

1) B^1 сполучає u з v і складається з двох частин: одна – це дуга B_{bv}, а інша – це розріз в Int$D$, який з'єднує u_0 з b;

2) довж$B^1 <$ довжB;

3) ізотопія F'_t, побудована як добуток поштовхів, економно переводить B в B^1 і довж$F'_t(B) <$ довжB, $t \in [0; 1]$;

4) обернена до F'_t ізотопія f'_t економно переводить B^1 в B і довж$f'_t(B^1) <$ довжB, $t \in [0; 1]$.

Оскільки для A і B^1 виконуються умови припущення 1, то існує економна ізотопія $H'_t : A \to B^1$, для якої довж$H'_t(A) \leq \max($довжA, довж$B^1)$. Добуток H'_t і f'_t визначає ізотопію, яка задовольняє твердження теореми 1.

Розглянемо випадок в) з двома розрізами диску D' (рис 1д)). Доведення теореми можна отримати, якщо "усунути" один з розрізів і звести випадок в) до б) (рис.1в)). Це можна зробити за допомогою міркувань, аналогічних до описаних для випадку б) при побудові A^1 і H'_t, і тому ми їх не наводимо.

Теорему доведено за припущення 2.

5. Доведення теореми в загальному випадку виконаємо індукцією за кількістю n компонент $A \cap B$. Якщо $n = 2$, то теорему доведено вище за припущень 1 і 2. Припустимо, що теорема справджується для всіх $n \leq k$ і доведемо її для $n = k+1$. Як і вище, позначимо U і V – компоненти $A \cap B$, які містять відповідно u і v – кінці A і B (не виключено, що $U = u$ і (або) $V = v$) .

Нехай x – перша від U на B точка $A \cap B$. Дві дуги A_{ux} і B_{ux} мають спільними лише дві компоненти U і $\{x\}$, а тому $E^2 \backslash (A_{ux} \cup B_{ux})$ складається також з двох компонент: обмеженої $G(U)$ і необмеженої $G^\infty(U)$. Оскільки A_{xv} і B_{ux} мають лише одну спільну точку x, то дуга $A_{xv} \backslash \{x\}$ розташована в одній з компонент $G(U)$ або $G^\infty(U)$.

5.1. Розглянемо спочатку випадок, коли $(A_{xv} \backslash \{x\}) \in G^\infty(U)$. Дві дуги $A = A_{ux} \cup A_{xv}$ і $B^1 = B_{ux} \cup A_{xv}$ мають спільними лише дві компоненти U і A_{xv}. Тому до цих дуг застосуємо припущення індукції для випадку $n = 2$ і побудуємо за допомогою поштовхів економну ізотопію $H_t^1 : A \to B^1$, $t \in [0; 1]$, нерухому на u і на A_{xv}, і таку, що довж$H_t^1(A) \leq \max($довжA, довж$B^1) \leq M(A \cup B)$. Далі розглянемо дуги B^1 і B, перетин яких має не більше ніж k компонент. Знову застосуємо припущенням індукції і побудуємо економну ізотопію H_t^2, яка переводить B^1 в B, нерухома на u і v і таку, що довж$H_t^2(B^1) \leq M(B^1 \cup B) \leq M(A \cup B)$ (остання нерівність є наслідком того, що $(B^1 \cup B) \subset (A \cup B)$).

Добуток ізотопій H_t^1 і H_t^2 визначає ізотопію $H_t : A \to B$, $t \in [0; 1]$, яка задовольняє умови теореми. Економність H_t випливає з економності ізотопій H_t^1 і H_t^2 і з того, що необмежена компонента $E^2 \backslash (A \cup B)$ для кожного $t \in [0; 1]$ є підмножиною необмеженої компоненти $E^2 \backslash (H_t(A) \cup B)$.

5.2. Якщо $(A_{xv}\backslash\{x\})\in G(U)$, то позначимо y – першу від v на B точку $A \cap B$ (випадок коли $y = x$ також можливий). Дві дуги A_{yv} і B_{yv} мають спільними лише дві компоненти V і $\{y\}$, а тому $E^2\backslash(A_{yv} \cup B_{yv})$ складається також з двох компонент: обмеженої $G(V)$ і необмеженої $G^\infty(V)$. Покажемо, що $G(V) \subset G(U)$. Оскільки $V \subset G(U)$ (за умовою п.5.2), то і $(B_{yv}\backslash\{y\}) \subset G(U)$. У взаємному розташуванні точок x і y виділимо дві можливості: $A_{yv} \subset A_{xv}$ і $A_{yv} \supseteq A_{xv}$.

Якщо $A_{yv} \subset A_{xv}$, то $(A_{yv} \cup B_{yv}) \subset G(U)$ і, отже, $G(V) \subset G(U)$.

Якщо $A_{yv} \supseteq A_{xv}$ і $x \neq y$, то дуга A_{xy} розташована на границі $\partial G(U)$, а її кінці x і y з'єднані в $\mathrm{Int}G(U)$ розрізами A_{xv} і B_{yv} з $v \in \mathrm{Int}G(U)$. Тому $G(V) \subset G(U)$. Зокрема, якщо $x = y$, то також $G(V) \subset G(U)$ (бо розрізи A_{xv} і B_{yv} в $G(U)$ закінчуються у спільній кінцевій точці $x = y \in G(U)$).

Отже, справді, $G(V) \subset G(U)$ за умов п.5.2. Далі, оскільки A_{uy} перетинає $\partial G(V)$ лише в точці y і $(A_{ux} \cap A_{uy}) \subset \partial G(U)$, то $A_{uy} \cap \partial G^\infty(V) \neq \emptyset$. Тоді з необхідністю $(A_{uy}\backslash\{y\}) \subset G^\infty(V)$, тобто виконуються умови п.5.1, якщо замінити в ньому $G^\infty(U)$ на $G^\infty(V)$, а $A_{xv}\backslash\{x\}$ на $A_{uy}\backslash\{y\}$. Звідси відразу отримуємо доведення теореми 1. ■

IV. Доведення теореми 2

Розглянемо спочатку випадок, коли $D(A) \neq D_0 \neq D(B)$. За умов теореми D_0 є поліедральним диском. Його границю складають частини ламаних A і B. Нехай $\alpha_1, ..., \alpha_m$ – замикання компонент $A\cap \mathrm{Int}D(B)$, які розташовані на ∂D_0, а $\beta_1, ..., \beta_n$ – замикання компонент $B \cap \mathrm{Int}D(A)$, які розташовані на ∂D_0; всі вони є дугами. Ідея доведення проста: спочатку до дуг β_j "стягуємо" відповідні дуги на A, які розташовані поза D_0, а потім дуги α_i "розтягуємо" до відповідних дуг на B.

Розглянемо дугу $\beta_j \subset B \cap \mathrm{Int}D(A)$, $j = 1, ..., n$. Розріз β_j розбиває $\mathrm{Int}D(A)$ на два диски і нехай $D_j(A)$ – той з них, що не містить D_0. Границю $\partial D_j(A)$ складають дуга $\beta_j \subset B$ і дуга на A, позначимо її γ_j. Оскільки $\mathrm{Int}D_j(A) \cap \mathrm{Int}D_0 = \emptyset$, то $\mathrm{Int}D_j(A)\cap \mathrm{Int}D_{j'}(A) = \emptyset$ і $\mathrm{Int}\gamma_j \cap \mathrm{Int}\beta_{j'} = \emptyset$, якщо $1 \leq j \neq j' \leq n$. За теоремою 1 існує економна ізотопія $F_t^j : \gamma_j \to \beta_j$, нерухома на кінцях дуг γ_j і β_j і поза $D_j(A)$, для якої довж$F_t^j(\gamma_j) \leq \max($довж$\gamma_j$, довж$\beta_j)$. Якщо продовжити F_t^j тотожно на $A\backslash\gamma_j$, то можна вважати, що F_t^j переводить A в $\beta_j \cup \overline{(A\backslash\gamma_j)}$, $F_t^j(A)$ не має спільних точок з $\mathrm{Int}D_0 \cup (E^2\backslash\overline{D(A)})$ і довж$F_t^j(A) \leq \max($довжA, довж$(\beta_j \cup (A\backslash\gamma_j)) \leq$ довж$A +$ довжB (остання нерівність є наслідком того, що $(\beta_j \cup (A\backslash\gamma_j)) \subset (A \cup B)$. Визначимо ізотопію H_t^1 як добуток $H_t^1 = F_t^1 \cdot ... \cdot F_t^n$, $t \in [0;1]$. Тоді:

1) H_t^1 переводить A в границю ∂D_0 диску D_0;

2) $\overline{H_t^1(A)}$ не має спільних точок з $\mathrm{Int}D_0\cup (E^2\backslash\overline{D(A)})$ для всіх $t \in [0;1]$;

3) довж$H_t^1(A) \leq$ довж$A +$ довжB для всіх $t \in [0;1]$.

Позначимо $C = \partial D_0$ і продовжимо побудови для дуг $\alpha_i \subset A \cap \mathrm{Int}D(B)$, $i = 1, ..., m$. Кожен розріз α_i розбиває $\mathrm{Int}D(B)$ на два диски і нехай $D_i(B)$ – той з них, що не містить D_0. Границю $\partial D_i(B)$ складають дуга $\alpha_i \subset A$ і дуга на B, позначимо її δ_i. За допомогою аналогічних міркувань, що й при побудові F_t^j, будуємо економну ізотопію $G_t^i : \alpha_i \to \delta_i$, нерухому на кінцях дуг α_i і δ_i і поза $D_i(B)$, для якої довж$G_t^i(\alpha_i) \leq \max($довж$\alpha_i$, довж$\delta_i)$. Після тотожного продовження G_t^i на $C\backslash\alpha_i$ можна вважати, що G_t^i переводить C в $\delta_i \cup \overline{(C\backslash\alpha_i)}$, $G_t^i(C)$ не має спільних точок з $\mathrm{Int}D_0 \cup (E^2\backslash\overline{D(B)})$ і довж$G_t^i(C) \leq \max($довжC, довж$(\delta_i \cup (C\backslash\alpha_i)) \leq$ довж$A +$ довжB (остання нерівність є наслідком того, що $(C \cup \delta_i \cup (C\backslash\alpha_i)) \subset (A \cup B)$). Визначимо ізотопію H_t^2 як добуток $H_t^2 = G_t^1 \cdot ... \cdot G_t^m$, $t \in [0;1]$. Тоді:

1) H_t^2 переводить C в B;

2) $\overline{H_t^2(C)}$ не має спільних точок з $\mathrm{Int}D_0\cup (E^2\backslash\overline{D(B)})$ для всіх $t \in [0;1]$;

3) довж$H_t^2(C) \leq$ довж$A +$ довжB для всіх $t \in [0;1]$.

Шукану ізотопію H_t побудуємо як добуток ізотопій H_t^1 і H_t^2. Теорему 2 доведено.

Випадок $D(A) = D_0$ (аналогічно, як і $D(B) = D_0$) ми детально не розглядатимемо, оскільки його можна звести до вже розглянутого випадку. Для цього достатньо стиснути (наприклад, за допомогою поштовхів) диск $D(B)$ до диску $D(B')$, який обмежений простою замкненою ламаною B' такою, що $D(A) \subset D(B') \subset D(B)$ і множина $B'\backslash A$ складається не менше, ніж з двох компонент. Теорему 2 доведено. ■

З доведення теореми і з економності ізотопій F_t^j та G_t^i, на основі яких побудовано H_t^1 і H_t^2, випливає, що теорема 2 допускає такий варіант формулювання.

Теорема 2'. Нехай A і B – дві прості замкнені ламані на площині, D_0 – компонента $\mathrm{Int}D(A)\cap \mathrm{Int}D(B)$ і $C = \partial D_0$. Тоді існують ізотопії $H_t^1 : A \to C$, $t \in [0;1]$ і $H_t^2 : C \to B$, $t \in [0;1]$, обидві побудовані як добуток поштовхів, такі, що для всіх s, t, $0 \leq s < t \leq 1$:

1) $D(A) \supset D(H_s^1(A)) \supset D(H_t^1(A)) \supset H_1^1(A) = D_0$;

2) $D_0 = D(H_0^2(C)) \subset D(H_s^2(C)) \subset D(H_t^2(C)) \subset D(H_1^2(C)) = D(B)$;

3) довж$H_t^1(A) \leq$ довж$A +$довжB і довж$H_t^2(C) \leq$ довж$A +$ довжB.

Література

[1] И.Я. Олексив, И.Н. Песин. Три задачи о минимальных изотопиях и о приближении гомеоморфизмами кривых и поверхностей // Сиб.мат.журн. – 1977. – Т.18, №5. – С.1240 – 1258.

[2] R.H. Bing, M. Starbird. Super triangulations. // Pacif. J. of Math. – 1978. – V.74, No.2. – P. 307 – 325.

[3] I.Ya. Oleksiv. On area of 2-sphears in Euclidian space // Матем. Студії. – 1999. – Т.12, №1. – С.15 – 30.

[4] Л.В. Келдыш. Топологические вложения в евклидово пространство (Труды Матем. Ин-та им. В.А. Стеклова, Т.81). – М.: Наука, – 1966.

[5] R.H. Bing. The geometric topology of 3-manifolds (Amer.Math.Soc.Coll.Publ., V.40). – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc. – 1983.

ECONOMICAL ISOTOPIES OF PIECEWISE LINEAR ARCS IN THE PLANE

I.Ya. Oleksiv

National University "Lvivska Politekhnika", 12 Bandera St, UA-79013 Lviv, Ukraine

A linear isotopy between piecewise linear arcs A and B having common endpoints is constructed such that each intermediate arc under the isotopy is situated in the closure of the union of the bounded components of the complement of $A \cup B$ and its length does not exceed the sum of the lengths of A and B.

Keywords: polyhedron, polyhedral disk, piecewise linear map, simple curve

2000 MSC: 57N12, 57N37

UDK: 517.51:519.5