УДК 528.022

К ТЕОРИИ ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНЕИНТЕГРАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ВОЗДУХА ПРИ ДАЛЬНОМЕРНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ НА ПРИЗЕМНЫХ ТРАССАХ

П. Неежмаков, А. Прокопов
Национальный научный центр "Институт метрологии", Харьков

И. Тревого
Национальный университет "Львовская политехника"

Ключевые слова: дальномерные измерения, показатель преломления воздуха, градиентный метод, полиномы Эрмита.

Постановка проблемы

Несмотря на интенсивные исследования эффектов влияния земной атмосферы на результаты измерений расстояний, осуществляемых с помощью электромагнитных волн на приземных трассах, эти эффекты все еще остаются одним из наиболее существенных факторов, ограничивающих точность таких измерений. К подобным эффектам относятся, как известно [1–3], отличие скорости распространения сигнала в атмосфере от скорости света в вакууме, а также искривление траектории, по которой распространяется сигнал вследствие эффекта рефракции.

Указанные эффекты могут быть скомпенсированы либо введением соответствующих независимо определяемых поправок в результаты измерений, либо аппаратурным путем непосредственно при измерениях. Анализ перспективных методов определения поправок за рефракционное искривление траектории (которое обычно гораздо слабее влияет на точность измерений, нежели отличие скоростей распространения сигнала в среде и вакууме), выполнен в [4].

Что касается компенсации влияния атмосферы на скорость распространения сигнала, на котором далее сосредоточим основное внимание, то она осуществляется с помощью среднеинтегрального вдоль измеряемой трассы показателя преломления воздуха

$$\overline{n} = D^{-1} \int_0^{s_D} n(r(s))ds \; . \tag{1}$$

Интегрирование в формуле (1) выполняется вдоль лучевой траектории s (от начальной точки траектории $s = 0$ до конечной $s = s_D$); форма траектории определяется лучевым уравнением геометрической оптики [5]; $n(r)$ – зависимость показателя преломления воздуха n от координат $r=r(x, y, z)$; D – длина траектории, соответствующая длине измеряемой линии.

Определение величины $\overline{n}$ возможно как на основе модельных представлений профиля $n(r)$ и интеграла (1), так и аппаратурным путем – непосредственно во время измерений. Среди модельных представлений часто используются так называемые методы точечной аппроксимации, опирающиеся на представление подынтегральной функции либо самого интеграла (1) в виде суммы слагаемых, определенных в некоторых фиксированных точках измеряемой трассы. Для аппаратурного подхода наиболее известными являются геодезический и дисперсионный методы [1–3].

Учитывая сложность практической реализации, а также ограничения, заложенные в основу аппаратурных методов (в частности, пренебрежение рефракционным пространственным разбросом траекторий сигналов с различными длинами волн оптической несущей – для дисперсионных методов [2], а также использование понятия среднеинтегрального коэффициента рефракции для геодезических методов [3]), в этой статье рассмотрены точностные возможности модельных методов, использующих принципы аппроксимации, а именно: методы, основанные на представлении интеграла (1) конечной суммой. Наиболее изучены среди них методы, использующие для приближенного представления интеграла (1) формулы трапеций и Эйлера–Маклорена, в частности, градиентный метод [6–8].

Далее проанализируем основные результаты, уже достигнутые при изучении указанных методов, обсуждаются перспективы их дальнейшего развития.

Изложение основного материала

С использованием формулы интегрирования Эйлера–Маклорена, опираясь на интегральные представления лучевых уравнений геометрической оптики, предложенные в [9, 10], соотношение (1) в случае градиентного метода определения среднеинтегрального показателя преломления воздуха можно представить в виде [6–8]:

$$\begin{aligned}\overline{n} = \overline{n}_T - \frac{D}{12N^2}\Big(& g_{G_D} \cdot \sin Z_D - g_{V_D} \cdot \cos Z_D - \\ & - g_{G_0} \cdot \sin Z_0 - g_{V_0} \cdot \cos Z_0 \Big) + R_{EM}\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\bar{n}_T = \left[\frac{n_0 + n_D}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} n(s_i) \right] \cdot \frac{1}{N} \qquad (3)$$

– соотношение, совпадающее с рабочей формулой для среднеинтегрального показателя преломления воздуха, определяемого методом трапеций; $s_i = D \cdot \frac{i}{N}$; $i = 1, 2, ... N-1$: N – количество разбиений интервала интегрирования ($N+1$ – число точек, в которых измеряют локальные значения показателя преломления); z_L и z_0 – видимые зенитные углы в концевых точках трассы; g_{G_L}, g_{V_L}, g_{G_0} и g_{V_0} – значения горизонтальной и вертикальной проекций градиента показателя преломления воздуха в этих точках; R_{EM} – остаточный член формулы интегрирования Эйлера–Маклорена .

Нетрудно заметить, что соотношение (2) градиентного метода уточняет соотношение (3) известного метода точечной аппроксимации путем учёта результатов измерений градиентов показателя преломления воздуха и видимых зенитных углов в концевых точках трассы (что, в принципе, позволяет уменьшить количество промежуточных точек трассы, в которых измеряются локальные значения показателя преломления воздуха). А также обобщает известный геодезический метод А. Л. Островского [3] за счет дополнительных измерений в промежуточных точках трассы.

Повышение точности градиентного метода, уравнение измерения которого базируется на соотношении (2), по сравнению с методом трапеций (формула (3)), можно установить на основе сравнения остаточных членов в представлениях интеграла (1) конечными суммами для этих методов [11, 12]. Для градиентного метода (2) остаточный член имеет вид

$$R_{EM} = \frac{D^4}{720 N^4} \cdot \frac{d^4 n}{ds^4} \Big|_{s=s_*}, \qquad (4)$$

где s_* – некоторая точка траектории на интервале интегрирования, а для метода точечной аппроксимации по формуле трапеций (3) это будет соотношение

$$R_T = \frac{D^2}{12 \cdot N^2} \cdot \frac{d^2 n}{ds^2} \Big|_{s=s_{**}}, \qquad (5)$$

где s_{**} – также некоторая точка на интервале интегрирования.

Если

$$|R_{EM}| \langle\langle |R_T|, \qquad (6)$$

то градиентный метод имеет более высокую потенциальную точность, нежели метод, опирающийся на формулу трапеций.

Для проверки справедливости этого утверждения подставим (4), (5) в (6), предположив, что функция $n(s)$ вблизи точек s_*, s_{**}, в которых определены остаточные члены (4) (5), изменяется по закону

$$n(s) = \begin{cases} n_* \cdot e^{-g_V (s - s_*)} - \text{вблизи} \quad s_* \\ n_{**} \cdot e^{-g_V (s - s_{**})} - \text{вблизи} \quad s_{**} \end{cases}$$

Тогда, учитывая, что $n_* \approx n_{**} \approx 1$, при $g_V \cong (2...5) \cdot 10^{-5}$ км$^{-1}$ (это значение является типичным для вертикального градиента показателя преломления воздуха в нормальных условиях), $D =$ 1…100 км (возможный диапазон длин при лазерных измерениях на околоземных трассах), $N = 1$ (когда все измерения осуществляются лишь в концевых точках трассы), получаем, что значение правой части неравенства (6) существенно превышает значение левой части. Таким образом, на основании оценок остаточных членов, порядок величины которых определяется порядком производной от подинтегральной функции, можно сделать вывод о том, что формула градиентного метода определения среднеинтегрального показателя преломления воздуха характеризуется гораздо большей потенциальной точностью, нежели формула метода трапеций. Количественные оценки погрешности этих формул могут быть конкретизированы на основе численного либо натурного эксперимента с реальными профилями показателя преломления воздуха.

К недостаткам рассмотренных выше методов, рабочие соотношения которых отражены в формулах (2), (3), можно отнести требование равномерного размещения вдоль интервала интегрирования точек определения локальных значений показателя преломления воздуха, необходимых для приближенного вычисления интеграла (1). Это требование не всегда выполнимо в практических условиях измерений (в частности, при измерениях над резко неоднородной подстилающей поверхностью). Для устранения указанного недостатка далее рассматрим вариант градиентного метода при неравномерном разбиении интервала интегрирования.

В [13] показано, что рабочие соотношения этого метода можно получить, опираясь на вычисление интеграла (1) с использованием интерполяционного многочлена Эрмита [11, 12] для приближенного представления зависимости показателя преломления воздуха от лучевой координаты

$$n_m(s) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{a_i - 1} \sum_{k=0}^{a_i - j - 1} n_i^{(j)} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{j!} \cdot \left[\frac{(s - s_i)^{a_i}}{\Omega(s)} \right]^{(k)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Omega(s)}{(s - s_i)^{a_i - j - k}}, \qquad (7)$$

где $n_i^{(j)} = n^{(j)}(s_i)$ – значение j-й производной от функции $n(s)$ в точке $s = s_i$; a_i – кратность узла интерполяции [12]; $\Omega(s) = (s - s_0)^{a_0} \cdot (s - s_1)^{a_1} \cdot ...$

$\ldots\cdot(s-s_N)^{a_N}$; $a_0+a_1+\ldots+a_N-1=m$; N – число разбиений интервала интегрирования точками, в которых определены необходимые для интерполяции значения показателя преломления.

Остаточный член для приведенной выше интерполяционной формулы Эрмита (7) имеет вид

$$R_E=n(s)-n_m(s)=\frac{n^{m+1}(s_{***})}{(m+1)!}\cdot\Omega(s),$$

где точка $s=s_{***}$ принадлежит интервалу интегрирования $[s_0,s_N]$.

Соотношение (7) упрощается в случае $a_0=a_N=2$, $a_i=1$ при $i=1,2,\ldots,N-1$, т. е. когда для интерполирования функции $n(s)$ используются производные $n^{(1)}(s_0)$, $n^{(1)}(s_D)$ лишь в начальной и конечной точках трассы (как в градиентном методе, основанном на формуле (2)). В этом практически важном случае искомая величина $\bar{n}$ может быть представлена соотношением

$$\bar{n}\cdot D=\sum_{i=1}^{N-1}A_i\cdot n(s_i)+\sum_{i=0,N}\left[A_{i0}\cdot n(s_i)+A_{i1}\cdot n^{(1)}(s_i)\right]+$$

$$+\int_0^D R_E\cdot ds\,,\quad \text{где} \tag{8}$$

$$A_i=\left[\frac{s-s_i}{\Omega(s)}\right]_{s=s_i}\cdot\int_0^D\frac{\Omega(s)}{s-s_i}\cdot ds\quad \text{при } i=1,\ldots,N-1,$$

$$A_{i0}=\left[\frac{(s-s_i)^2}{\Omega(s)}\right]_{s=s_i}\cdot\int_0^D\frac{\Omega(s)\cdot ds}{(s-s_i)^2}+$$

$$+\left[\frac{(s-s_i)^2}{\Omega(s)}\right]^{(1)}_{s=s_i}\cdot\int_0^D\frac{\Omega(s)\cdot ds}{s-s_i}\quad \text{при } i=0,N,$$

$$A_{i1}=\left[\frac{(s-s_i)^2}{\Omega(s)}\right]_{s=s_i}\cdot\int_0^D\frac{\Omega(s)\cdot ds}{s-s_i}\quad \text{при } i=0,N.$$

Дальнейшие упрощения реализуются при $N=1$, когда для определения $\bar{n}$ используются лишь значения $n(s)$, $n^{(1)}(s)$ для начальной и конечной точек трассы. Тогда с помощью формулы (8) получаем аналитическое соотношение, полностью совпадающее с формулой (2) градиентного метода при $N=1$ (с учетом связи производной по лучевой координате от показателя преломления с градиентом показателя преломления и видимым зенитным углом [6, 10]). Совпадение остаточных членов этих соотношений свидетельствует о сравнимой потенциальной точности обоих методов для измерений, осуществляемых лишь в концевых точках трассы.

Если же $N=2$, и для определения $\bar{n}$ кроме $n(s)$, $n^{(1)}(s)$ в концевых точках используется и значение $n(s_x)$ в некоторой промежуточной точке s_x, то интегралы в (8) также представляются аналитическими, но весьма громоздкими функциями (которые по этой причине здесь не приводим). Отметим, что предельный переход к квадратурной формуле Эйлера–Маклорена (2) в этом случае не выполняется даже при условии равномерного разбиения трассы. Действительно, для $s_x=\frac{D}{2}$ формула (8) дает соотношение, уже не совпадающее с (2) при $N=2$

$$\bar{n}=\frac{1}{30}\cdot\left[7(n_0+n_D)+16n\left(s=\frac{D}{2}\right)\right]+\frac{D}{60}\cdot\left[n_0^{(1)}-n_D^{(1)}\right]$$

(в котором для сокращения записи не приведен остаточный член). Существенно, однако, что этот остаточный член будет пропорционален производной пятого порядка $n^{(5)}$, а не четвертого, как в случае разложения Эйлера–Маклорена при $N=2$ (формула (4)). Причем увеличение количества промежуточных точек в случае интерполяции по Эрмиту в отличие от случая Эйлера–Маклорена увеличивает соответствующим образом и порядок производной в остаточном члене. А это означает, что использование многочленов Эрмита позволяет повысить потенциальную точность градиентного метода.

Более подробный анализ точности обсуждаемого метода можно провести с использованием модельных либо экспериментальных данных о пространственных профилях показателя преломления воздуха на измеряемой трассе.

Выводы и предложения

Выполнен анализ путей повышения точности модельных методов учета среднеинтегрального показателя преломления воздуха при измерениях расстояний, осуществляемых с помощью электромагнитных волн на приземных трассах.

Рассмотрены возможности и перспективы дальнейшего развития градиентного метода, уточняющего известный метод точечной аппроксимации – на основе дополнительной информации о градиентах показателя преломления воздуха и видимых зенитных углах в концевых точках измеряемой трассы, а также известный геодезический метод А. Л. Островского – за счет дополнительных измерений локальных значений показателя преломления воздуха в промежуточных точках трассы.

Показана возможность модификации градиентного метода на случай неравномерного разбиения измеряемой трассы точками, в которых определяются локальные значения показателя преломления. Представляют интерес исследования точности градиентного метода с использованием экспериментальных данных о профилях показателя преломления на приземных трассах.

Литература

1. Большаков В. Д. Радиогеодезические и электрооптические измерения / В. Д. Большаков, Ф. Деймлих, А. Н. Голубев, В. П. Васильев. – М.: Недра, 1985. – 303 с.
2. Андрусенко А. М. Методы и средства прецизионной лазерной дальнометрии / А. М. Андрусенко, В. П. Данильченко, А. В. Прокопов, В. И. Пономарев, И. В. Лукин. – М.: Изд-во стандартов, 1987. – 224 с.
3. Островский А. Л. Учет атмосферных влияний на астрономо-геодезические измерения / А. Л. Островский, Б. М. Джуман, Ф. Д. Заблоцкий, Н. И. Кравцов. – М: Недра, 1990. – 235 с.
4. Прокопов А. К теории инструментальных методов учёта рефракционного удлинения траекторий электромагнитных волн при дальномерных измерениях на приземных трассах / А. Прокопов, И. Тревого // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2017. – Вип. II (34). – С. 85–87.
5. Кравцов Ю. А. Геометрическая оптика неоднородных сред / Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
6. Прокопов А. В. Интегральные теоремы оптической рефракции в трехмерно-неоднородной атмосфере и их геодезические приложения / А. В. Прокопов, Е. В. Ремаев, А. В. Бражниченко // Оптика атмосферы. – 1989. – Т. 2, № 12. – С. 1260–1264.
7. Кравченко М. Лазерна віддалемірна система вищої точності для лінійних вимірювань на геодинамічних полігонах України / М. Кравченко, П. Неєжмаков, О. Прокопов // Геодинаміка. – 1998. – Вип. 1. – С. 37–44.
8. Прокопов А. В. Градиентный метод определения среднеинтегрального показателя преломления воздуха / А. В. Прокопов, Е. В. Ремаев // Тез. докл. I Украинской научной конференции “Комплексні дослідження сучасної геодинаміки земної кори”. Алушта, 20–26 вересня 1993. – Львів: Вид. ЛПІ, 1993. – С. 50.
9. Прокопов А. В. Об интегральном представлении лучевых уравнений геометрической оптики / А. В. Прокопов // Письма в ЖТФ. – 1985. – Т. II, вып. 24. – С. 1526–1529.
10. Прокопов А. В. Закон преломления геометрооптических лучей в трехмерно-неоднородных средах / А. В. Прокопов // Письма в ЖТФ. – 1988. – Т. 14, вып. 2. – С. 107–110.
11. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов / И. И. Крылов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
12. Березин И. С. Методы вычислений, часть 1 / И. С. Березин, М. П. Жидков. – М.: Наука, 1966. – 632 с.
13. Бражниченко А. В. Имитационное моделирование дальномерных измерений и его использование для исследования методов определения атмосферных поправок / А. В. Бражниченко, А. В. Прокопов // Тез. докладов Ш Всесоюзной НТК “Метрология в дальнометрии”. Харьков, 18–20 октября 1988 г. – Харьков: НПО “Метрология”, 1988. – С. 179–181.

Щодо теорії градієнтного методу визначення середньоінтегрального показника заломлення повітря під час віддалемірних вимірювань на приземних трасах

П. Неєжмаков, О. Прокопов, І. Тревого

Виконано аналіз точності градієнтного методу визначення середньоінтегрального показника заломлення повітря під час віддалемірних вимірювань на приземних трасах. Показано можливість модифікації цього методу на випадок нерівномірного розбиття вимірюваної траси точками, в яких визначають локальні значення показника заломлення.

К теории градиентного метода определения среднеинтегрального показателя преломления воздуха при дальномерных измерениях на приземных трассах

П. Неежмаков, А. Прокопов, И. Тревого

Выполнен анализ точности градиентного метода определения среднеинтегрального показателя преломления воздуха при дальномерных измерениях на приземных трассах. Показана возможность модификации этого метода на случай неравномерного разбиения измеряемой трассы точками, в которых определяются локальные значения показателя преломления.

To the theory of gradient method of determination the mean integral refractive index of air at long distance measurements on the near-earth traces

P. Neyezhmakov, A. Prokopov, I. Trevoho

An analysis of the accuracy of the gradient method for determining the mean integral refraction index of air at range measurements on the surface tracks is executed. It is shown the possibility of modifying this method to the case of uneven partition of the measured trace by points, in which the local values of the refractive index are determined.